- Como $y'(-1) = 2 + \pi > 0$ e $y'(0) = -1 - \pi < 0$, la función es creciente en un entorno de $x = -1$ y decreciente en un entorno de $x = 0$. Por tanto, algún valor $c \in (-1, 0)$ tal que $y'(c) = 0$ es un máximo.
- Como $y'(0) = -1 - \pi < 0$ e $y'(1) = 2 + \pi > 0$, la función es decreciente en un entorno de $x = 0$ y creciente en un entorno de $x = 1$. Por tanto, algún valor $c' \in (0, 1)$ tal que $y'(c') = 0$ es un mínimo.

**Comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle para la función $f(x) = 3\cos^2 x$, en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Calcular también el valor al que se refiere la tesis del teorema.**

La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$; en particular, en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Además:

$$f(\pi/2) = 0 = f(3\pi/2)$$

Por tanto cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Luego, existe un punto $c \in (\pi/2, 3\pi/2)$ tal que $f'(c) = 0$. Calculémoslo:

$$f'(x) = -6\cos x \operatorname{sen} x = -3\operatorname{sen} 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

El punto buscado es $c = \pi$, ya que es el punto que pertenece al intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$.

**¿Puede aplicarse el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$ en el intervalo $[0, \pi]$? Encontrar, si existe, un punto de $[0, \pi]$ en el cual se anule esta función.**

Teorema de Bolzano. Si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos (por ejemplo, $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$), entonces existe al menos un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

La función $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[0, \pi]$. Además:

$$f(0) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 1 \qquad \text{y} \qquad f(\pi) = \operatorname{sen} 2\pi + \cos 3\pi = -1$$

Luego verifica las hipótesis del teorema de Bolzano.

Por tanto, existe un punto tal que $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x = 0$.

A ojo, se ve que una solución de esa ecuación trigonométrica es $x = \pi/2$.

Nota: Hacemos un intento de resolución de la ecuación $\operatorname{sen}2x + \cos3x = 0$:

$$\operatorname{sen} 2x + \cos 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos x \cos 2x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x \, 2\operatorname{sen} x \cos x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos x(\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x \, 2\operatorname{sen} x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi/2 + k\pi$$

Aunque hay más soluciones, a nosotros nos vale con encontrar una: $x = \pi/2$, que, como hemos dicho, puede verse a ojo.

**Se considera la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Demostrar que existe algún número real $x \in (0, 1)$ tal que $f'(x) = x$.**

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Consideramos la función $F(x) = f'(x) - x = \dfrac{1}{1+x^2} - x$

Esta función es continua en $[0, 1]$. Además, $F(0) = 1$ y $F(1) = -\dfrac{1}{2}$. Luego, por el teorema de Bolzano, existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $F(c) = 0$. Por tanto:

$$F(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(c) = \frac{1}{1+c^2} - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+c^2} = c \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = c$$

**Podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = e^{x^2-1}$ en el intervalo es [–1, 1]?¿Para qué valor $\alpha$ es $f'(\alpha) = 0$?**

Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo $(a, b)$ y además $f(a) = f(b)$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = e^{x^2-1}$ cumple las hipótesis anteriores en el intervalo [–1, 1], ya que es continua y derivable en él y además:

$$f(-1) = e^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad f(1) = e^0 = 1$$

Por tanto:

$$f'(x) = 2x\,e^{x^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

El valor pedido es $\alpha = 0$.

**Demostrar que, para cualquier valor de $m$, la ecuación $x^3 - 3x + m = 0$ no tiene dos raíces diferentes que pertenecen al intervalo [0, 1].**

Consideramos la función $f(x) = x^3 - 3x + m$ que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada, $f'(x) = 3x^2 - 3$, vale 0 en $x = -1$ y en $x = 1$.

Como $f'$ es negativa para todo $x \in (-1, 1)$, la función es decreciente en todo el intervalo. En consecuencia, $f(x) = x^3 - 3x + m$ sólo puede cortar una vez, como máximo, al eje OX en el intervalo $(-1, 1)$. Por tanto, la ecuación $x^3 - 3x + m = 0$ sólo puede tener una raíz en ese intervalo.

**Aplicar, si es posible, a la función $f(x)$ = sen $x$ cos $x$ en si el intervalo es $[0, \pi]$, el teorema de Rolle, dando $c \in (0, \pi)$ para el cual $f'(c) = 0$.**

La función $f(x)$ = sen $x$ cos $x$ es continua y derivable en toda la recta. En particular en el intervalo $[0, \pi]$. Además:

$$f(0) = \operatorname{sen} 0\ \cos 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad f(\pi) = \operatorname{sen}\pi \cdot \cos\pi = 0$$

Por tanto, puede aplicarse el teorema. En consecuencia, existe un punto $c \in (0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$

$$f'(x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad x = \pi/4$$

El valor buscado es $c = \pi/4$

*Nota*: Hay otra solución: $c = 3\pi/4$

**Aplicar el teorema de Bolzano para demostrar que la ecuación $x = \cos x$ tiene al menos una solución dentro del intervalo $[0, \pi/2]$.**

Consideramos la función $f(x) = x - \cos x$. Esa función es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[0, \pi/2]$. Además:

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(\pi) = \pi - \cos\pi = \pi + 1 > 0$$

Luego verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto, existe un punto $c \in (0, \pi/2)$ tal que $f(c) = 0$:

$$f(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = c - \cos c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \cos c$$

Esto es, la ecuación $x = \cos x$ tiene una solución que es $c$.

**Calcula un punto el intervalo [1, 3] en el que la recta tangente a la curva $y = x^2 - x + 2$ es paralela a la cuerda que une los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, 8)$.**

El teorema del valor medio dice: Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo $(a, b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como la función $y = f(x) = x^2 - x + 2$ cumple las condiciones del teorema se tendrá:

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 2c - 1 \quad (\text{ya que } f'(x) = 2x - 1 \;\Rightarrow\; f'(c) = 2c - 1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8-2}{3-1} = 3 = 2c - 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

El punto pedido es $x = 2$.

**Considera la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ 3\cos(x-3) & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

**a) Estudia si es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.**
**b) Razona si se puede asegurar que existe un punto $c$ en el intervalo $[-2, 2]$ en el cual $f'(c) = 0$.**

a) Veamos primero la continuidad. La función es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo quizás en los puntos $x = 0$ y $x = 3$, que es los que se cambia de un trozo a otro.

Si $x \to 0^- \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 0$
Si $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 0$

La función es continua en $x = 0$.

Si $x \to 3^- \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 3$
Si $x \to 3^+ \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 3\cos 0 = 3$

La función es continua en $x = 3$.

Salvo en $x = 0$ y $x = 3$, su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ -3\,\text{sen}(x-3) & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Para $x = 0$:

Si $x \to 0^- \quad \Rightarrow \quad f'(x) \to 1$
Si $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad f'(x) \to 1$

La función es derivable en $x = 0$.

Para $x = 3$:

Si $x \to 3^- \quad \Rightarrow \quad f'(x) \to 1$
Si $x \to 3^+ \quad \Rightarrow \quad f'(x) \to -3\,\text{sen}\, 0 = 0$

La función no es derivable en $x = 3$.

La derivada es pues:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ -3\,\text{sen}(x-3) & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

b) En el intervalo $[-2, 2]$ la función es continua y derivable; en consecuencia cumple el teorema de Rolle, y existe un punto $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ese punto es la solución de:

$$2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

**Prueba que la función $f(x) = x^2 - 2x + \cos x$ tiene al menos un mínimo relativo en el intervalo $(0, \pi)$.**

La función $f(x) = x^2 - 2x + \cos x$ es continua y derivable para todo $x$. Lo mismo le sucede a su derivada, $f'(x) = 2x - 2 - \text{sen } x$. Como:

$$f'(0) = -2 < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(\pi) = 2\pi - 2 > 0$$

por el teorema de Bolzano, existe algún punto $c$ entre 0 y $\pi$ tal que $f'(c) = 0$. Este punto $c$ será el punto singular de la función $f$.

La segunda derivada vale $f''(x) = 2 - \cos x$. Entonces:

$$f''(c) = 2 - \cos c > 0 \quad (\text{por ser } -1 \le \cos \alpha \le 1, \text{ para todo } \alpha)$$

Por tanto, $c$ cumple las condiciones de mínimo relativo: $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$.