Optimización

1.- En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se pueda obtener en este concurso.

Sol: 25 €.

2.- Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la mayor posible?

Sol: x = 40 m, y = 20 m.

3.- Se dispone de 400 metros de alambrada para vallar un solar rectangular. ¿Qué dimensiones deberá tener el solar para que con esa alambrada se limite la mayor área posible? Razonar el proceso.

Sol: x = 100 e y = 100, es un cuadrado

4.- Un terreno de forma rectangular tiene 400 m2 y va a ser vallado. El precio del metro lineal de valla es de 4 euros. ¿Cuáles serán las dimensiones del solar que hacen que el costo de la valla sea mínimo?

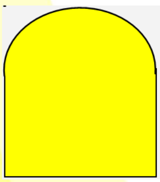
Sol: Cuadrado de lado 20m.

5.- Supongamos que el solar del problema anterior tiene 200 m^2 y un lado a lo largo del río requiere una valla más costosa de 5 euros el metro lineal. ¿Qué dimensiones darán el costo más bajo?

Sol: Las dimensiones del solar serán x =15 m. e y = 40/3 m

6.- *(El Problema del Cable más Corto)* Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule aproximadamente la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

Sol: 17.20 m.



7.- *(El Primer Problema de la Ventana)* Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana que deja pasar más luz, si su perímetro mide 5 metros.

Sol: Ancho: 1.4 m.; Alto: 1.4 m

8.- Un pastor dispone de 1000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. Halla las dimensiones de la cerca para que el área encerrada sea máxima.

Sol: x =250 e y =500.

9.- Un segmento de longitud de 5 cm. apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY, de tal manera que forma con éstos un triángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.

$$Sol: x=\sqrt{\frac{5}{3}}; y=\sqrt{\frac{10}{3}}$$

10.- Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior se ha sustituido por un triángulo equilátero. Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6,6 m, hallar sus dimensiones para que la superficie sea máxima.

Sol: x =1.54; y =0.99

11.- Dividir un segmento de 6 cm. de longitud en dos partes, con la propiedad de que la suma de las áreas del cuadrado y del triángulo equilátero construidos sobre ellos sea máxima.

Sol: x =5.3; y = 0.7

12.- Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

Sol: x = 48 m y = 120 m z =144 m.

13.- Descomponer el número e en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima. Calcular dicha suma.

Sol: x = e/2 y la suma S =2-2ln2

14.- Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad?

Sol: 3 alarmas de tipo A y 6 de tipo B.

15.- Si un cultivador valenciano planta 200 naranjos por hectárea, el rendimiento promedio es de 300 naranjas por árbol. Por cada árbol adicional que siembre por hectárea, el cultivador obtendrá 15 naranjas menos por árbol. ¿Cuántos árboles por hectárea darán la mejor cosecha?

Conclusión: Sin plantar árboles la producción que se obtiene es mejor que si aumentamos el número de frutales de esta variedad.

16.- Para la fabricación de discos duros, se necesita invertir dinero en contratar empleados y comprar máquinas. El Director ha estimado que si compra "x" máquinas y contrata "y" empleados, fabricaría, $f(x,y)=90x\cdot y^2$ unidades. Cada máquina le supone una inversión de 2.500 € y cada contrato de un nuevo empleado otro de 1.500 €. Si el empresario sólo dispone de un presupuesto de 22.500€ para este fin, determine el número de obreros que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para maximizar la producción.

Sol: x = 3, y = 30.

17.- Una esmeralda pesa 16 grs. y sabemos que su valor es proporcional al cuadrado de su peso. Si partimos en dos trozos la esmeralda, halla el peso que debe tener cada uno de ellos para que su valor sea mínimo.

Sol: x = 8 gramos e y = 8 gramos

18.- La base menor de un trapecio isósceles mide 6 metros y la longitud de los lados no paralelos es de 2 metros. Calcula cuánto debe medir la base mayor para que el área del trapecio sea máxima.

$$Sol: x=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$$

19.- Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitudes x y 100-x. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero y con el otro segmento se forma un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado. Indicar razonadamente para qué valor de x se obtiene que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado es mínima.

Sol: Para x = 83.86

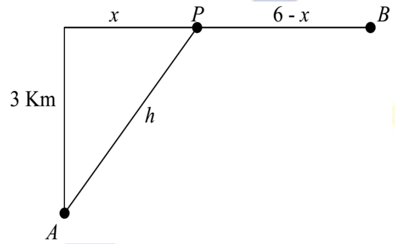
20.- En una carretera a través del desierto un automóvil debe de ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 Km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 Km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km, determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.

Sol: 550 Km. a una velocidad de 100 Km/h

21.- Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas (0,0) , (a,0) , (0, b) y (a, b) , de modo que el punto (a, b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación: $y=\frac{1}{x^2}+4$. De todos estos rectángulos hallar razonadamente el de área mínima.

Sol: Los vértices serán (0,0), (1/2,0), (1/2,8) y (0,8)

22.- (Problema del tiempo mínimo).- Un nadador, A, se encuentra a 3 km. De la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 Km. De la caseta. Sabiendo que nada a 3 km/h y que anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.

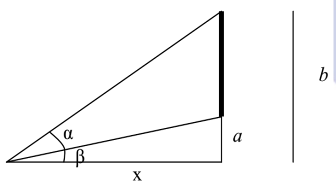


Sol: A 2.25 Km de la caseta, y tardará 2 horas en llegar.

23.- Determina el punto de la gráfica de la función $f(x)=-x^3+6x^2-7x+5$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

Sol: P(2, 7): $y=5X-3$

24.- Un observador se encuentra frente a un cuadro colgado de una pared vertical. El borde inferior del cuadro está situado a una distancia a sobre el nivel de los ojos del observador, el borde superior a una distancia b.



¿A qué distancia de la pared debe situarse el observador para que el ángulo bajo el que ve el cuadro sea el máximo?

$Sol: \alpha=\arctan\frac{(b-a)\cdot x}{x^2+ab}$

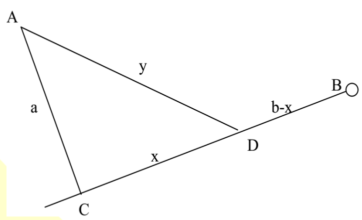
25.- Determinar la razón entre el radio de la base y la altura de un cilindro que, con el volumen dado, tenga la superficie total mínima.

Sol: h=2R

26.- Hallar el área total máxima de un cilindro inscrito en una esfera de radio R.

$Sol: A=\pi R^2\left(1+\sqrt{5}\right)$

27.- La fábrica A debe unirse mediante una carretera con una línea férrea rectilínea en la que se encuentra el poblado B. La distancia AC desde la fábrica hasta el ferrocarril es igual a a, en tanto que la distancia BC por el ferrocarril es igual a b. El costo del transporte de las mercancías por la carretera es k veces (k>1) mayor que por el ferrocarril. ¿En qué punto D del segmento BC hay que trazar la carretera desde la fábrica para que el costo del transporte de las mercancías desde la fábrica A hasta el poblado B sea el mínimo?



$Sol: D=b-\frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$

28.- A 10 Km de tu casa te acuerdas que te has dejado el agua corriendo, lo que te cuesta 10 dhs. la hora. Volver a casa a una velocidad constante de x Km/h te cuesta en combustible 9+(x/10) dhs. el Km. **a)** ¿Cuánto te cuesta volver a casa a x km/h (en combustible)? **b)** ¿Cuánto tiempo tardas en llegar a casa si viajas a esa velocidad? **c)** ¿Cuánto te cuesta el consumo de agua mientras regresas a casa? **d)** ¿A qué velocidad debes regresar a casa para que el coste total de consumo de agua y combustible sea mínimo.

Sol: a) 10·[9+(x/10)]=90+x dhs. b)t = 10/x h c) 100/x dhs ; d) a 10 Km/h

29.- De una chapa redonda de hojalata se corta un sector circular que se enrolla en forma de un embudo cónico. ¿Cuál debe ser el ángulo del sector para que el embudo tenga el volumen máximo?

$Sol: \alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

30.- Un granjero compra una ternera de 270 Kg por 18.000 dhs. Alimentar al animal cuesta 15 dhs al día y la ternera aumenta de peso 0,45 Kg cada día. Por otro lado, cada día que pasa, el valor del animal en el mercado disminuye, de modo que el valor al cabo de t días, dependiendo del peso del animal es (100-(t/18)) dhs por Kilo. Calcular: **a)** Peso de la ternera al cabo de t días **b)** Valor total de la ternera en el mercado al cabo de t días. **c)** Coste total invertido en esos t días, incluyendo la compra y la alimentación. **d)** Ganancia obtenida por el granjero si vende la ternera a los t días. **e)** ¿Cuándo deben vender la ternera para obtener la máxima ganancia?

Sol: a) 270+0,45t b)(100-(t/18))(270+0,45t); c)18000+15t;
d) (100-(t/18))(270+0,45t)-(18000+15 t); e) t=10 días.

31.- Hallar en la hipérbola $x^2/2-y^2=1$ el punto más próximo al punto (3, 0)

Sol: Los puntos (2,1) y (2,-1)

32.- Hallar el área máxima de un rectángulo cuyos dos vértices yacen en los ejes X e Y de un sistema cartesiano de coordenadas, el tercero en el punto (0,0) y el cuarto está en la parábola $y=3-x^2$.

Sol: El área máxima es 2

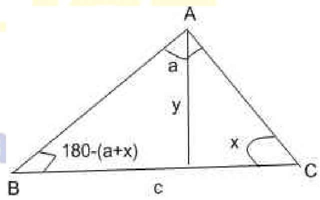
33.- Hallar la pendiente de la recta que pasa por el punto A(1,2) y que corta al primer cuadrante de coordenadas en el triángulo de área mínima.

Sol: m=-2

34.- Hallar la longitud del lado del trapecio que tenga el perímetro mínimo entre todos los trapecios isósceles con área prefijada S y ángulo α entre el lado y la base inferior.

$Sol: y=\sqrt{\frac{S}{\operatorname{sen}\alpha}}$

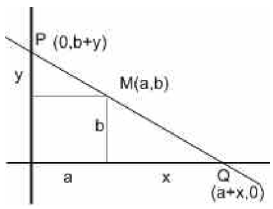
35.- Determinar los ángulos del triángulo ABC de área máxima, si se da la longitud de su base BC y sabemos que el ángulo BAC vale a.



$Sol: x=\frac{\pi-\alpha}{2}$

36.- En un cono, en el que el radio de la base es igual a R y la altura H, está inscrito el cilindro de volumen máximo. Hallar el radio de la base y la altura de dicho cilindro.

Sol: x = 2R/3; h=H/3



37.- Consideremos un haz de rectas que pasan por el punto M(a,b), donde a>0 y b>0, y que cortan los semiejes positivos OX y OY. Hallar la longitud mínima del segmento PQ, donde P y Q son los puntos de intersección de una recta del haz con los semiejes positivos.

$Sol: d_{min}=\sqrt{\left(a+\sqrt[3]{ab^2}\right)^2+\left(\frac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}}+b\right)^2}$