Departamento de Matemáticas
I.E.Juan Ramón Jiménez
Casablanca

Nombre:			Nota
Curso:	2º Bachillerato	Examen III	
Fecha:	*12 de Noviembre de 2015*	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

1.- Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima. **(2,5 puntos)**

2.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$

a) Determina a y $b\in\mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2,2) y tiene un punto de inflexión de abscisa x=0. **(1,5 puntos)**

b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión. **(1 punto)**

3.- Sean $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos y absolutos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan) **(1,5 puntos)**

b) Estudia la curvatura de la función f. **(1 punto)**

4.- Sea la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si \quad 0\le x<2 \\ cx+1 & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$$

a) Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo [0,4], derivable en (0,4) y que *f(0)=f(4)* **(2 puntos)**

b) ¿En qué punto del intervalo la recta tangente es paralela a la recta *y=2*? **(1 punto)**

1.- Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima. (2,5 puntos)

Si llamamos x a la longitud del lado del cuadrado, 1- 4x será la longitud de la circunferencia.

Con estos datos, el área del cuadrado será x^2 y el área de la circunferencia será πR^2.

Sabemos además que la longitud de una circunferencia viene dada por $2\pi R$. Si expresamos el radio en función de x, tenemos que:

$$1-4x=2\pi R \quad \rightarrow \quad R=\frac{1-4x}{2\pi}$$

Por tanto con estos datos el área de la circunferencia en función de x es: $A=\pi\left(\frac{1-4x}{2\pi}\right)^2$

S(x) es la suma de las áreas de ambos recintos en función de x:

$$S(x)=x^2+\pi\left(\frac{1-4x}{2\pi}\right)^2 \quad con \quad 0<x<1$$

Que es la función a optimizar; si la derivamos:

$$S´(x)=2x+2\pi\frac{1-4x}{2\pi}\cdot\frac{-4}{2\pi}=2x+\frac{16x-4}{2\pi}=\frac{4\pi x+16x-4}{2\pi}$$

Y la igualamos a cero:

$$S´(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\pi+4}$$

Obtenemos el valor del lado del cuadrado x.

Así que el trozo con el que se forma el cuadrado mide $\frac{4}{\pi+4}=0,56\ cm$

Y con esto el trozo con el que se forma la circunferencia mide $1-\frac{4}{\pi+4}=\frac{\pi}{\pi+4}=0,44\ cm$

Para que esta área sea mínima tiene que ocurrir que la segunda derivada sea positiva; si la calculamos:

$$S''(x)=\frac{16+4\pi}{2\pi}>0 \qquad \forall x$$

Vemos es positiva y por tanto el valor obtenido corresponde a un mínimo, lo que no podía ser de otra forma puesto que S(x) es una función polinómica de 2º grado con el coeficiente del término cuadrático negativo.

2.- Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$

a) Determina a y $b\in\mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2,2) y tiene un punto de inflexión de abscisa x=0. (1,5 puntos)

Si la función pasa por el punto (2,2), quiere decir que f(2)=2, por tanto obtenemos la ecuación:

$$2=8+4a+2b+1 \qquad (1)$$

Si además tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x=0, quiere decir que su segunda derivada en dicho punto es nula.

Calculamos la primera y la segunda derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad y \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

Y si sustituimos obtenemos:

$$f''(0) = 2a = 0 \quad \to \quad a = 0 \qquad (2)$$

Con esto, si sustituimos en (1), obtenemos:

$$2 = 8 + 2b + 1 \quad \to \quad 2b = -7 \quad \to \quad b = -\frac{7}{2}$$

Por tanto; **a=0 y b=-7/2**

Y la función es:

$$f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x + 1$$

b) *Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión. (1 punto)*

La ecuación de la recta tangente viene dada por la expresión: $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$

Calculamos la imagen f(0) y la imagen de la derivada f'(0) en el punto de inflexión que tiene por abscisa x=0:

$$f(0) = 1 \qquad f'(x) = 3x^2 - \frac{7}{2} \quad \to \quad f'(0) = -\frac{7}{2}$$

Y sustituimos en la expresión de la recta tangente:

$$y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \quad \to \quad y - 1 = -\frac{7}{2}(x-0) \quad \to \quad 7x + 2y - 2 = 0$$

La ecuación de la recta normal viene dada por: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}\cdot(x-a)$

Y en x=0;

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}\cdot(x-0) \quad \to \quad y - 1 = \frac{2}{7}(x-0) \quad \to \quad 2x - 7y + 7 = 0$$

3.- Sea $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ **la función definida por** $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos y absolutos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan) (1,5 puntos)

Para trabajar la monotonía de una función necesitamos calcular su derivada:

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - (3x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \ldots\ldots = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$$

Que igualamos a cero para calcular sus posibles extremos:

$$f'(x)=0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}=0 \quad \leftrightarrow \quad 3x-1=0 \leftrightarrow \qquad x=\frac{1}{3}$$

Así que en el punto x=1/3 hay un extremo. Veamos qué es utilizando la siguiente tabla:

X	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
f'(x)	-		+
f(x)	↘	Mínimo	↗

Si calculamos $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x}}=+\infty$

Podemos asegurar que la función es decreciente en el intervalo $\left(0,\frac{1}{3}\right)$, creciente en el $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ y que en el punto $x=\left(\frac{1}{3},2\sqrt{3}\right)$ la función presenta un mínimo absoluto,

b) Estudia la curvatura de la función *f*. (1 punto)

Para trabajar la curvatura necesitamos la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{6x-(3x-1)\cdot 2\left(\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4x^3}=.....=\frac{3(1-x)}{4x^2\sqrt{x}}=0 \quad \leftrightarrow \quad x=1$$

Que igualamos a cero para calcular sus posibles puntos de inflexión:

$$f''(x)=0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{3(1-x)}{4x^2\sqrt{x}}=0 \quad \leftrightarrow \quad x=1$$

Así que en x=1 hay un punto de inflexión. Veamos la curvatura utilizando la tabla:

X	0	1	$+\infty$
f''(x)	+		-
f(x)	∪	$P_{Inflexión}$	∩

Por tanto la función es convexa en el intervalo (0,1) y es cóncava a partir del punto de inflexión x=(1,4) en el intervalo $(1,+\infty)$

4.- Sea la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si \quad 0\le x<2 \\ cx+1 & si \quad 2\le x\le 4\end{cases}$$

a) Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo [0,4], derivable en (0,4) y que *f(0)=f(4)* **(2 puntos)**

Si la función es continua en [0,4], como es una función a trozos que cambia de rama en x=2, tiene que ocurrir que: $f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

Con esto:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2c+1 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2+ax+b=4+2a+b \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} cx+1=2c+1 \end{array}\right\} \text{Obtenemos la condición (1):} \quad 2a+b-2c=-3$$

Si la función es derivable en (0,4), también lo será en x=2; por tanto las derivadas laterales en el cambio de rama han de coincidir. Calculamos la función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si \quad 0<x<2 \\ c & si \quad 2\le x<4 \end{cases}$$

En x=2

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=4+a \\ f'(2^+)=c \end{array}\right\} \text{Obtenemos la condición (2):} \; 4+a=c$$

Como además, del enunciado, sabemos que f(0)=f(4), obtenemos la condición (3): $b=4c+1$

Con todas ellas obtenemos el sistema: $\begin{cases} 2a+b-2c=-3 \\ 4+a=c \\ b=4c+1 \end{cases}$ cuya solución es: $\begin{cases} a=-3 \\ b=5 \\ c=1 \end{cases}$

Por tanto la función es:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+5 & si \quad 0\le x<2 \\ x+1 & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$$

b) ¿En qué punto del intervalo la recta tangente es paralela a la recta *y=2*? (0,5 puntos)

Si la recta tangente es paralela a la recta y=2, quiere decir que su pendiente es cero, o lo que es lo mismo, que la recta es paralela el eje x.

La función en cuestión es una función a trozos, compuesta por una función cuadrática y por una función lineal. Como sabemos, una recta no puede tener recta tangente, pero sabemos que una parábola sí. Por tanto derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{d\left(x^2-3x+5\right)}{dx}=2x-3 \qquad 2x-3=0 \quad \leftrightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

Así que el punto buscado es el punto es el $P\left(\frac{3}{2},\frac{11}{4}\right)$ de abscisa $x=\frac{3}{2}$.