

Nombre:			Nota
Curso:	2º Bachillerato	Examen III	
Fecha:	12 de Noviembre de 2015	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

1.- Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima. (2,5 puntos)

2.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

- Determina a y $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2,2) y tiene un punto de inflexión de abscisa $x=0$. (1,5 puntos)
- Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión. (1 punto)

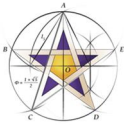
3.- Sean $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$

- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos y absolutos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan) (1,5 puntos)
- Estudia la curvatura de la función f . (1 punto)

4.- Sea la función $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- Determina a , b y c sabiendo que f es continua en el intervalo $[0, 4]$, derivable en $(0, 4)$ y que $f(0) = f(4)$ (2 puntos)
- ¿En qué punto del intervalo la recta tangente es paralela a la recta $y=2$? (1 punto)



1.- Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima. (2,5 puntos)

Si llamamos x a la longitud del lado del cuadrado, $1 - 4x$ será la longitud de la circunferencia.

Con estos datos, el área del cuadrado será x^2 y el área de la circunferencia será πR^2 .

Sabemos además que la longitud de una circunferencia viene dada por $2\pi R$. Si expresamos el radio en función de x , tenemos que:

$$1 - 4x = 2\pi R \quad \rightarrow \quad R = \frac{1 - 4x}{2\pi}$$

Por tanto con estos datos el área de la circunferencia en función de x es: $A = \pi \left(\frac{1 - 4x}{2\pi} \right)^2$

$S(x)$ es la suma de las áreas de ambos recintos en función de x :

$$S(x) = x^2 + \pi \left(\frac{1 - 4x}{2\pi} \right)^2 \quad \text{con} \quad 0 < x < 1$$

Que es la función a optimizar; si la derivamos:

$$S'(x) = 2x + 2\pi \frac{1 - 4x}{2\pi} \cdot \frac{-4}{2\pi} = 2x + \frac{16x - 4}{2\pi} = \frac{4\pi x + 16x - 4}{2\pi}$$

Y la igualamos a cero:

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\pi + 4}$$

Obtenemos el valor del lado del cuadrado x .

Así que el trozo con el que se forma el cuadrado mide $\frac{4}{\pi + 4} = 0,56 \text{ cm}$

Y con esto el trozo con el que se forma la circunferencia mide $1 - \frac{4}{\pi + 4} = \frac{\pi}{\pi + 4} = 0,44 \text{ cm}$

Para que esta área sea mínima tiene que ocurrir que la segunda derivada sea positiva; si la calculamos:

$$S''(x) = \frac{16 + 4\pi}{2\pi} > 0 \quad \forall x$$

Vemos es positiva y por tanto el valor obtenido corresponde a un mínimo, lo que no podía ser de otra forma puesto que $S(x)$ es una función polinómica de 2º grado con el coeficiente del término cuadrático negativo.

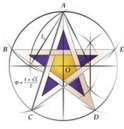
2.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

a) Determina a y $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2,2) y tiene un punto de inflexión de abscisa $x=0$. (1,5 puntos)

Si la función pasa por el punto (2,2), quiere decir que $f(2)=2$, por tanto obtenemos la ecuación:

$$2 = 8 + 4a + 2b + 1 \quad (1)$$

Si además tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=0$, quiere decir que su segunda derivada en dicho punto es nula.



Calculamos la primera y la segunda derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad y \quad f''(x) = 6x + 2a$$

Y si sustituimos obtenemos:

$$f''(0) = 2a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0 \quad (2)$$

Con esto, si sustituimos en (1), obtenemos:

$$2 = 8 + 2b + 1 \quad \rightarrow \quad 2b = -7 \quad \rightarrow \quad b = -\frac{7}{2}$$

Por tanto; **a=0 y b=-7/2**

Y la función es:

$$f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x + 1$$

b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión. (1 punto)

La ecuación de la recta tangente viene dada por la expresión: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

Calculamos la imagen $f(0)$ y la imagen de la derivada $f'(0)$ en el punto de inflexión que tiene por abscisa $x=0$:

$$f(0) = 1 \quad f'(x) = 3x^2 - \frac{7}{2} \quad \rightarrow \quad f'(0) = -\frac{7}{2}$$

Y sustituimos en la expresión de la recta tangente:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \quad \rightarrow \quad y - 1 = -\frac{7}{2}(x - 0) \quad \rightarrow \quad 7x + 2y - 2 = 0$$

La ecuación de la recta normal viene dada por: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)$

Y en $x=0$;

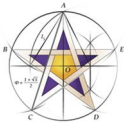
$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0) \quad \rightarrow \quad y - 1 = \frac{2}{7}(x - 0) \quad \rightarrow \quad 2x - 7y + 7 = 0$$

3.- Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos y absolutos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan) (1,5 puntos)

Para trabajar la monotonía de una función necesitamos calcular su derivada:

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - (3x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dots = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$$



Que igualamos a cero para calcular sus posibles extremos:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-1 = 0 \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Así que en el punto $x=1/3$ hay un extremo. Veamos qué es utilizando la siguiente tabla:

X	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	\searrow	Mínimo	\nearrow

Si calculamos $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Podemos asegurar que la función es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, creciente en el $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ y que en el punto $x = \left(\frac{1}{3}, 2\sqrt{3}\right)$ la función presenta un mínimo absoluto,

b) Estudia la curvatura de la función f. (1 punto)

Para trabajar la curvatura necesitamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{6x - (3x-1) \cdot 2 \left(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{4x^3} = \dots = \frac{3(1-x)}{4x^2\sqrt{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Que igualamos a cero para calcular sus posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(1-x)}{4x^2\sqrt{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Así que en $x=1$ hay un punto de inflexión. Veamos la curvatura utilizando la tabla:

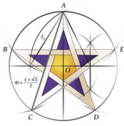
X	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	+		-
$f(x)$	∪	$P_{\text{Inflexión}}$	∩

Por tanto la función es convexa en el intervalo $(0,1)$ y es cóncava a partir del punto de inflexión $x=(1,4)$ en el intervalo $(1, +\infty)$

4.- Sea la función $f : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

a) Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo $[0,4]$, derivable en $(0,4)$ y que $f(0)=f(4)$ (2 puntos)



Si la función es continua en $[0,4]$, como es una función a trozos que cambia de rama en $x=2$, tiene que ocurrir que: $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

Con esto:

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2c + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + ax + b = 4 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} cx + 1 = 2c + 1 \end{array} \right\} \text{Obtenemos la condición (1): } 2a + b - 2c = -3$$

Si la función es derivable en $(0,4)$, también lo será en $x=2$; por tanto las derivadas laterales en el cambio de rama han de coincidir. Calculamos la función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } 0 < x < 2 \\ c & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

En $x=2$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array} \right\} \text{Obtenemos la condición (2): } 4 + a = c$$

Como además, del enunciado, sabemos que $f(0)=f(4)$, obtenemos la condición (3): $b = 4c + 1$

$$\text{Con todas ellas obtenemos el sistema: } \begin{cases} 2a + b - 2c = -3 \\ 4 + a = c \\ b = 4c + 1 \end{cases} \text{ cuya solución es: } \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{cases}$$

Por tanto la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

b) ¿En qué punto del intervalo la recta tangente es paralela a la recta $y=2$? (0,5 puntos)

Si la recta tangente es paralela a la recta $y=2$, quiere decir que su pendiente es cero, o lo que es lo mismo, que la recta es paralela al eje x .

La función en cuestión es una función a trozos, compuesta por una función cuadrática y por una función lineal. Como sabemos, una recta no puede tener recta tangente, pero sabemos que una parábola sí. Por tanto derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{d(x^2 - 3x + 5)}{dx} = 2x - 3 \quad 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Así que el punto buscado es el punto es el $P\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$ de abscisa $x = \frac{3}{2}$.