Alumn@:			Nota
Curso:	2º Bachillerato	Recuperación	
Fecha:	*14 de Enero de 2016*	1º Evaluación	

1.- Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1.248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

2.- Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

a) ***(1 punto)*** Determinar el valor de *a* para el que la función posee un mínimo relativo en x=1. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.
b) ***(1 punto)*** Obtener la asíntotas de la gráfica $y = f(x)$ para a=1.
c) ***(0,5 puntos)*** Esbozar la gráfica de la función para a=1.

3.- La función *y=f(x)* tiene las siguientes propiedades:

I. Su dominio es la recta real excepto los puntos -1 y 1. Es continua en todo su dominio y corta al eje OX en el punto (2,0)
II. Tiene una asíntota horizontal en $y_H=0$, con f(x)>0 si x<2 y f(x)<0 si x>2, y $x \neq \pm 1$.
III. Tiene una asíntota vertical en x=1, con $\lim\limits_{x \to +1^-} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +1^+} = +\infty$
IV. Tiene una asíntota vertical en x=-1, con $\lim\limits_{x \to -1^-} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} = +\infty$
V. Tiene mínimos en (4,-2) y (0,3) y no tiene máximos.

a) **(1 punto)** Representa dicha función.
b) **(0,5 puntos)** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) **(1 punto)** Calcula el límite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

4.- Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & si\ x < 0 \\ x^2 \cdot e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) **(0,5 puntos)** Calcula los límites en los infinitos.
b) **(1 punto)** Calcular el valor de *a*, para que f(x) sea continua en todo el conjunto de los números reales.
c) **(1 punto)** Estudiar la derivabilidad de la función y calcular f'(x) donde sea posible.

1.- ***Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1.248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.***

Si uno de ellos tiene L metros de Lado, el del triple perímetro tendrá 3L metros de lado y el otro cuadrado tendrá de lado M metros.

Utilizando el dato del perímetro total, obtenemos la relación entre las variables:

$$4L + 4M + 4\cdot 3L = 1248 \quad \rightarrow \quad M = \frac{1248 - 16L}{4} = 312 - 4L$$

El área a calcular será:

$$A = L^2 + M^2 + (3L)^2 = 10L^2 + M^2$$

Sustituyendo el valor obtenido de M:

$$A = 10L^2 + M^2 = 10L^2 + (312 - 4L)^2$$

Si derivamos la expresión del área en función de L, tenemos:

$$A' = 20L + 2(312 - 4L)\cdot(-4) = 52L - 2496$$

Y si la igualamos a cero, obtenemos los extremos de la función A(L):

$$A' = 0 \quad \leftrightarrow \quad 52L - 2496 = 0 \quad \rightarrow \quad L = \frac{2496}{52} = 48m$$

Veamos que es mínimo, y para ello derivamos de nuevo:

$$A'' = 52 \quad \rightarrow \quad A''(48) = 52 > 0$$

Por tanto el área será mínima, y las dimensiones de los tres cuadrados serán:

48 metros el primero, 3·48=144 metros el segundo y 312-4·48=120 metros el tercero.

2.- ***Dada la función:*** $f(x) = \dfrac{ax^4 + 1}{x^3}$

a) Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en x=1. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) Obtener la asíntotas de la gráfica $y = f(x)$ ***para a=1.***

c) Esbozar la gráfica de la función para a=1.

a) Para que posea un mínimo en x=1, ha de ocurrir que la derivada en ese punto sea nula, por tanto:

$$f'(x) = \frac{4ax^3\cdot x^3 - (ax^4 + 1)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{ax^6 - 3x^2}{x^6}$$

$$f'(1) = \frac{a\cdot 1^6 - 3\cdot 1^2}{1^6} = a - 3 \quad \rightarrow \quad f'(1) = 0 \quad \leftrightarrow \quad a - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

Como la segunda derivada en x=1 con a=3 es positiva: $f''(x)=\dfrac{12}{x^5} \quad \rightarrow \quad f''(1)=12>0$

En x=1 la función tiene un ***mínimo relativo.***

Para a=3, la derivada es: $f'(x)=\dfrac{3x^4-3}{x^4}=0 \quad \rightarrow \quad 3x^3=3 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$

En x=-1

$$f''(x)=\frac{12}{x^5} \quad \rightarrow \quad f''(-1)=-12<0$$

Por tanto en x=-1 la función tiene un ***máximo relativo.***

b) Si a=1, tenemos que: $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3}$, y como su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$, tendrá una asíntota vertical.

<u>Asíntota Vertical en x=0:</u>

f presenta una asíntota vertical en x=0 si ocurre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+1}{x^3}=\frac{1}{0} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^4+1}{x^3}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^4+1}{x^3}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{cases}$$

Por tanto f(x) tiene una asíntota vertical en x=0.

<u>Asíntota Horizontal:</u>

f presenta una asíntota horizontal en y=k si ocurre que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=K$, por tanto, si calculamos el límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+1}{x^3}=\pm\infty$$

Así que por tanto la función no presenta asítota horizontal.

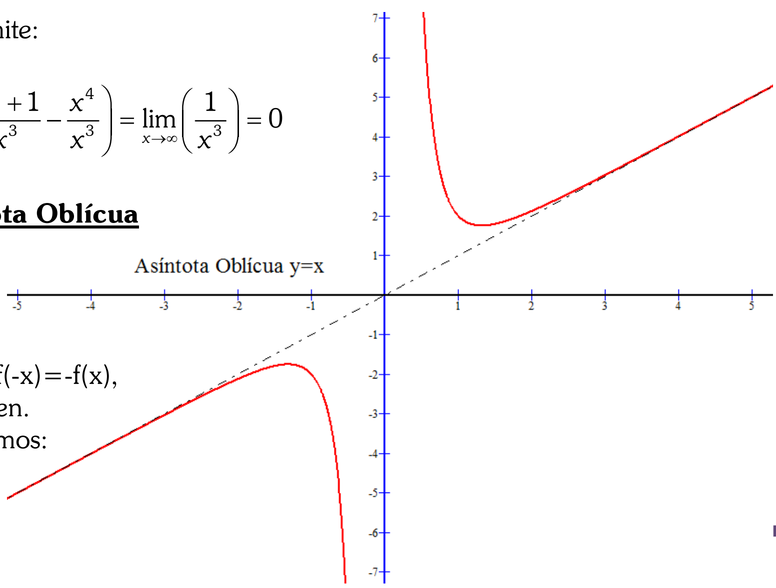
Estudiamos ahora el límite: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^4+1}{x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^4}=1$

Y como es finito, estudiamos este otro límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^3}-\frac{x^4}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$$

Por tanto la función presenta una **<u>Asíntota Oblícua</u>** en la dirección de la recta ***y=x.***

c) El esbozo sería:



Como podemos ver, la función es impar; f(-x)=-f(x), por tanto es simétrica con respecto al origen.
Así que solo nos faltaría calcular sus extremos:

Para ello derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3}{x^4} = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{3} = \pm 1,32$$

Por tanto:

	$(-\infty; -1,32)$	$(-1,32; 1,32)$	$(1,32; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

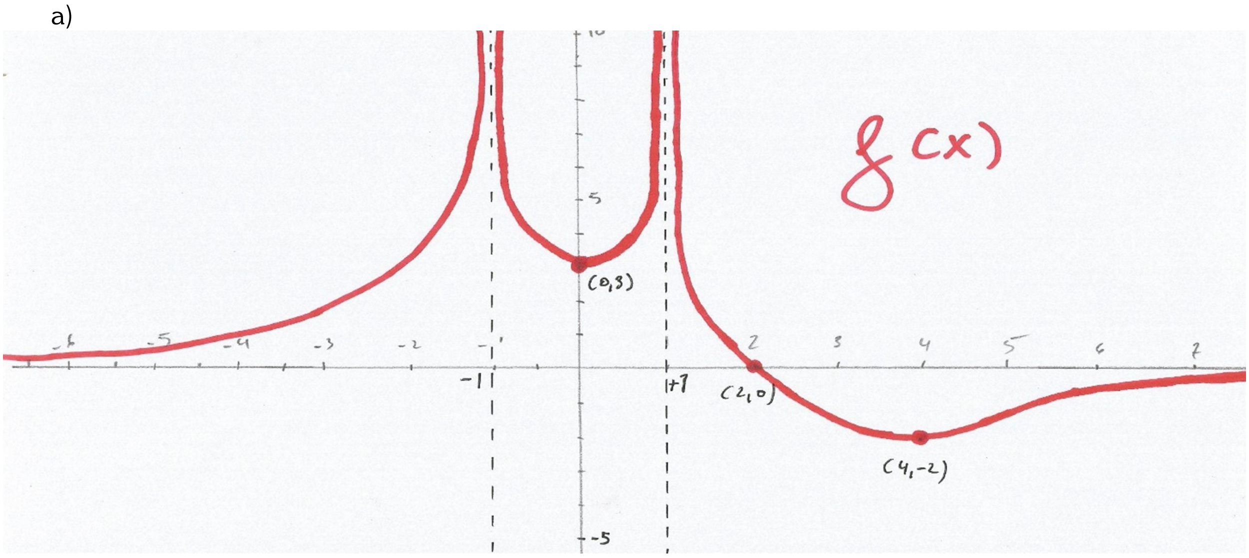
Y la función tiene un máximo relativo en el punto (-1,32;-1,75) y un mínimo relativo en el punto (1,32;1,75)

3.- *La función y=f(x) tiene las siguientes propiedades:*

I. ***Su dominio es la recta real excepto los puntos -1 y 1. Es continua en todo su dominio y corta al eje OX en el punto (2,0)***
II. ***Tiene una asíntota horizontal en y_H=0, con f(x)>0 si x<2 y f(x)<0 si x>2, y x≠±1.***
III. ***Tiene una asíntota vertical en x=1, con*** $\lim_{x\to+1^-} = +\infty$, $\lim_{x\to+1^+} = +\infty$
IV. ***Tiene una asíntota vertical en x=-1, con*** $\lim_{x\to-1^-} = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} = +\infty$
V. ***Tiene mínimos en (4,-2) y (0,3) y no tiene máximos.***

a) ***Representa dicha función.***
b) ***Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.***
c) ***Calcula el límite*** $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

a)



b) La función es creciente en (-∞,-1)U(0,1)U(4,+∞), mientras que es decreciente en (-1,0)U(1,4)

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-1-x^2}{1+x^2}}{3x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{3x^2\left(1+x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3\left(1+x^2\right)} = -\frac{1}{3}$$

4.- *Sea la función:*

$$f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & si\ x<0 \\ x^2 \cdot e^{-x} & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

a) *Calcula los límites en los infinitos.*
b) *Calcular el valor de a, para que f(x) sea continua en todo el conjunto de los números reales.*
c) *Estudiar la derivabilidad de la función y calcular f'(x) donde sea posible.*

a)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(a+\ln(1-x))=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

b) La función es una función a trozos, compuesta por dos ramas, una producto de exponencial por polinómica, siempre continua y la otra logarítmica también contínua en la semirecta real x<0. Por tanto, para que sea continua en toda la recta real, ha de ser contínua en el punto donde cambia de rama, es decir en el punto x=0.

Calculamos los límites laterales de la función x=0:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0}\left(a+\ln(1-x)\right)=a \qquad \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^x}=0$$

Por tanto para que f sea **continua** en todo $\mathbb{R}$, tiene que ocurrir que **a=0**.

c) La función es una función a trozos, compuesta por dos ramas, una producto de exponencial por polinómica, siempre continua y derivable y la otra logarítmica también contínua y derivable en la semirecta real x<0. Por tanto, para que sea derivable en toda la recta real, ha de ser derivable en el punto donde cambia de rama, es decir en el punto x=0, y para ello antes debe ser continua, por tanto a=0.

Calculamos las derivadas laterales en x=0 utilizando la definición de derivada:

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\ln(1-(0+h))-\frac{0^2}{e^0}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1-h)}{h}=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{h\to0^-}\frac{\frac{-1}{1-h}}{1}=-1$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{(0+h)^2}{e^{0+h}}-\frac{0^2}{e^0}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2}{e^h}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{he^h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{e^h}=0$$

Y como no coinciden, la función no es derivable en x=0, por tanto su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{1-x} & si\ x<0 \\ e^{-x}\left(2x-x^2\right) & si\ x>0 \end{cases}$$