1. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -1 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

   a) ¿Existe una solución del mismo en la que $y = 0$?

   b) Resolver el sistema homogéneo asociado al sistema dado.

   c) Hacer una interpretación geométrica tanto del sistema dado como de sus soluciones.

   Solución: Sí, $x = 3,\ y = 0,\ z = 2$. Para el segundo apartado $x = 2t,\ y = t,\ z = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} ax + by + 1 &= 0 \\ a'x + b'y + c &= 0 \end{aligned}$$

   se sabe que $x = 1,\ y = 2$ es una solución y que $x = 7,\ y = 3$ es otra solución. ¿Qué puede afirmarse respecto de las soluciones del sistema?, ¿cuántas tiene?, ¿cuáles son?

   Solución: El sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Las soluciones son $x = -11 + 6t$, $y = t$.

3. Considerar el sistema

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 3x - 4y - 2z &= -3 \end{aligned}$$

   a) Añadir una ecuación lineal al sistema anterior de modo que el sistema resultante sea incompatible.

   b) Si añadimos al sistema dado la ecuación $mx+y-z = -1$, determinar para qué valores del parámetro m el sistema resultante es compatible indeterminado y resolverlo.

   Solución: Para el segundo apartado es $m = -1$, y entonces $x = 1+6t$, $y = 1+5t$, $z = 1-t$.

4. En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

   - El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos y su precio es de $5'65$ €.
   - El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos y su precio es de $7'40$ €.

Con estos datos, ¿se podría averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso. Justifica la respuesta.

Solución: Sí, y su precio sería $2'15$ €.

5. Una tienda vende una clase de calcetines a 12 €. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30 % de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40 % también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 5976 €. y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total (de calcetines), ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado un descuento del 40 %?

Solución: 120 pares.

6. Determinar según los valores del parámetro α cuándo tiene solución el sistema

$$\begin{aligned} \alpha x + y + z &= \alpha^2 \\ \alpha x + (1-\alpha)y + (\alpha - 1)z &= \alpha^2 \\ \alpha x + y + \alpha z &= 2\alpha^2 \end{aligned}$$

Resolverlo cuándo sea compatible indeterminado.

Solución: Para $\alpha = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro y su solución es $x = t,\ y = z = 0,\ t \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ es un sistema de Cramer (solución única). En los demás casos es incompatible.

7. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ my + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= 1 + m \end{aligned}$$

   a) Estudiar su comportamiento según los valores del parámetro m.

   b) Resolverlo para $m = 2$.

Solución:

- $m = 1$, incompatible.
- $m = 0$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = t,\ y = 1 - t,\ z = 0$.
- $m \neq 0$ y $m \neq 1$, sistema de Cramer.

Para $m = 2$, resulta $x = 2$, $y = -1$, $z = 2$.

8. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro b

$$\begin{aligned} x + y + bz &= b^2 \\ -x + y + z &= -3 \\ bx + y + z &= 3b \end{aligned}$$

y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

- $b = 1$, incompatible.
- $b = -1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 2 + t,\ y = -1,\ z = t$.
- $b \neq 1$ y $b \neq -1$, sistema de Cramer (solución única).

9. Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A, B y C que un amigo suyo ha comprado:

- Pista 1: Si compro una unidad de A, dos de B y una de C me gasto 9€.
- Pista 2: Si compro m unidades de A, $m+3$ unidades de B y 3 de C me gasto $29'5$ €.

a) ¿Hay algún valor de m para el cual estas dos pistas no son compatibles?

b) Si en la Pista 2 se toma $m = 4$, ¿es posible saber el coste de cada uno de los productos?

c) El amigo le dice finalmente que el producto C vale 5 veces lo que vale el producto A y que en la Pista 2 se tiene $m = 4$. ¿Cuánto valen A, B y C?

Solución: Sí, cuando $m = 3$. No. Si es x, y, z el precio de los productos A, B, C respectivamente, entonces $x = 1$, $y = 1'5$, $z = 5$.

10. Se considera el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 5y + 4z &= -2 \\ x + 3y + m^2 z &= m \end{aligned}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

c) Razonar para qué valores de m tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

Solución:

- $m = 1$, incompatible.
- $m = -1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = -1 - 7t,\ y = 2t,\ z = t$.
- $m \neq 1$ y $m \neq -1$.

11. Se dice que dos matrices A y B son **semejantes** cuando existe una matriz invertible P tal que $AP = PB$.

a) Probar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son semejantes.

b) Resolver los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución:

a) En efecto, basta tomar $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) La solución del primer sistema es $x = 2t, y = t,\ t \in \mathbb{R}$ y la del segundo es $x = t, y = -t,\ t \in \mathbb{R}$.

12. Estudiar el siguiente sistema según los valores del parámetro k e interpreta geométricamente los resultados

$$\begin{aligned} 2x + 2y + (k+2)z &= -5 \\ x + y - 2z &= 5 \\ 3x + ky - 6z &= 5k \end{aligned}$$

- $k = -6$, sistema incompatible. Los tres planos no tienen ningún punto común.
- $k = 3$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Los tres planos contienen la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{5}{3} - t \\ z = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- $k \neq -6$ y $k \neq 3$, sistema de Cramer. Los tres planos tienen un punto común.

13. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \begin{cases} ax - y = 1 \\ -2x + (a-1)y = 2 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} 2x - y = 2 \\ ax - 2y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ x + 5y = a \end{cases}$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 2$, incompatible
  - $a = -1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = -1 - t, y = t$.
  - $a \neq 2 \wedge a \neq -1$, sistema de Cramer: $x = \frac{1}{a-2}, y = \frac{2}{a-2}$

- Problema b)
  - $a \neq 1$, incompatible
  - $a = 1$, sistema de Cramer: $x = 1, y = 0$

14. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2 y = 1 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} ax + y + 3z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 5x - 3y - 2z = 6 \end{cases}$$

<u>Solución</u>:

- Problema a)
  - $a = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 1 - t, y = t$.
  - $a \neq 1$, sistema de Cramer: $x = \frac{a^3+a^2+a+1}{a^2+a+1}, y = -\frac{a}{a^2+a+1}$
- Problema b)
  - $a = 3$, incompatible
  - $a \neq 3$, sistema de Cramer: $x = -\frac{9}{a-3}, y = -\frac{6a+9}{a-3}, z = \frac{6a}{a-3}$

15. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$$

<u>Solución</u>:

- Problema a)
  - $a = \frac{1}{5}$, incompatible
  - $a \neq \frac{1}{5}$, sistema de Cramer: $x = \frac{9}{5a-1}, y = \frac{2a-4}{5a-1}, z = \frac{6a-3}{5a-1}$
- Problema b)
  - $a = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 2t, y = -t, z = 3t$.
  - $a = -3$, incompatible
  - $a \neq 1 \wedge a \neq -3$, sistema de Cramer: $x = \frac{a-1}{a+3}, y = -\frac{5(a-1)}{2(a+3)}, z = -\frac{a-1}{a+3}$

16. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (a+1)x + y - az = a \\ x + (a+1)y = 2a \end{cases}$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 8$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 29 - 28t, y = -19 + 20t, z = t$.
  - $a \neq 8$, sistema de Cramer: $x = 29, y = -19, z = 0$
- Problema b)
  - $a = 0$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = t, y = -t, z = t$.
  - $a = -1$, incompatible
  - $a \neq 0 \wedge a \neq -1$, sistema de Cramer: $x = -\frac{1}{a+1}, y = \frac{2a^2+2a+1}{(a+1)^2}, z = -\frac{a^2+a+1}{(a+1)^2}$

17. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \left\{ \begin{aligned} 5x + 2y - z &= 9 \\ 2x - 4y + 8z &= a \\ x - 2y + 4z &= 2 \end{aligned} \right. \quad ; \quad \text{b)} \left\{ \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned} \right.$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 4$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = \frac{11-3t}{6}, y = \frac{21t-1}{12}, z = t$.
  - $a \neq 4$, incompatible
- Problema b)
  - $a = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de dos parámetros: $x = 1 - s - t, y = s, z = t$.
  - $a = -2$, incompatible
  - $a \neq 1 \wedge a \neq -2$, sistema de Cramer: $x = -\frac{a+1}{a+2}, y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$

18. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \left\{ \begin{aligned} x + ay + z &= a + 1 \\ (a+1)x + y - az &= 0 \\ 2x + y - z &= 1 - a \end{aligned} \right. \quad ; \quad \text{b)} \left\{ \begin{aligned} x - 2z &= 3 \\ 4x + y &= 5 \\ 2x + z &= a \\ 2x - 3z &= a \end{aligned} \right.$$

Solución:

- Problema a)

- $a = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 2(t-1), y = 4-3t, z = t$.
- $a = 2$, incompatible
- $a \neq 1 \wedge a \neq 2$, sistema de Cramer: $x = -\frac{a^2+a+2}{a-2}, y = \frac{3a+2}{a-2}, z = -\frac{a(a+2)}{a-2}$

- Problema b)
  - $a \neq 6$, incompatible
  - $a = 6$, sistema de Cramer: $x = 3, y = -7, z = 0$

19. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 3x - ay + 3z = 4 \\ ax + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ ax + 4y - z = 5 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)}\ \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + y - az = 3 \\ ax + 2y + (a+2)z = a^2 - 2 \end{cases}$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 2$, sistema de Cramer: $x = y = z = 1$
  - $a = -1$, incompatible
  - $a \neq 2 \wedge a \neq -1$, incompatible
- Problema b)
  - $a = 6$, sistema de Cramer: $x = 7, y = -4, z = 0$
  - $a = 1$, sistema de Cramer: $x = 7, y = -4, z = 0$
  - $a \neq 6 \wedge a \neq 1$, incompatible

20. Discutir y resolver en caso de compatibilidad el siguiente sistema según el valor del parámetro a:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 8 \\ ax - y - z &= 1 \\ x - y + z &= -2 \end{aligned}$$

Solución:

- $a = 2$, sistema de Cramer: $x = 1, y = 2, z = -1$
- $a \neq 2$, incompatible

21. Sea el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x - my &= 5 \end{aligned}$$

a) Hallar para qué valor de m es $x = 0$.

b) Hallar para qué valor de m es incompatible el sistema.

Solución: $m = -1$; $m = -2$

22. Sea el sistema:

$$x + y + z = a + 1$$
$$x + y + (a-1)z = a$$
$$x + ay + z = 1$$

a) ¿Para qué valores de a es compatible y determinado? Resolverlo para dichos valores.

b) ¿Para qué valores de a es indeterminado? Resolverlo para dichos valores.

c) ¿Es incompatible para algún valor de a?

Solución:

a) $a \neq 1 \wedge a \neq 2$. Las soluciones son:

$$x = \frac{a^3 - a^2 - 2a + 1}{(a-1)(a-2)}, y = -\frac{a}{a-1}, z = -\frac{1}{a-2}$$

b) Para ningún valor de a.

c) Para $a = 1$ y $a = 2$.

23. La suma de las tres cifras de un número es 16, y la suma de la primera y la tercera es igual a la segunda. Permutando entre sí dichas cifras (primera y tercera) resulta un número que supera en 198 unidades al número dado. ¿Cuál es dicho número?

Solución: 385

24. Varios amigos pagan en un bar 7'55 €. por 5 cervezas, 3 bocadillos y 2 cafés. Al día siguiente consumen 3 cervezas, 2 bocadillos y 4 cafés por lo que pagan 6'45 €.

a) Si al tercer día consumen 7 cervezas y 4 bocadillos, ¿qué precio deberían pagar por ello?

b) ¿Puede saberse de los datos anteriores el precio de una cerveza, o un bocadillo o un café? Si además sabemos que un café vale 0'6 €., ¿Puede saberse el precio de una cerveza o un bocadillo?

Solución:

a) 8'65 €.

b) No; Sí, 0'55 y 1'2 €. la cerveza y el bocadillo respectivamente.

25. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\lambda x + 2y = 3$$
$$-x + 2\lambda z = -1$$
$$3x - y - 7z = \lambda + 1$$

a) Hallar todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

b) Resolver el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.

c) Discutir el sistema para los restantes valores de λ.

Solución: $\lambda = 1$; para $\lambda = 1$ es $x = 1 + 2t,\ y = 1 - t,\ z = t$. Para $\lambda = -7$ el sistema es incompatible y si $\lambda \neq 1, -7$ el sistema es de Cramer.

26. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Hallar los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Tomando $\lambda = 1$, resolver el sistema escrito en forma matricial

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\lambda = 0, 1$; para $\lambda = 1$ es $x = t,\ y = -t,\ z = t$.

27. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$x + \lambda y + (\lambda - 1)z = 1$$
$$y + z = 1$$
$$2x + y - z = -3$$

a) Hallar todos los posibles valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones distintas.

b) Resolver el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.

c) Discutir el sistema para los restantes valores de λ.

Solución: solamente $\lambda = 3$; para $\lambda = 3$ es $x = -2 + t,\ y = 1 - t,\ z = t$. Para $\lambda \neq 3$ el sistema es incompatible.

28. Discutir y resolver el siguiente sistema según los valores del parámetro λ:

$$x + \lambda y + z = 0$$
$$\lambda x + y + z = 0$$
$$x + y + \lambda z = 0$$

Solución:

- $\lambda = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de 2 parámetros: $x = -s - t,\ y = s,\ z = t$, para todos $s, t \in \mathbb{R}$.
- $\lambda = -2$, compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro: $x = t,\ y = t,\ z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$, sistema de Cramer cuya solución es la trivial $x = y = z = 0$.

29. Consideremos el sistema escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro b y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

<u>Solución</u>:

- $b = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro: $x = -2,\ y = t,\ z = -t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $b = -1$, incompatible.
- $b \neq 1, -1$, sistema de Cramer.

30. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   a) Determinar el rango de A en función del parámetro a.

   b) Discutir en función de a el sistema, dado en forma matricial, $AX = B$

   c) Resolver $AX = B$ en los casos que sea compatible indeterminado.

<u>Solución</u>: $r(A) = \begin{cases} 2, & \text{si } a = 1, \frac{1}{2} \\ 3, & \text{en otro caso} \end{cases}$. Para $a = 1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro: $x = 1 - t,\ y = -2t,\ z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $a = \frac{1}{2}$ es incompatible y si $a \neq 1, \frac{1}{2}$ es un sistema de Cramer.

31. Consideremos el sistema:

$$mx + y - z = 1$$
$$x - my + z = 4$$
$$x + y + mz = m$$

Discutirlo según los valores de m. ¿Cuál es, según los valores de m, la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

<u>Solución</u>: Si $m = 0$, el sistema es incompatible: los tres planos no tienen ningún punto en común. Si $m \neq 0$, el sistema es de Cramer: los tres planos se cortan en un único punto.

32. Resolver el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial: $AX = -AX + B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución: $x = -\frac{9}{10}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{7}{10}$

33. Determinar a, b y c sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}, \quad \text{verifica:} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{rango}(A) = 2$$

Solución: $a = 1$, $b = \frac{23}{29}$, $c = \frac{33}{29}$

34. Clasificar el siguiente sistema según los valores del parámetro m

$$\begin{aligned} 2x + my &= 0 \\ x + mz &= m \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Resolver el sistema anterior para $m = 6$.

Solución: Para $m = 0$, sistema compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. Para $m = 5$, incompatible. Para $m \neq 0, 5$, sistema de Cramer. Cuando $m = 6$ es $x = -12$, $y = 4$, $z = 3$.

35. Un mayorista de café dispone de tres tipos base: Moka, Brasil y Colombia, para preparar tres tipos de mezcla: A, B y C, que envasa en sacos de 60 Kg., con los siguientes contenidos en kilos y precios del kilo en euros:

	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C
Moka	15	30	12
Brasil	30	10	18
Colombia	15	20	30
Precio (cada Kg.)	4	$4'5$	$4'7$

Suponiendo que el preparado de las mezclas no supone coste alguno, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos base de café?

Solución: Precio Moka = 4 euros, Precio Brasil = 3 euros, Precio Colombia = 6 euros.

36. **Selectividad Septiembre 2000**. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 1 \\ 4x + y - 2z &= 3 \\ 2x - 3y + az &= b \end{aligned}$$

a) Determinar a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Resolver el sistema resultante.

<u>Solución</u>: $a = \frac{44}{5}$, $b = 5$; $x = 1 - t,\ y = -1 + 14t,\ z = 5t$.

37. **Selectividad Junio 2002**. Determinar una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que

$$\det(A) = -7 \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

38. **Selectividad Septiembre 2003**. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcular los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

b) Resolver el sistema $A \cdot X = 3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de todas sus soluciones.

<u>Solución</u>: $\lambda = -3, 3$; $x = t,\ y = -2t,\ z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, una recta.

39. **Selectividad junio 2004**. Considerar el sistema de ecuaciones

$$mx - y = 1$$
$$x - my = 2m - 1$$

a) Clasificar el sistema según los valores de m.

b) Calcular los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$.

<u>Solución</u>: si $m = 1$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro; si $m = -1$ el sistema es incompatible. En los demás casos, es decir, si $m \neq -1, 1$ el sistema es de Cramer; $m = 1, -\frac{4}{3}$.

40. **Selectividad septiembre 2004**. Determinar a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones

$$x + 3y + z = 1$$
$$-x + y + 2z = -1$$
$$ax + by + z = 4$$

tiene al menos dos soluciones distintas.

<u>Solución</u>: si $a = 4$, $b = 8$.

41. **Selectividad septiembre 2004**.

   a) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a?

   b) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   <u>Solución</u>: $a = -5$; $\begin{cases} x = -2 - 8t \\ y = -2 - 7t \\ z = 3 + 10t \end{cases}$

42. **Selectividad junio 2005**. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ -lx + 3y + z &= -7 \\ x + 2y + (l+2)z &= -5 \end{aligned}$$

   a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro l.

   b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

   <u>Solución</u>: Para $l = -1$ el sistema es incompatible. Para $l = -2$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro (compatible indeterminado) y su solución es $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{array} \right\}$. Para $l \neq -1, -2$ el sistema es de Cramer (solución única).

43. **Selectividad septiembre 2005**. En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

   <u>Solución</u>: moneda.

44. **Selectividad junio 2006**. Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   <u>Solución</u>: $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{5}{4}$, $z = \frac{1}{2}$.

45. **Selectividad septiembre 2006**. Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} lx - y - z &= -1 \\ x + ly + z &= 4 \\ x + y + z &= l + 2 \end{aligned}$$

   a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro l.

   b) Resolver el sistema para $l = 2$.

Solución: Para $l = 1$ el sistema es incompatible. Para $l = -1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro (compatible indeterminado). Para $l \neq \pm 1$ el sistema es de Cramer (solución única). Cuando $l = 2$, es $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$.

46. **Selectividad junio 2007**.

   a) Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   b) Escribir en forma matricial el siguiente sistema y resolverlo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= -2 \\ x + z &= 3 \end{aligned}$$

Solución: $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $x = 3$, $y = -2$, $z = 0$.

47. **Selectividad septiembre 2007**. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}$$

   a) Resolverlo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

   b) Resolver el sistema que se obtiene para $a = -2$.

Solución: Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado, en concreto, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2} - t$, $z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $a = -2$, el sistema es de Cramer (solución única), $x = -\frac{4}{3}$, $y = 1$, $z = \frac{1}{3}$.

48. **Selectividad junio 2008**. Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo.

Solución: No; 80, 10 y 40 billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente.

49. **Selectividad junio 2008**. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$$

a) Hallar los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

b) Estudiar si el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

Solución: $m = 0, 1$; para $m = 0$ el sistema es incompatible (no tiene solución); para $m = 1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de dos parámetros (compatible indeterminado).

50. **Selectividad septiembre 2008**. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) Resolverlo para $a = 2$.

Solución: para $a = 1$ el sistema es incompatible; para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado, en concreto, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = 1 - t$, $y = 0$, $z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por último, para $a \neq 1, 2$, el sistema es de Cramer (solución única).

51. **Selectividad septiembre 2008**. Sabemos que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

tiene las mismas soluciones que el que resulta de añadirle la ecuación $ax + y + 7z = 7$.

a) Determinar el valor de a.

b) Calcular la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

Solución: $a = 8$; $x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, $z = -\frac{2}{5}$.

52. **Selectividad junio 2009**. Una empresa embasadora ha comprado un total de 1 500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40 500 euros. Calcular cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos ha comprado el 30 % de las cajas.

    Solución: 13 500 euros en el primer mercado, 15 000 en el segundo y 12 000 en el tercero.

53. **Selectividad septiembre 2009**. Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x + \lambda y &= 0 \\ x + \lambda z &= \lambda \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

    y resolverlo para $\lambda = 0$.

    Solución: para $\lambda = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = 0$, $y = 1 - 3t$, $z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $\lambda = 6$ es incompatible. Por último, para $\lambda \neq 0, 6$, el sistema es de Cramer (solución única).

54. **Selectividad junio 2010**. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z &= 2 \\ x - y + \lambda z &= \lambda \end{aligned}$$

    a) Discutirlo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?

    b) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

    Solución: Si $\lambda \neq -1$, el sistema es de Cramer (solución única). Para $\lambda = -1$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = \frac{1}{3}$, $y = t$, $z = \frac{4}{3} - t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

55. *a*) Discutir, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + z &= \lambda \\ \lambda x + 2y + (\lambda + 2)z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 6 - \lambda \end{aligned}$$

    b) Resolver el sistema anterior para $\lambda = 0$.

    Solución: para $\lambda = 8$ el sistema es incompatible. Para $\lambda = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = t$, $y = 2 - t$, $z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por último, para $\lambda \neq 0, 8$, el sistema es de Cramer (solución única).