Relación III

1.- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=(x-1)e^x$

Sol: f(x) es decreciente en $]-\infty,0]$ es creciente en $[0,+\infty[$

2.- Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. Estudiar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos.

Sol: f(x) es decreciente en $[0,1[\cup]1,2]$ es creciente en $]-\infty,0]U[2,+\infty[$ Máximo Relativo (0,0) Mínimo Relativo (2,4).

3.- Encontrar las funciones polinómicas de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cuya segunda derivada sea x-1.
¿Cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4,\dfrac{-1}{3}\right)$.

Sol: a=1/6; b=-1/2; c=-4; d=13

4.- Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, Hallar los coeficientes a,b,c,d sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1,0) es y=-3x+3 y que la función presenta un extremo en el punto de abscisa x=0.

Sol: a=1; b=-3; c=0; d=2

5.- Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Hallar los coeficientes a,b,c,d, sabiendo que la función tiene un máximo en (0,3) un mínimo en x=2 y un punto de inflexión en (1,1).

Sol: a=1; b=-3; c=0; d=3

6.- Dada la función definida en $]0,+\infty[$ $f(x)=\sqrt[x]{x}$, hallar sus máximos y mínimos.

Sol: máximo Absoluto en el punto $\left(e,e^{\frac{1}{e}}\right)$

7.- Estudiar la monotonía y la curvatura de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Sol: decreciente en $[e,+\infty[$ es creciente en $]0,e]$ f presenta un máximo Absoluto en el punto $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$ y un punto de inflexión en el punto $\left(e^{\frac{3}{2}},\dfrac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$

8.- Estudiar la concavidad de la función: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

Sol: puntos de inflexión en $\left(-1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ y en $\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$

9.- Consideremos la función la función $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$

a) Determina sus máximos, mínimos y puntos de inflexión
b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Sol: Siempre creciente, puntos de inflexión en los puntos de abscisas x=-1 y x=1.

10.- Calcula los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-senx}{x+sen3x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot senx}{x^2}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-senx}=2$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{senx}-\dfrac{1}{x}\right)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{\cos x-senx+x-1}=-2$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}tgx\cdot\ln x=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{6}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{senx}-x-1}{2x^2-x^3}=\dfrac{1}{4}$ $\quad\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e}{e^x-e}-\dfrac{1}{x-1}\right)=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}=2\pi^2$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)^2}{e^{x^2}-1}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{sen^2x}=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x\cos x-1}{senx-x+1-\cos x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}x^{senx}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{sen^2x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\dfrac{\sqrt{e}}{e}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\dfrac{1}{6}$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}=e$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}(3^{-x}-x)=-\infty$

11.- Sea la función $f(x)=-2x+ae^{-x}+bx-1$

a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en x= 0 y que la gráfica de la función pasa por el punto (0, 0).

b) Para = 0 y =1, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x=–1.

Sol: a) a=b=1; b=5=-5x-5

12.- Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x-\alpha senx}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

Sol: α=1; limite = 0

13.- Determinar una recta tangente a la parábola $y= 2-x^2$ que sea paralela a la recta de ecuación $2x+y = 4$.

Sol: 2x+y=3

14.- Dada la función $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$,

a) Da sus intervalos de monotonía y los extremos relativos.
b) Da los intervalos de concavidad-convexidad y sus puntos de inflexión.
c) Escribe la ecuación de la recta tangente en el punto donde se anula la derivada segunda de f.

Sol: a) Crec (-∞,0), decrec (0,+∞) max en x=0; b) P.I. en x=-1; U en (-∞,-1) y ∩ en (-1,+∞); c) en x=1; y=(3-x)/e

15.- Determinar en qué puntos es negativa la derivada de la función $f(x) = e^x \cdot x^{-2}$

Sol: En (0,2).

16.- De la función $f: R \to R$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo en x=-1, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa x=-2 y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x = 0. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene pendiente 9.

Sol: a=1; b=0; c=-3; d=5.

17.- Sea la función $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida por $f(x)=e^x\cdot(x^2-x+1)$

a) Calcula $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$
b) Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.
c) Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Sol: a) 0 y +∞; b) Max en x=-1; y min en x=0; c) $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

18.- Sea $f:(-\infty,1)\to R$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2\cdot e^{-x} & si\ \ x\le 0 \\ a\cdot\sqrt{b-x} & si\ \ 0<x<1\end{cases}$

a) Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.
b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

Sol: a) a=2√2; b=1/2; b) y_t=2-2x; y_n=(x+4)/2.

19.- Considera la función $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x+5-2\cdot senx$. Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Sol: $(\pi/3, 5\pi/3);(0,\pi/3)U(5\pi/3,2\pi)$

20.- Considera la función $f(x)=ax+\frac{1}{x}$. Determina los valores del parámetro a para los cuales la función es decreciente en el punto de abscisa x=2.

Sol: a<1/4

21.- Halla los puntos de la curva $f(x)=\frac{4}{x}$ en donde la tangente es perpendicular a la recta y=x.

Sol: (-2,-2) y (2,2)

22.- ¿En qué punto de la curva $y=x^3-3x$ la recta $y=x-4$ es tangente a ella?

Sol: (2,-2)

23.- Sea la función $f(x)=-2x^3+a\cdot e^{-x}+bx-1$

a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en x=0 y que la gráfica de la función pasa por el punto (0,0)
b) Para a=0 y b=1, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x=-1.

Sol: a) a=1; b=1; b) y=-5x-5

24.- El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora t, mediante la función $S(t)=660-231t+27t^2-t^3$ con $6\le t\le 12$.

a) ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?
b) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?

Sol: a) 30% al inicio; 48% al cierre; b) el máximo de audiencia es del 55% y se alcanza a las 11 horas.
El mínimo de audiencia es del 23% y se alcanza a las 7 horas.

25.- Halla dos números cuya suma es 20, sabiendo que su producto es máximo.

Sol.: 10,10

26.- Determina dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto del uno por el cubo del otro sea máximo.

Sol.: 18,6

27.- Descompón 100 en dos sumandos tales que el cuádruplo del primero más el cuadrado del segundo sea mínimo.

Sol.:98, 2

28.- Halla la altura del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una superficie esférica de radio R.

Sol.: x=4R/3

29.- Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 8 euros/m y la de los otros 1 €/m, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 2.880 euros.

Sol.:115.200m^2

30.- Un jardinero ha de construir un parterre en forma de sector circular con perímetro de 20 m. ¿Cuál será el radio que da el parterre de área máxima? ¿Cuál será la amplitud en radianes del sector?.

Sol: x = 5 m. y = 2 rad.

31.- De todos los triángulos isósceles de perímetro 12 cm, halla las dimensiones de los lados del que tenga área máxima.

Sol.:4,4,4.

32.- Dividir un segmento de 60 cm en dos partes, con la propiedad de que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas sea mínima.

Sol.: 30cm y 30 cm.

33.- Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 12 cm, calcula las dimensiones del que tenga área máxima. Razona el proceso.

Sol.: cuadrado.

34.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Sol.: base = 5 cm, altura = 10 cm.

35.- Determina la distancia mínima del origen a la curva xy=1.

Sol.(1,1), (-1,-1)

36.- Dadas las funciones $f(x)=x^2+\pi$ y $g(x)=senx+cosx$, calcula la derivada en $x=0$ de las funciones $a) f\circ g$ y $b) g\circ f$

Sol: a) 0; b) 1.

40.- Hallar la derivada en $x = 0$ de la función $f(f(x))$, donde $f(x)=(1+x)^{-1}$.

Sol: 1/4

41.- Enunciar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. Usarlo para demostrar que para cualesquiera números reales $x < y$ se verifica que $cosy - cosx \leq y - x$.

42.- Dada la función $f(x)=\dfrac{senx+sen(x+1)}{\cos x-\cos(x+1)}$ en el intervalo $0<x<2\pi$, calcula su derivada, simplificándola en lo posible. A raíz de los resultados obtenidos, ¿podemos afirmar que $f(x)$ es una función constante?

Sol: f'(x)=0. Si.

43.- a) Enuncia la regla de la cadena para derivar funciones compuestas. **b)** Dada la función $h(x)=e^{sen[f(x)]}$, calcula el valor de su derivada en $x = 0$, sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Sol: h'(0)=1

44.- Determina los puntos de la parábola $y=x^2$ que están a mínima distancia del punto $P=(0,1)$.

Sol: $P_1=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right); P_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$

45.- Prueba que la función $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ satisface las hipótesis en el intervalo $[-1, 1]$ y calcula un punto del intervalo abierto $(-1, 1)$ cuya existencia asegura el Teorema de Rolle.

Sol: x=1/3

46.- a) Diga cuando un punto $(x_0, f(x_0))$ es de inflexión para una función $f(x)$. **b)** Calcule los coeficientes a y b del polinomio $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$ para que su gráfica pase por el punto (1, 1), teniendo aquí un punto de inflexión. **c)** Diga, razonadamente, si en el punto (1, 1) la función $p(x)$ es creciente o decreciente.

Sol: b) a=1; b=2; c) Decreciente

47.- Calcule los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^2 + \cos x$ en el intervalo $0 < x < 2\pi$.

Sol: Máximo en $\pi/6$ y mínimo en $5\pi/6$.

48.- Aplique el Teorema de Rolle para probar que, cualquiera que sea el valor del número real a, la ecuación $x^3-12x+a=0$ no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

49.- Calcule, y simplifique en lo posible, la derivada de la función $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$, $0 < x < \pi$.

Sol: f'(x)=2·cosec(x)

50.- Calcula, razonando la respuesta, el valor de c para que la función $f(x)=\begin{cases} c & si\ x=0 \\ \dfrac{e^x-1-x}{x^2} & si\ x\neq 0\end{cases}$ sea continua.

Sol: c=1/2