4 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El último Catón

El calor era infernal, apenas quedaba aire y ya casi no veía, y no sólo por las gotas de sudor que me caían en los ojos, sino porque estaba desfallecida. Notaba un dulce sopor, un sueño ardiente que se apoderaba de mí, dejándome sin fuerza. El suelo, aquella fría plancha de hierro que nos había recibido al llegar, era un lago de fuego que deslumbraba. Todo tenía un resplandor anaranjado y rojizo, incluso nosotros. […]

Pero, entonces, lo comprendí. ¡Era tan fácil! Me bastó echar una última mirada a las manos que Farag y yo teníamos entrelazadas: en aquel amasijo, húmedo por el sudor y brillante por la luz, los dedos se habían multiplicado… A mi cabeza volvió, como en un sueño, un juego infantil, un truco que mi hermano Cesare me había enseñado cuando era pequeña para no tener que aprender de memoria las tablas de multiplicar. Para la tabla del nueve, me había explicado Cesare, sólo había que extender las dos manos, contar desde el dedo meñique de la mano izquierda hasta llegar al número multiplicador y doblar ese dedo. La cantidad de dedos que quedaba a la izquierda, era la primera cifra del resultado, y la que quedaba a la derecha, la segunda.

Me desasí del apretón de Farag, que no abrió los ojos, y regresé frente al ángel. Por un momento creí que perdería el equilibrio, pero me sostuvo la esperanza. ¡No eran seis y tres los eslabones que había que dejar colgando! Eran sesenta y tres. Pero sesenta y tres no era una combinación que pudiera marcarse en aquella caja fuerte. Sesenta y tres era el producto, el resultado de multiplicar otros dos números, como en el truco de Cesare, ¡y eran tan fáciles de adivinar!: ¡los números de Dante, el nueve y el siete! Nueve por siete, sesenta y tres; siete por nueve, sesenta y tres, seis y tres. No había más posibilidades. Solté un grito de alegría y empecé a tirar de las cadenas. Es cierto que desvariaba, que mi mente sufría de una euforia que no era otra cosa que el resultado de la falta de oxígeno. Pero aquella euforia me había proporcionado la solución: ¡Siete y nueve! O nueve y siete, que fue la clave que funcionó. […] La losa con la figura del ángel se hundió lentamente en la tierra, dejando a la vista un nuevo y fresco corredor.

MATILDE ASENSI

Justifica algebraicamente por qué funciona el *truco* para la tabla de multiplicar por 9 y demuestra que no existe un *truco* parecido para multiplicar por un número distinto de 9.

En la tabla del nueve, a medida que vamos multiplicando por un número mayor, sumamos una unidad en las decenas y restamos otra unidad en las unidades:

$$9 \cdot n = n(10 - 1) = 10n - n$$

Por este motivo funciona el *truco*.

En las tablas de multiplicar, desde la tabla del uno hasta la tabla del ocho, a medida que vamos multiplicando por un número mayor no siempre sumamos una unidad en las decenas.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados.

a) El doble de un número menos 9.
b) La tercera parte de un número más 8.
c) El cuadrado del triple de un número.
d) El triple del doble de un número.
e) La cuarta parte de un número más 6.

a) $2x - 9$
b) $\frac{x}{3} + 8$
c) $(3x)^2$
d) $3 \cdot 2x$
e) $\frac{x}{4} + 6$

002 Clasifica estas igualdades algebraicas.

a) $\left(x^2 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) = x\left(\frac{7}{2}x\right)$
b) $\left(x - 6x + \frac{1}{2}x\right) = 2x - 3$

a) $x = 0 \rightarrow \left(0^2 + 3 \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right) = 0 \cdot \left(\frac{7}{2} \cdot 0\right)$

$x = 3 \rightarrow \left(3^2 + 3 \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 3^2\right) = 3 \cdot \left(\frac{7}{2} \cdot 3\right)$

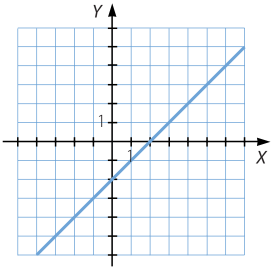
La expresión corresponde a una identidad.

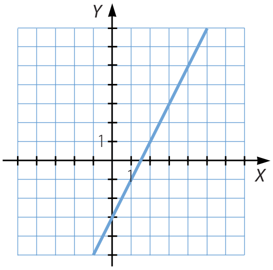
b) $x = 0 \rightarrow \left(0 - 6 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2\right) \neq 2 \cdot 0 - 3$

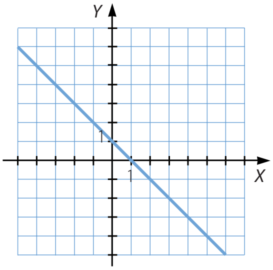
La expresión es una ecuación.

003 Representa estas rectas.

a) $y = x - 2$
b) $y = -x + 1$
c) $2x - y = 3$

a)


c)


b)


004 **Indica los elementos de esta ecuación: $(x + 2) \cdot (x - 5) + 2 = 7 - x^2$**

Términos: x^2; $-3x$; -8; 7; $-x^2$

Primer miembro: $(x + 2) \cdot (x - 5) + 2$

Multiplicando el primer miembro: $x^2 - 3x - 8$

Segundo miembro: $7 - x^2$

Incógnita: x

Grado: 2

Soluciones: $x_1 = -2{,}09$; $x_2 = 3{,}59$

005 **¿Cuáles de los siguientes valores son soluciones de la ecuación $\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5-x}{2}$?**

a) $x = 1$

b) $x = 5$

c) $x = -2$

d) $x = 2$

La solución de la ecuación es la del apartado d), $x = 2$.

006 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{x}{2}$

b) $\dfrac{3(x-2)}{2} - (2x-1) = 0$

c) $\dfrac{4(x-3)}{2} - \dfrac{5(x+8)}{6} = 6(x+3) - 2$

d) $3\left(x - \dfrac{2}{3}\right) + 4(2x-1) = \dfrac{x+4}{7} - 2(x+4)$

a) $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{x}{2} \rightarrow 28x - 14 - 6x + 6 = 21x \rightarrow x = 8$

b) $\dfrac{3(x-2)}{2} - (2x-1) = 0 \rightarrow 3x - 6 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x = -4$

c) $\dfrac{4(x-3)}{2} - \dfrac{5(x+8)}{6} = 6(x+3) - 2 \rightarrow 12x - 36 - 5x - 40 =$
$= 36x + 108 - 12 \rightarrow x = -\dfrac{172}{29}$

d) $3\left(x - \dfrac{2}{3}\right) + 4(2x-1) = \dfrac{x+4}{7} - 2(x+4) \rightarrow 21x - 14 + 56x - 28 =$
$= x + 4 - 14x - 56 \rightarrow x = -\dfrac{1}{9}$

ACTIVIDADES

001 Clasifica y resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$
b) $3x^2 + 20x + 12 = 0$
c) $3x^2 + 9x - 4 = 0$
d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
e) $-2x^2 + 5x - 8 = 0$
f) $3x^2 - 18x = 0$
g) $4x^2 - 36 = 0$
h) $-8x^2 + 40 = 0$
i) $-5x^2 + 30x = 0$
j) $3x^2 = 2x^2$

a) Ecuación completa:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1}$$

$$\rightarrow x = \frac{10 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) Ecuación completa:

$$3x^2 + 20x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3}$$

$$\rightarrow x = \frac{-20 \pm 16}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3} \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

c) Ecuación completa:

$$3x^2 + 9x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3}$$

$$\rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-9 + \sqrt{129}}{6} = 0{,}39 \\ x_2 = \dfrac{-9 - \sqrt{129}}{6} = -3{,}39 \end{cases}$$

d) Ecuación completa:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$$

$$\rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

e) Ecuación completa:

$$-2x^2 + 5x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)} \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{-39}}{-4}$$

No tiene soluciones reales.

f) Ecuación incompleta: $3x^2 - 18x = 0 \rightarrow 3x(x - 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 6$

g) Ecuación incompleta: $4x^2 - 36 = 0 \rightarrow x = \sqrt{9} \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3$

h) Ecuación incompleta: $-8x^2 + 40 = 0 \rightarrow x = \sqrt{5}$

i) Ecuación incompleta: $-5x^2 + 30x = 0 \rightarrow 5x(-x + 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 6$

j) Ecuación incompleta: $3x^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

002 Resuelve estas ecuaciones.

a) $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0$
b) $(2 - x)(5x + 1) - (3 + x)(x - 1) + 8x^2 - 15x + 3 = 0$
c) $(x + 2)(x - 3) - x(2x + 1) + 6x = 0$
d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) - 2 = 3x(x + 4)$
e) $(2 - x)(2x + 2) - 4(x - 3) - 5x = 0$

a) $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 33 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-33)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 20}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{11}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) $(2 - x)(5x + 1) - (3 + x)(x - 1) + 8x^2 - 15x + 3 = 0$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4} = 2$$

c) $(x + 2)(x - 3) - x(2x + 1) + 6x = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No tiene solución real.

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) - 2 = 3x(x + 4)$

$0 = 0 \rightarrow$ No es una ecuación, es una identidad.

e) $(2 - x)(2x + 2) - 4(x - 3) - 5x = 0 \rightarrow -2x^2 - 7x + 16 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 16}}{2 \cdot (-2)} = \frac{7 \pm \sqrt{177}}{-4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{177}}{4} = 1{,}58 \\ x_2 = \dfrac{-7 - \sqrt{177}}{4} = -5{,}08 \end{cases}$$

003 Determina, sin resolver la ecuación, el número de soluciones que tiene.

a) $-2x^2 + 5x - 8 = 0$
b) $9x^2 + 30x + 25 = 0$
c) $-5x^2 + 9x - 6 = 0$
d) $2x^2 - x - 3 = 0$
e) $-x^2 + 9x - 2 = 0$
f) $0{,}34x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$

Calculamos el discriminante:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = -39 < 0$. No tiene solución real.
b) $\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 0$. Tiene una solución.
c) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-6) = -39 < 0$. No tiene solución real.
d) $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0$. Tiene dos soluciones.
e) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 73 > 0$. Tiene dos soluciones.
f) $\Delta = b^2 - 4ac = 0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}34 \cdot (-1) = 1{,}61 > 0$. Tiene dos soluciones.

004 ¿Cuántas soluciones pueden tener estas ecuaciones bicuadradas? Resuélvelas.

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

b) $x^2(x^2 - 1) = 16(x^2 - 1)$

c) $25x^2(x^2 - 1) + 11(x^4 + 1) - 7 = 0$

Como las ecuaciones son de cuarto grado, pueden tener un máximo de cuatro soluciones.

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 4z^2 - 37z + 9 = 0$

$$z = \frac{-(-37) \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{37 \pm 35}{8} \to \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$z_1 = 9 \quad \to x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

$z_2 = \frac{1}{4} \to x_3 = -\frac{1}{2} \qquad x_4 = \frac{1}{2}$

b) $x^2(x^2 - 1) = 16(x^2 - 1) \to x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 17z + 16 = 0$

$$z = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 15}{2} \to \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 16 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \quad \to x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$

$z_2 = 16 \to x_3 = -4 \qquad x_4 = 4$

c) $25x^2(x^2 - 1) + 11(x^4 + 1) - 7 = 0$

$\to 36x^4 - 25x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 36z^2 - 25z + 4 = 0$

$$z = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 4}}{2 \cdot 36} = \frac{25 \pm 7}{72} \to \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{4} \\ z_2 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

$z_1 = \frac{1}{4} \to x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{2}$

$z_2 = \frac{4}{9} \to x_3 = -\frac{2}{3} \qquad x_4 = \frac{2}{3}$

005 Halla la solución de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+7}{x+1}$

b) $\frac{4}{x^4} + \frac{3 - x^2}{x^2} = 0$

a) $x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+7}{x+1} \to x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \to \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

b) $\frac{4}{x^4} + \frac{3 - x^2}{x^2} = 0 \to -x^4 + 3x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} -z^2 + 3z + 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \to \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$z_1 = -1 \to$ No tiene solución real.

$z_2 = 4 \to x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

006 Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6$

b) $x^2-\sqrt{3x^2-2}=4$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=\sqrt{8x+4}$

d) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}+5=0$

a) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6 \rightarrow 2x-1=x+4-12\sqrt{x+4}+36$

$\rightarrow (x-41)^2=(-12\sqrt{x+4})^2 \rightarrow x^2-226x+1.105=0$

$$x=\frac{-(-226)\pm\sqrt{(-226)^2-4\cdot 1\cdot 1.105}}{2\cdot 1}=\frac{226\pm 216}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=5\\ x_2=221\end{cases}$$

La solución es $x=5$.

b) $x^2-\sqrt{3x^2-2}=4 \rightarrow x^4-8x^2+16=3x^2-2 \rightarrow x^4-11x^2+18=0$

$\xrightarrow{z=x^2} z^2-11z+18=0$

$$z=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 1\cdot 18}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm 7}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=9\\ z_2=2\end{cases}$$

$z_1=9 \rightarrow x_1=-3 \qquad x_2=3$

$z_2=2 \rightarrow x_3=\sqrt{2} \qquad x_4=-\sqrt{2}$

Las soluciones son $x_1=-3$ y $x_2=3$.

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=\sqrt{8x+4} \rightarrow x+2\sqrt{x^2+12x}+x+12=8x+4$

$\rightarrow 4x^2+48x=36x^2-96x+64 \rightarrow 2x^2-9x+4=0$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 2\cdot 4}}{2\cdot 2}=\frac{9\pm 7}{4}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=4\end{cases}$$

La solución es $x=4$.

d) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}+5=0 \rightarrow (2\sqrt{x+1})^2=(3\sqrt{4x-3}-5)^2$

$\rightarrow (6-32x)^2=(-30\sqrt{4x-3})^2 \rightarrow 64x^2-249x+171=0$

$$x=\frac{-(-249)\pm\sqrt{(-249)^2-4\cdot 64\cdot 171}}{2\cdot 64}=\frac{249\pm 135}{256}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{57}{64}\\ x_2=3\end{cases}$$

La solución es $x=3$.

007 Estas ecuaciones aparecen factorizadas. Encuentra su solución.

a) $3(x-1)(x+2)(x-4)=0$

b) $x(x-2)(x+3)(x-12)=0$

c) $(2x-1)(4x+3)(x-2)=0$

d) $2x^2(x-3)^2(3x+4)=0$

e) $5x(x-1)^2(2x+7)^3=0$

a) $x_1=1 \qquad x_2=-2 \qquad x_3=4$

b) $x_1=0 \qquad x_2=2 \qquad x_3=-3 \qquad x_4=12$

c) $x_1=\dfrac{1}{2} \qquad x_2=-\dfrac{3}{4} \qquad x_3=2$

d) $x_1=0 \qquad x_2=3 \qquad x_3=-\dfrac{4}{3}$

e) $x_1=0 \qquad x_2=1 \qquad x_3=-\dfrac{7}{2}$

008 **Factoriza las ecuaciones y resuélvelas.**

a) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$

b) $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

c) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 16 = 0$

a) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+4) = 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -4$

b) $x(x-3)^2(x^2+1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

c) $(x+4)^2(x^2+1) = 0$

$x = -4$

009 **Escribe una ecuación que tenga como soluciones: $x = 3$, $x = 2$ y $x = -7$. ¿Cuál es el mínimo grado que puede tener?**

Respuesta abierta.

$(x-3)(x-2)(x+7) = 0$

El mínimo grado que puede tener es 3.

010 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} 4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = -6 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 5p + 2q = 1 \\ 15p - 10q = 11 \end{array}\right\}$

Escoge el método que consideres más adecuado.

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = -6 \end{array}\right\} \rightarrow x = -\frac{3y}{2}$$

$$6 \cdot \frac{-3y}{2} - 9y = -6 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{-3 \cdot \frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

b) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\left.\begin{array}{r} 5p + 2q = 1 \\ 15p - 10q = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left.\begin{array}{r} -15p - 6q = -3 \\ 15p - 10q = 11 \end{array}\right\}$$

Sumamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -15p - 6q = -3 \\ 15p - 10q = 11 \\ \hline -16q = 8 \end{array} \rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$5p + 2 \cdot \frac{-1}{2} = 1 \rightarrow p = \frac{2}{5}$$

011 **Halla las soluciones de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r}3(2x+y-1)-6(4x-y)=15\\ -x+y+3(x-2y+6)=4\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-5}{3}+\dfrac{2y-1}{5}=2\\ 3(2-x)+4(y+1)=36\end{array}\right\}$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r}3(2x+y-1)-6(4x-y)=15\\ -x+y+3(x-2y+6)=4\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x+y=2\\ 2x-5y=-14\end{array}\right\}$$

Resolvemos por reducción:

$$\begin{array}{r}-2x+\ \ y=2\\ 2x-5y=-14\\ \hline -4y=-12\rightarrow y=3\end{array}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$-2x+3=2\rightarrow x=\frac{1}{2}$$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-5}{3}+\dfrac{2y-1}{5}=2\\ 3(2-x)+4(y+1)=36\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}5x+6y=58\\ -3x+4y=26\end{array}\right\}$

Resolvemos por reducción:

$$\left.\begin{array}{r}5x+6y=58\\ -3x+4y=26\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 3}\\ \xrightarrow{\cdot 5}\end{array}\begin{array}{r}15x+18y=174\\ -15x+20y=130\\ \hline 38y=304\rightarrow y=8\end{array}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$5x+6\cdot 8=58\rightarrow x=2$$

012 **Clasifica estos sistemas de ecuaciones, y resuélvelos por el método más adecuado.**

a) $\left.\begin{array}{r}8x-2y=4\\ -12x+3y=-6\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}p+2q=1\\ 3p-\ \ q=11\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}8x-2y=4\\ -12x+3y=-6\end{array}\right\}\rightarrow y=4x-2$

Sistema compatible indeterminado: $y=4x-2$.

b) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\left.\begin{array}{r}p+2q=1\\ 3p-q=11\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-3)}\begin{array}{r}-3p-6q=-3\\ 3p-\ \ q=\ \ 11\\ \hline -7q=\ \ 8\rightarrow q=-\dfrac{8}{7}\end{array}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$p-\frac{16}{7}=1\rightarrow p=\frac{23}{7}$$

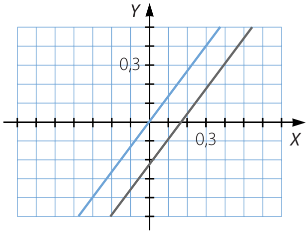
Sistema compatible determinado.

013 Decide de qué tipo son estos sistemas de ecuaciones, y representa gráficamente su solución.

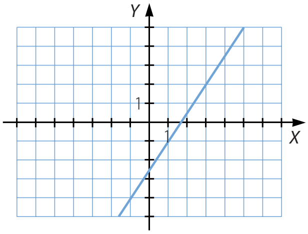
a) $\left.\begin{array}{r} -12x + 9y = -2 \\ 8x - 6y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 21a - 14b = 35 \\ -12a + 8b = -20 \end{array}\right\}$

a) Sistema incompatible.



b) Sistema compatible determinado.



014 Expresa en forma de ecuación.

a) La diferencia de dos números es 10.
b) El doble de la suma de dos números es 36.
c) La suma de dos números es igual a su producto.

a) $x - y = 10$ b) $2(x + y) = 36$ c) $x + y = x \cdot y$

015 La suma de las edades de Fernando y su padre es 40 años. Además, la edad del padre es 7 veces la edad del hijo. ¿Qué edades tienen ambos?

Llamamos x a la edad de Fernando e y a la de su padre.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 40 \\ y = 7x \end{array}\right\} \rightarrow x + 7x = 40 \rightarrow x = 5, y = 35$$

Fernando tiene 5 años y su padre, 35 años.

016 Un alumno realiza un examen de diez preguntas. Por cada acierto le dan 2 puntos, y por cada fallo le quitan 1 punto. Si la calificación final fue de 8 puntos, ¿cuántos aciertos y fallos tuvo?

Llamamos x al número de aciertos e y al de fallos.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ 2x - y = 8 \end{array}\right\} \rightarrow x = 10 - y$$

$$2(10 - y) - y = 8 \rightarrow 20 - 2y - y = 8 \rightarrow y = 4, x = 6$$

Tuvo 6 aciertos y 4 fallos.

017 En un hotel de 120 habitaciones hay habitaciones dobles e individuales. Si el número de camas es 195, ¿cuántas habitaciones son de cada tipo?

Llamamos x al número de habitaciones dobles e y al de individuales.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ 2x + y = 195 \end{array}\right\} \rightarrow x = 120 - y$$

$$2(120 - y) + y = 195 \rightarrow 240 - 2y + y = 195 \rightarrow y = 45, x = 75$$

Son 75 habitaciones dobles y 45 Individuales.

018 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 3x + 2y &= 19 \\ 2x + 3y &= 16 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 5y - 6z &= 0 \\ 3x + 4y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 3x + 2y &= 19 \\ 2x + 3y &= 16 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[E_3=E_3-2E_1]{E_2=E_2-3E_1} \left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 5y &= 10 \\ 5y &= 10 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 2 \end{aligned}$

b) $\left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 2x+5y-6z&=0 \\ 3x+4y+z&=0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[E_3=E_3-3E_1]{E_2=E_2-2E_1} \left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 3y-10z&=0 \\ y-5z&=0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3=-3E_3+E_2} \left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 3y-10z&=0 \\ 5z&=0 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=0 \\ y&=0 \\ z&=0 \end{aligned}\right.$

019 Resuelve los sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 3x - y &= 1 \\ 5x + 7y - 3z &= 3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - y - 2z &= 8 \\ 2x + y - 3z &= 11 \\ x + 2y + 3z &= 5 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ 3x-y&=1 \\ 5x+7y-3z&=3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3=E_3+3E_1} \left.\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ 3x-y&=1 \\ 8x+10y&=9 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3=E_3+10E_2} \left.\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ 3x-y&=1 \\ 38x&=19 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{2} \\ y&=\frac{1}{2} \\ z&=1 \end{aligned}\right.$

b) $\left.\begin{aligned} x-y-2z&=8 \\ 2x+y-3z&=11 \\ x+2y+3z&=5 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[E_3=E_3-E_1]{E_2=E_2-2E_1} \left.\begin{aligned} x+y-2z&=8 \\ 3y+z&=-5 \\ 3y+5z&=-3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3=E_3-E_2} \left.\begin{aligned} x+y-2z&=8 \\ 3y+z&=-5 \\ 4z&=2 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=\frac{43}{6} \\ y&=-\frac{11}{6} \\ z&=\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$

020 Resuelve los sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 202 \\ x + y &= 20 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x^2 + xy &= 24 \\ x + 2y &= 13 \end{aligned}\right\}$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 202 \\ x + y &= 20 \end{aligned}\right\} \to x = 20 - y$

$(20 - y)^2 + y^2 = 202 \to y^2 - 20y + 99 = 0 \to \left\{\begin{aligned} y_1 &= 11 \\ y_2 &= 9 \end{aligned}\right.$

Sustituimos en la ecuación:

$x_1 = 20 - 11 = 9$

$x_2 = 20 - 9 = 11$

b) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + xy &= 24 \\ x + 2y &= 13 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 13 - 2y$$

$$(13-2y)^2 + (13-2y)y = 24 \rightarrow 2y^2 - 39y + 145 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = \dfrac{29}{2} \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación:

$x_1 = 13 - 2 \cdot 5 = 3 \qquad x_2 = 13 - 2 \cdot \dfrac{29}{2} = -16$

021 **Calcula dos números, sabiendo que su suma es 42 y la suma de sus inversos es $\frac{7}{72}$.**

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 42 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{7}{72} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 42 - y \\ 72y + 72x &= 7xy \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos el sistema por sustitución:

$$72y + 72(42-y) = 7(42-y)y \rightarrow y^2 - 42y + 432 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 18 \\ y_2 = 24 \end{cases}$$

$x_1 = 42 - 18 = 24$

$x_2 = 42 - 24 = 18$

Los números pedidos son 18 y 24.

022 **Resuelve la siguiente inecuación: $\frac{1}{2}x - 4 \leq 3x + 1$**

Razona los pasos realizados para resolverla.

- Resolvemos la ecuación: $\frac{1}{2}x - 4 = 3x + 1 \rightarrow x = -2$
- Tomamos un punto cualquiera de cada intervalo:
  $x = -4$ de $(-\infty, -2) \qquad x = 0$ de $(-2, +\infty)$
- Comprobamos si esos puntos son soluciones:
  Si $x = -4 \rightarrow -6 = \frac{-4}{2} - 4 \leq 3 \cdot (-4) + 1 = -11 \rightarrow (-\infty, -2)$ es solución.
  Si $x = 0 \rightarrow -4 \geq 1 \rightarrow (-2, +\infty)$ no es solución.
- Comprobamos si el extremo es solución:
  Si $x = -2 \rightarrow -5 = \frac{-2}{2} - 4 \leq 3 \cdot (-2) + 1 = -5 \rightarrow x = -2$ es solución.

Por tanto, la solución de la inecuación es el intervalo $(-\infty, -2]$.

023 **Encuentra el error cometido en la resolución de esta inecuación.**

$$2x \leq 8x - 12$$

$$-6x \leq -12 \rightarrow 6x \leq 12 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow (-\infty, 2)$$

Al pasar del segundo al tercer paso, se ha multiplicado la ecuación por -1, y se debería haber cambiado el sentido de la desigualdad, por las relaciones de orden que cumplen los números reales.

024 **Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita.**

a) $x^2 - 3x + 2 \le 0$
b) $x^2 - 3x + 2 \ge 0$
c) $x^2 - 9x > 0$
d) $x^2 - 9 < 0$
e) $x^2 + 2 \le 0$
f) $(x - 3)(x + 4) \ge 0$
g) $(x + 3)x < 4$
h) $x^2 - 30 > x$
i) $x^2 + x + 3 < 0$
j) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = 0 \qquad x = 1{,}5 \qquad x = 3$

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 > 0 \rightarrow (-\infty, 1)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2 < 0 \rightarrow (1, 2)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 3 \rightarrow 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 > 0 \rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[1, 2]$.

b) Se deduce del apartado anterior que las soluciones de la inecuación son: $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

c) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -1 \qquad x = 1 \qquad x = 10$

Si $x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 9 \cdot (-1) > 0 \rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 1 \rightarrow 1^2 - 9 \cdot 1 < 0 \rightarrow (0, 9)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 \cdot 10 > 0 \rightarrow (9, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 9 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 9 < 0 \rightarrow (-3, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 3)$.

e) El primer miembro de la inecuación siempre será positivo.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

f) Resolvemos la ecuación: $(x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 - 3)(-10 + 4) > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3)(0 + 4) < 0 \rightarrow (-4, 3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3)(10 + 4) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$.

g) Resolvemos la ecuación: $(x + 3)x = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 + 3) \cdot (-10) - 4 > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3) \cdot 0 - 4 < 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3) \cdot 10 + 4 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-4, 1)$.

h) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 30 < 0 \rightarrow (-5, 6)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (6, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-5, 6)$.

i) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero. Por tanto, la inecuación no tiene solución.

j) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero. Por tanto, la inecuación no tiene solución.

025 **Resuelve estas inecuaciones de grado superior, siguiendo el método utilizado para las inecuaciones de segundo grado.**

a) $(x - 2)(x - 3)(x^2 - 2) \geq 0$

b) $x(x - 4)(x + 1)(x^3 - 1) \leq 0$

c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$

d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 > 0$

a) Resolvemos la ecuación: $(x - 2)(x - 3)(x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 1{,}5 \qquad x = 2{,}5 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 - 2)(-10 - 3)((-10)^2 - 2) > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 2)(0 - 3)(0^2 - 2) < 0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ no es solución.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow (1{,}5 - 2)(1{,}5 - 3)(1{,}5^2 - 2) > 0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, 2\right)$ es solución.

Si $x = 2{,}5 \rightarrow (2{,}5 - 2)(2{,}5 - 3)(2{,}5^2 - 2) < 0 \rightarrow (2, 3)$ no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 2)(10 - 3)(10^2 - 2) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right] \cup [3, +\infty)$.

b) Resolvemos la ecuación: $x(x-4)(x+1)(x^3-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-0{,}5 \qquad x=0{,}5 \qquad x=2 \qquad x=10$

Si $x=-10 \rightarrow -10\cdot(-10-4)(-10+1)((-10)^3-1)>0 \rightarrow (-\infty,-1)$ no es solución.

Si $x=-0{,}5 \rightarrow -0{,}5\cdot(-0{,}5-4)(-0{,}5+1)((-0{,}5)^3-1)<0 \rightarrow (-1,0)$ es solución.

Si $x=0{,}5 \rightarrow 0{,}5\cdot(0{,}5-4)(0{,}5+1)(0{,}5^3-1)>0 \rightarrow (0,1)$ no es solución.

Si $x=2 \rightarrow 2\cdot(2-4)(2+1)(2^3-1)<0 \rightarrow (1,4)$ es solución.

Si $x=10 \rightarrow 10\cdot(10-4)(10+1)(10^3-1)>0 \rightarrow (4,+\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-1,0]\cup[1,4]$.

c) Resolvemos la ecuación: $x^3+2x^2+3x-6=0 \rightarrow x=1$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=0 \qquad x=10$

Si $x=0 \rightarrow 0^3+2\cdot 0^2+3\cdot 0-6<0 \rightarrow (-\infty,1)$ es solución.

Si $x=10 \rightarrow 10^3+2\cdot 10^2+3\cdot 10-6>0 \rightarrow (1,+\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,1)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^4-5x^3+4x^2+9x-9=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=2 \qquad x=2{,}5 \qquad x=10$

Si $x=-10 \rightarrow (-10)^4-5\cdot(-10)^3+4\cdot(-10)^2+9\cdot(-10)-9>0$
$\rightarrow \left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x=0 \rightarrow 0^4-5\cdot 0^3+4\cdot 0^2+9\cdot 0-9<0 \rightarrow \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2},1\right)$ no es solución.

Si $x=2 \rightarrow 2^4-5\cdot 2^3+4\cdot 2^2+9\cdot 2-9>0 \rightarrow \left(1,\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x=2{,}5 \rightarrow 2{,}5^4-5\cdot 2{,}5^3+4\cdot 2{,}5^2+9\cdot 2{,}5-9<0 \rightarrow \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2},3\right)$ no es solución.

Si $x=10 \rightarrow 10^4-5\cdot 10^3+4\cdot 10^2+9\cdot 10-9>0 \rightarrow (3,+\infty)$ es solución.

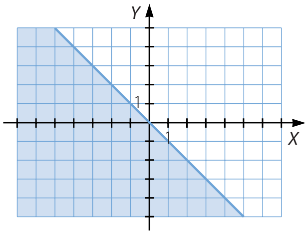
Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(1,\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cup(3,+\infty)$.

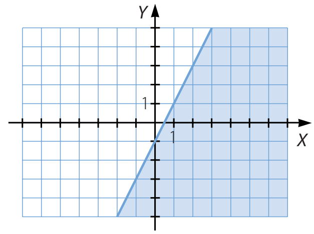
026 Representa en el plano la región solución de estas inecuaciones.

a) $x + y < 0$
b) $x - y \leq 0$
c) $2x - y > 1$
d) $y - 2 \geq 0$

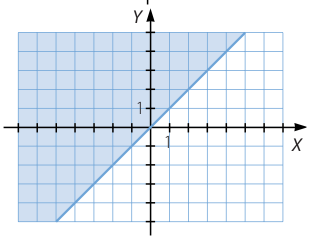
a)



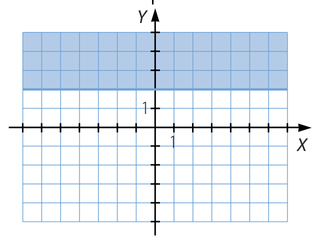
c)



b)



d)

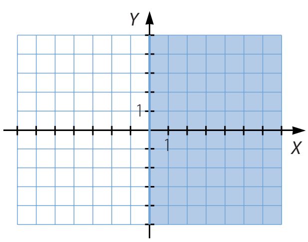


027 Dibuja las siguientes regiones del plano.

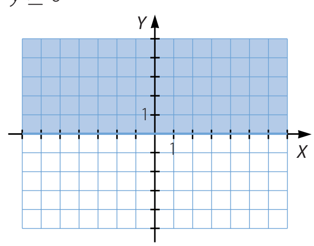
a) Los puntos del plano con abscisa positiva.
b) Los puntos del plano con ordenada mayor o igual que cero.

Encuentra una inecuación que tenga cada una de esas regiones como conjunto solución.

a) $x > 0$



b) $y \geq 0$



028 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{aligned} x + 3 &> 5 \\ 2x - 1 &> 11 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 15 + 7x &\geq 8 \\ 3x &< 14x + 6 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x + 3 &> 5 \\ 2x - 1 &> 11 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &> 2 \\ x &> 6 \end{aligned}\right\}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $(2, +\infty)$.

b) $\left.\begin{aligned} 15 + 7x &\geq 8 \\ 3x &< 14x + 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &\geq -1 \\ x &> -\frac{6}{11} \end{aligned}\right\}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $\left(-\frac{6}{11}, +\infty\right)$.

029 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 3x < 6 \\ 6x^2 + 4x \geq 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + x^2 < 3x^2 + 4 \\ 7x^2 + x \geq 2x - 6 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 3x < 6 \\ 6x^2 + 4x \geq 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{3-\sqrt{33}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \\ \dfrac{-2-\sqrt{22}}{6} \leq x \leq \dfrac{-2+\sqrt{22}}{6} \end{array}\right\}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $\left[\dfrac{-2-\sqrt{22}}{6}, \dfrac{-2+\sqrt{22}}{6}\right]$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + x^2 < 3x^2 + 4 \\ 7x^2 + x \geq 2x - 6 \end{array}\right\} \rightarrow$ Siempre se cumplen.

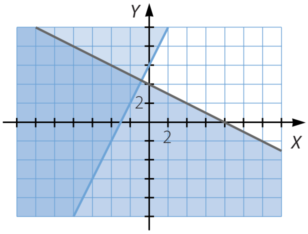
Son ciertas para todos los números reales.

030 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

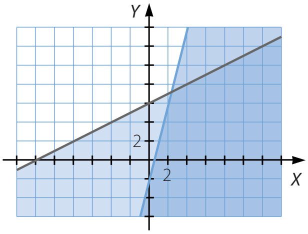
a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y < 4 \\ -2x + y \geq 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 12x - 3y \geq 7 \\ -x + 2y \leq 12 \end{array}\right\}$

a)



b)

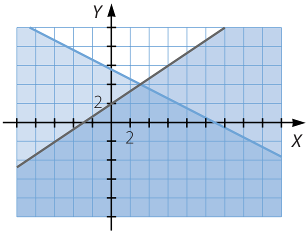


031 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

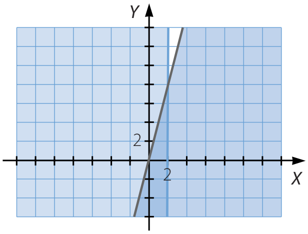
a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 6 > 0 \\ x + 2y < 11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4x - y \geq 0 \\ x < 2 \end{array}\right\}$

a)



b)



032 Comprueba si el número indicado en cada apartado es solución de la ecuación.

a) $2(x^2 - x - 2) + 6(3 - x) - 2(x - 3) - 8 = 0$
$x = -2$

b) $2(-x - 2)(1 - x) - 2(x + 1) = 0$
$x = \sqrt{3}$

c) $(2 + x)5x - (3x - 4) + 3(x - 1) - x^2 + 2(x + 4) = 0$
$x = -\frac{3}{2}$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) + 11 = 0$
$x = \frac{1}{2}$

a) No, las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.
b) Sí, las soluciones son $x_1 = -\sqrt{3}$ y $x_2 = \sqrt{3}$.
c) Sí, la solución es $x = -\frac{3}{2}$.
d) No, esta ecuación no tiene solución real.

033 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores.

a) $\frac{2 - x^2}{3} + \frac{3 - x}{4} + \frac{23}{12} = 0$

b) $\frac{2 - x}{2} + \frac{3x^2 - 2x}{3} + \frac{19x}{6} = 0$

c) $\frac{x - 2x^2}{2} = 1 - \frac{3x + x^2}{4}$

d) $\frac{x^2 + x}{5} + \frac{(x + 2)x}{2} = 0$

a) $\frac{2 - x^2}{3} + \frac{3 - x}{4} + \frac{23}{12} = 0 \rightarrow 8 - 4x^2 + 9 - 3x + 23 = 0 \rightarrow -4x^2 - 3x + 40 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 40}}{2 \cdot (-4)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 - \sqrt{649}}{8} \\ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{649}}{8} \end{cases}$$

b) $\frac{2 - x}{2} + \frac{3x^2 - 2x}{3} + \frac{19x}{6} = 0 \rightarrow \frac{6 - 3x}{6} + \frac{6x^2 - 4x}{6} + \frac{19x}{6} = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

c) $\frac{x - 2x^2}{2} = 1 - \frac{3x + x^2}{4} \rightarrow 2x - 4x^2 = 4 - 3x - x^2 \rightarrow 3x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

No tiene solución real.

d) $\frac{x^2 + x}{5} + \frac{(x + 2)x}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 2x + 5x^2 + 10x = 0 \rightarrow 7x^2 + 12x = 0$

$x(7x + 12) = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{12}{7}$ $\quad x_2 = 0$

034 Busca las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas y comprueba, al menos, una de las soluciones.

a) $\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{3x+1}{4}+\dfrac{1}{6}=0$

b) $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{1-4x}{3}+\dfrac{8}{15}=0$

c) $\dfrac{2-x}{2x}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3x^2-2x}{3x}$

a) $\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{3x+1}{4}+\dfrac{1}{6}=0 \rightarrow 12-12x^2+9x^2+3x+2x=0 \rightarrow -3x^2+5x+12=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-3)\cdot 12}}{2\cdot(-3)} \rightarrow x=\frac{-5\pm 13}{-6} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{4}{3} \\ x_2=3 \end{cases}$$

$$\frac{1-3^2}{3}+\frac{3\cdot 3+1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{-8}{3}+\frac{10}{4}+\frac{1}{6}=0$$

b) $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{1-4x}{3}+\dfrac{8}{15}=0 \rightarrow 15x^2+60+5x-20x^2+8x=0$

$\rightarrow -5x^2+13x+60=0$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot(-5)\cdot 60}}{2\cdot(-5)} \rightarrow x=\frac{-13\pm 37}{-10} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{12}{5} \\ x_2=5 \end{cases}$$

$$\frac{5^2+4}{5}+\frac{1-4\cdot 5}{3}+\frac{8}{15}=\frac{29}{5}-\frac{19}{3}+\frac{8}{15}=0$$

c) $\dfrac{2-x}{2x}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3x^2-2x}{3x} \rightarrow 6-3x=5x-6x^2+4x \rightarrow x^2-2x+1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \rightarrow x=1$$

$$\frac{2-1}{2\cdot 1}-\frac{5}{6}+\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=0$$

035 Resuelve las ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula correspondiente.

a) $x(x+3)-2(x^2-4)-8=0$ b) $(2x+3)^2-8(2x+1)=0$

a) $x(x+3)-2(x^2-4)-8=0$

Operamos: $-x^2+3x=0$

Es una ecuación incompleta cuyas soluciones son $x_1=0$ y $x_2=3$.

b) $(2x+3)^2-8(2x+1)=0$

Operamos: $4x^2-4x+1=0$

Factorizamos el primer miembro de la ecuación utilizando las igualdades notables: $(2x-1)^2=0$

La solución es $x=\dfrac{1}{2}$.

036 ●●○ La suma de las dos raíces de una ecuación de segundo grado es 4 y su producto es −21.

a) Escribe la ecuación correspondiente.
b) Determina dichas soluciones.

a) $x(4 - x) = -21$

b) $-x^2 + 4x + 21 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 21}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

Las soluciones son −3 y 7.

037 ●●○ Calcula k en cada caso.

a) $x^2 + kx + 25 = 0$ tiene una solución.
b) $x^2 - 4x + k = 0$ no tiene soluciones.
c) $kx^2 + 8x + 5 = 0$ tiene dos soluciones.

a) $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0 \rightarrow k = 10$

b) $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0 \rightarrow (4, 8)$

c) $8^2 - 4 \cdot k \cdot 5 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \dfrac{16}{5}\right)$

038 ●●○ Resuelve la ecuación de segundo grado utilizando las igualdades notables. Relaciona el resultado con el número de soluciones.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow$ Tiene una solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

039 ●●○ ¿Qué valor debe tomar k para que los números indicados sean soluciones de las ecuaciones?

a) $2x^2 + 5x + k = 0$
$x = \dfrac{3}{2}$

b) $k(x^2 - 5x + 1) - 6(x + 2) + 4(k - x) - 65 = 0$
$x = -2$

a) $2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 5 \cdot \dfrac{3}{2} + k = 0 \rightarrow k = -12$

b) $k[(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 1] - 6 \cdot ((-2) + 2) + 4 \cdot (k - (-2)) - 65 = 0 \rightarrow k = 3$

040 ¿Qué valores deben tomar a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 30 = 0$ tenga dos soluciones, $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$?

Sustituimos las dos soluciones en la ecuación y formamos un sistema donde las incógnitas son a y b:

$$\left.\begin{array}{r} 25a + 5b - 30 = 0 \\ 9a - 3b - 30 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot 5} \end{array} \left.\begin{array}{r} 75a + 15b = 90 \\ 45a - 15b = 150 \end{array}\right\}$$
$$120a = 240 \rightarrow a = 2$$
$$\rightarrow 9 \cdot 2 - 3b - 30 = 0 \rightarrow b = -4$$

041 Di, sin resolverlas, cuál es la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones, y luego calcúlalas para comprobarlo.

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Partimos de una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son a y b: $(x - a)(x - b) = 0$

Después, multiplicamos: $x^2 - ax - bx + ab = 0 \rightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$

Por tanto, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

a) El producto de las raíces es -14 y la suma es -5.
Las raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 2$.

b) El producto de las raíces es 0 y la suma es -1.
Las raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

c) El producto de las raíces es $-\frac{10}{9}$ y la suma es -1.
Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

d) El producto de las raíces es $\frac{1}{4}$ y la suma es 1.
La raíz es $x = \frac{1}{2}$.

042 Escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$

b) $x_1 = 0$ y $x_2 = -7$

c) $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

d) $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

Respuesta abierta.

a) $(x + 4)(x - 2) = 0$

b) $x(x + 7) = 0$

c) $(x - 3)(x + 3) = 0$

d) $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

043 Resuelve las ecuaciones.

a) $\dfrac{2x-3}{x^2-1}-\dfrac{3-x}{x+1}=0$

b) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{5-x}{x+1}=0$

c) $\dfrac{-x+3}{x-1}-\dfrac{9-x}{x^2-1}=0$

d) $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3}{x-2}-2$

e) $\dfrac{x+4}{x-3}-\dfrac{1-2x}{x^2-x-6}=0$

a) $\dfrac{2x-3}{x^2-1}-\dfrac{3-x}{x+1}=0 \rightarrow 2x-3+x^2-4x+3=0 \rightarrow x^2-2x=0$

$x_1=0 \qquad x_2=2$

b) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{5-x}{x+1}=0 \rightarrow 3x+3+x^2-3x-10=0 \rightarrow x^2-7=0$

$x_1=-\sqrt{7} \qquad x_2=\sqrt{7}$

c) $\dfrac{-x+3}{x-1}-\dfrac{9-x}{x^2-1}=0 \rightarrow -x^2+2x+3-9+x=0 \rightarrow x^2-3x+6=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}$$

No tiene solución real.

d) $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3}{x-2}-2 \rightarrow x+x^2-3x+2=3x+6-2x^2+8$

$\rightarrow 3x^2-5x-12=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-12)}}{2\cdot 3}=\frac{5\pm 13}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

e) $\dfrac{x+4}{x-3}-\dfrac{1-2x}{x^2-x-6}=0 \rightarrow x^2+6x+8-1+2x=0 \rightarrow x^2+8x+7=0$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1}=\frac{-8\pm 6}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=-7\end{cases}$$

044 Estas ecuaciones tienen menos de cuatro soluciones. Determínalas.

a) $8x^4 + 26x^2 + 15 = 0$

b) $9x^4 + 80x^2 - 9 = 0$

c) $6 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^4} = 0$

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0$

a) $8x^4 + 26x^2 + 15 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 8z^2 + 26z + 15 = 0$

$$z = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 8 \cdot 15}}{2 \cdot 8} = \frac{-26 \pm 14}{16} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{3}{4} \\ z_2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

No tiene solución real.

b) $9x^4 + 80x^2 - 9 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 9z^2 + 80z - 9 = 0$

$$z = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-9)}}{2 \cdot 9} = \frac{-80 \pm 82}{18} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{9} \\ z_2 = -9 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{3}$

$z_2 = -9 \rightarrow$ No tiene solución real.

c) $6 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^4} = 0 \rightarrow 6x^4 - 5x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 6z^2 - 5z + 2 = 0$

$$z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{12}$$

No tiene solución real.

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0 \rightarrow -9x^4 + 80x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z = x^2} -9z^2 + 80z + 9 = 0$

$$z = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 9}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-80 \pm 82}{-18} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

$z_2 = -\frac{1}{9} \rightarrow$ No tiene solución real.

045 Obtén las soluciones de las ecuaciones.

a) $\frac{2x(x^3 - 7x)}{2x^2 - 12} = 6$

b) $3x^2(x^2 - 2) = \frac{x^2 - 2}{3}$

c) $8x + \frac{12}{x} = \frac{20}{x^3}$

d) $\frac{9}{2x^2} = 1 - 3x^2$

a) $\dfrac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12}=6 \rightarrow x^4-13x^2+36=0 \xrightarrow{z=x^2} z^2-13z+36=0$

$$z=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1}=\frac{13\pm 5}{2}\rightarrow\begin{cases} z_1=9\\ z_2=4\end{cases}$$

$z_1=9\rightarrow x_1=-3 \qquad x_2=3$

$z_2=4\rightarrow x_3=-2 \qquad x_4=2$

b) $3x^2(x^2-2)=\dfrac{x^2-2}{3}\rightarrow 9x^4-19x^2+2=0 \xrightarrow{z=x^2} 9z^2-19z+2=0$

$$z=\frac{-(-19)\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot 9\cdot 2}}{2\cdot 9}=\frac{19\pm 17}{18}\rightarrow\begin{cases} z_1=2\\ z_2=\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

$z_1=2\rightarrow x_1=-\sqrt{2} \qquad x_2=\sqrt{2}$

$z_2=\dfrac{1}{9}\rightarrow x_3=-\dfrac{1}{3} \qquad x_4=\dfrac{1}{3}$

c) $8x+\dfrac{12}{x}=\dfrac{20}{x^3}\rightarrow 2x^4+3x^2-5=0 \xrightarrow{z=x^2} 2z^2+3z-5=0$

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 7}{4}\rightarrow\begin{cases} z_1=1\\ z_2=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$z_1=1\rightarrow x_1=-1 \qquad x_2=1$

$z_2=-\dfrac{5}{2}\rightarrow$ No tiene solución real.

d) $\dfrac{9}{2x^2}=1-3x^2\rightarrow 6x^4-2x^2+9=0 \xrightarrow{z=x^2} 6z^2-2z+9=0$

$$z=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 6\cdot 9}}{2\cdot 6}=\frac{2\pm\sqrt{-212}}{12}$$

No tiene solución real.

046 ●●○ **Completa las siguientes ecuaciones escribiendo un número en el segundo miembro, de manera que tengan estas soluciones.**

a) $\sqrt{x+7}-2\sqrt{4x+1}=\square$
$x=2$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}=\square-\dfrac{1}{\sqrt{4x}}$
$x=4$

a) $\sqrt{x+7}-2\sqrt{4x+1}=-3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}=\dfrac{13}{12}-\dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

047 Resuelve y comprueba las soluciones.

a) $x+\sqrt{2x+3}=6$

b) $2\sqrt{3x+1}-2x+2=0$

c) $\dfrac{\sqrt{2x-2}}{x-5}=1$

d) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}-2=0$

a) $x+\sqrt{2x+3}=6 \rightarrow 2x+3=x^2-12x+36 \rightarrow x^2-14x+33=0$

$$x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot1\cdot33}}{2\cdot1}=\frac{14\pm8}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=11\end{cases}$$

$x=3\rightarrow 3+\sqrt{2\cdot3+3}=6$

$x=11\rightarrow 11+\sqrt{2\cdot11+3}\neq6$

b) $2\sqrt{3x+1}-2x+2=0\rightarrow 4x^2-20x=0$

$x=5\rightarrow 2\sqrt{3\cdot5+1}-2\cdot5+2=2\cdot4-10+2=0$

$x=0\rightarrow 2\sqrt{3\cdot0+1}-2\cdot0+2=2\cdot1+2\neq0$

c) $\dfrac{\sqrt{2x-2}}{x-5}=1\rightarrow x^2-12x+27=0$

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot1\cdot27}}{2\cdot1}=\frac{12\pm6}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=9\\x_2=3\end{cases}$$

$x=9\rightarrow\dfrac{\sqrt{2\cdot9-2}}{9-5}=\dfrac{4}{4}=1$

$x=3\rightarrow\dfrac{\sqrt{2\cdot3-2}}{3-5}=\dfrac{2}{-2}\neq1$

d) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}-2=0\rightarrow x+2=x-6+4\sqrt{x-6}+4\rightarrow 1=x-6$

$x=7\rightarrow\sqrt{7+2}-\sqrt{7-6}-2=3-1-2=0$

048 Estas ecuaciones tienen cero, una o dos soluciones. Determínalas.

a) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}-5=0$

b) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-2}=2$

c) $\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x+8}=0$

d) $\dfrac{3}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{5-\sqrt{x}}{3}$

e) $\sqrt{2x-2}-\sqrt{x-5}+1=0$

a) No tiene solución.

b) Tiene dos soluciones: $x_1=2\quad x_2=6$

c) Tiene dos soluciones: $x_1=2\quad x_2=-4$

d) Tiene una solución: $x=4$

e) No tiene solución.

049 Las ecuaciones tienen tres soluciones. Dada una solución, calcula las otras dos soluciones.

a) $(x+3)(x^2-2x-3)=0$
$x=-3$

b) $(2a-1)(4a^2+20a+25)=0$
$a=\dfrac{1}{2}$

a) Resolvemos la ecuación $x^2-2x-3=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=3\end{cases}$$

b) Resolvemos la ecuación $4a^2+20a+25=0$:

$$a=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot 4\cdot 25}}{2\cdot 4}=\frac{20}{8}\rightarrow a=\frac{5}{2}$$

050 Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $x^3+4x^2+x-6=0$

b) $x^2(x+6)=32$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1)$

d) $2x^3-5x^2-14x+8=0$

a)

	1	4	1	−6
1		1	5	6
	1	5	6	0
−2		−2	−6	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

$x_1=-3\qquad x_2=-2\qquad x_3=1$

b) $x^2(x+6)=32\rightarrow x^3+6x^2-32=0$

	1	6	0	−32
2		2	16	32
	1	8	16	0
−4		−4	−16	
	1	4	0	
−4		−4		
	1	0		

$x_1=-4\qquad x_2=2$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1)\rightarrow x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0$

	1	2	−11	−12	36
2		2	8	−6	−36
	1	4	−3	−18	0
2		2	12	18	
	1	6	9	0	
−3		−3	−9		
	1	3	0		
−3		−3			
	1	0			

$x_1=-3\qquad x_2=2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & -14 & 8 \\
-2 & & -4 & 18 & -8 \\
\hline
 & 2 & -9 & 4 & \boxed{0} \\
4 & & 8 & -4 & \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$2x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2}$ $\quad x_2 = -2$ $\quad x_3 = 4$

051 Escribe ecuaciones factorizadas que tengan las soluciones y el grado indicados.

a) Grado 3 y soluciones 5, −2 y 7.

b) Grado 4 y soluciones 1, −3 y −4.

Respuesta abierta.

a) $(x + 2)(x - 5)(x - 7) = 0$

b) $(x - 1)^2(x + 3)(x + 4) = 0$

052 Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1)$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & -7 & -1 & 2 \\
1 & & 6 & -1 & -2 \\
\hline
 & 6 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $6x^2 - x - 2 = 0$:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 7}{12} \to \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$x_1 = -\dfrac{1}{2}$ $\quad x_2 = \dfrac{2}{3}$ $\quad x_3 = 1$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1) \to 4x^4 - 12x^3 - 21x^2 + 53x + 30 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & -12 & -21 & 53 & 30 \\
-2 & & -8 & 40 & -38 & -30 \\
\hline
 & 4 & -20 & 19 & 15 & \boxed{0} \\
3 & & 12 & -24 & -15 & \\
\hline
 & 4 & -8 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $4x^2 - 8x - 5 = 0$:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 12}{8} \to \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$x_1 = -\dfrac{1}{2}$ $\quad x_2 = -2$ $\quad x_3 = \dfrac{5}{2}$ $\quad x_4 = 3$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x^3 + 3x^2 - 11x + 2) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -11 & 2 \\ 2 & & 2 & 10 & -2 \\ \hline & 1 & 5 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 2$$

053 Resuelve estas ecuaciones.

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{3} + x\dfrac{x+1}{6} = x + 1$

b) $3x^2\left(4 + \dfrac{7}{x}\right) = \dfrac{6(17x - 4)}{x}$

c) $\dfrac{x^2}{16}(x + 7) + x + 1 = 0$

d) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$

e) $\dfrac{2x^2(x-2) + 4x}{x^2 + 1} = 3$

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{3} + x\dfrac{x+1}{6} = x + 1 \rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ -2 & & -4 & 6 & \\ \hline & 2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = \dfrac{3}{2}$

b) $3x^2\left(4 + \dfrac{7}{x}\right) = \dfrac{6(17x - 4)}{x} \rightarrow 4x^3 + 7x^2 - 34x + 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 7 & -34 & 8 \\ 2 & & 8 & 30 & -8 \\ \hline & 4 & 15 & -4 & \boxed{0} \\ -4 & & -16 & 4 & \\ \hline & 4 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$4x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = \dfrac{1}{4} \qquad x_3 = 2$

c) $\dfrac{x^2}{16}(x+7)+x+1=0 \rightarrow x^3+7x^2+16x+16=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 16 & 16 \\ -4 & & -4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2+3x+4=0$:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}\rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=-4$

d) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}\rightarrow -5x^3+8x^2+3x+2=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -5 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & & -10 & -4 & -2 \\ \hline & -5 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $-5x^2-2x-1=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-5)\cdot(-1)}}{2\cdot(-5)}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{-10}\rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=2$

e) $\dfrac{2x^2(x-2)+4x}{x^2+1}=3\rightarrow 2x^3-7x^2+4x-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 4 & -3 \\ 3 & & 6 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $2x^2-x+1=0$:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4}\rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=3$

054 ●○○ **Del sistema de ecuaciones se sabe que $x=-1$ forma parte de su solución. Determina el valor de y.**

$$\left.\begin{array}{r} 3(2x+y-1)-6(4x-y)=15 \\ -x+y+3(x-2y)+6=4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y=2 \\ 2x-5y=-2 \end{array}\right\}\rightarrow y=0$$

055 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x+4)+3(3-2y)-1=12 \\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 6(x-2y-3)-3(2x+y-3)+x+7=0 \\ 3(x-6y)-2(x-y)+y=0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x+4)+3(3-2y)-1=12 \\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-6y=12 \\ x+3y+6=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=-3y-6$

Sistema compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{r} 6(x-2y-3)-3(2x+y-3)+x+7=0 \\ 3(x-6y)-2(x-y)+y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-15y=2 \\ x-15y=0 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible.

056 Dada la ecuación $2x-5y=14$, encuentra otra ecuación para que juntas formen un sistema de dos ecuaciones que:

a) Tenga una sola solución.

b) No tenga soluciones.

c) Tenga infinitas soluciones.

Respuesta abierta.

a) $3x-7y=1$ b) $2x-5y=0$ c) $4x-10y=28$

057 Halla, si es posible, un valor de *a* para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 6x-4y=12 \\ -9x+ay=-18 \end{array}\right\}$$

a) Sea incompatible.

b) Sea compatible indeterminado.

c) Sea compatible determinado.

$$\frac{6}{-9}=\frac{-4}{a}$$

$6a=36 \rightarrow a=6$

a) No es posible. b) $a=6$ c) $a\neq 6$

058 Encuentra, si es posible, un valor de *b* para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 8x-12y=20 \\ 4x+9y=b \end{array}\right\}$$

a) Sea incompatible.

b) Sea compatible indeterminado.

c) Sea compatible determinado.

$$\frac{8}{4}\neq\frac{-12}{9}$$

El sistema es siempre compatible determinado.

059 Resuelve los siguientes sistemas con tres ecuaciones y dos incógnitas, y representa las soluciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = -1 \\ -x + y = -4 \\ -4x - y = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ -3x - 2y = 1 \\ x - 3y = 7 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -4x + 2y = 0 \\ 6x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = -2 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = -1 \\ -x + y = -4 \\ -4x - y = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x + y = -4 \\ -4x - y = -1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 \rightarrow -1 + y = -4 \rightarrow y = -3$

$x = 1 \qquad y = -3$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\}$

Las soluciones de las dos primeras ecuaciones son $x = 3$ e $y = 4$, que no verifican la tercera ecuación. Por tanto, el sistema es incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ -3x - 2y = 1 \\ x - 3y = 7 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 0 \\ -3x - 2y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 \rightarrow 4 \cdot 1 + 2y = 0 \rightarrow y = -2$

$x = 1 \qquad y = -2$

d) $\left.\begin{array}{r} -4x + 2y = 0 \\ 6x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = -2 \end{array}\right\}$

Las soluciones de la segunda y tercera ecuaciones son $x = \dfrac{10}{3}$ e $y = 6$, que no verifican la primera ecuación. Por tanto, el sistema es incompatible.

060 Simplifica estos sistemas de ecuaciones, y utiliza el método de Gauss para obtener su solución.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = -6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5p + 2q = 1 \\ 15p - 10q = 11 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3(2x + y - 1) - 6(4x - y) = 15 \\ -x + y + 3x - 2y + 6 = 4 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-5}{3} + \dfrac{2y-1}{5} = 2 \\ \dfrac{2-x}{4} + \dfrac{y+1}{3} = 3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = -6 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2 = 2E_2 - 3E_1} \left.\begin{array}{r} 4x + 6y = 0 \\ -36y = -12 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{r} 5p + 2q = 1 \\ 15p - 10q = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2 = E_2 - 3E_1} \left.\begin{array}{r} 5p + 2q = 1 \\ -16q = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{2}{5} \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

c) $\left.\begin{array}{r} 3(2x+y-1)-6(4x-y)=15 \\ -x+y+3x-2y+6=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -18x+9y=18 \\ 2x-y=-2 \end{array}\right\} y=2x$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-5}{3}+\dfrac{2y-1}{5}=2 \\ \dfrac{2-x}{4}+\dfrac{y+1}{3}=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x-25+6y-3=30 \\ 6-3x+4y+4=36 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+6y=58 \\ -3x+4y=26 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{E_2=5E_2+3E_1} \left.\begin{array}{r} 5x+6y=58 \\ 38y=304 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2 \\ y=8 \end{array}$

061 ●●○ Resuelve estos sistemas de ecuaciones, aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3 \\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0 \\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15 \\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3 \\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 10x+15+3y+3=45 \\ 3x-15-4y+2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 10x+3y=27 \\ 3x-4y=13 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{E_2=10E_2-3E_1} \left.\begin{array}{r} 10x+3y=27 \\ -49y=49 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0 \\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x+24-9y+45=0 \\ 10x-5y+5-2x-4y+6=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x-9y=-69 \\ 8x-9y=-11 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{E_2=E_2-E_1} \left.\begin{array}{r} 8x-9y=-69 \\ 0=58 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r} -(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15 \\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -8x+3y=-11 \\ -8x+12y=-8 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{E_2=E_2-E_1} \left.\begin{array}{r} -8x+3y=-11 \\ 9y=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

d) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 16x-3y=16 \\ 16x-3y=16 \end{array}\right\} \rightarrow y=\dfrac{16x-16}{3}$

Sistema compatible indeterminado.

062 Determina las soluciones de estos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - 2y + 3z &= 6 \\ -x + y - z &= -2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ -x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 0 \\ -4x - 6y + 7z &= -3 \\ 3x - y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ -x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - 2y + 3z &= 6 \\ -x + y - z &= -2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[E_3=2E_3+E_1]{E_2=2E_2-E_1} \left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ -7y + 5z &= 1 \\ 5y - z &= 7 \end{aligned}\right\}$

$\xrightarrow{E_3=7E_3+5E_2} \left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ -7y + 5z &= 1 \\ 18z &= 54 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}\right.$

b) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ -x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[E_3=2E_3-E_1]{E_2=2E_2+E_1} \left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ 5y - 3z &= 6 \\ 5y + z &= -2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3=E_3-E_2} \left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ 5y - 3z &= 6 \\ 4z &= -8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 0 \\ z &= -2 \end{aligned}\right.$

c) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 0 \\ -4x - 6y + 7z &= -3 \\ 3x - y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[E_3=2E_3-3E_1]{E_2=E_2+2E_1} \left.\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 0 \\ 17z &= -3 \\ -11y - 13z &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{177}{187} \\ y &= -\frac{63}{187} \\ z &= -\frac{3}{17} \end{aligned}\right.$

d) $\left.\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ -x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[E_3=2E_3+E_1]{E_2=2E_2-E_1} \left.\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 0 \\ -10y - 5z &= 10 \\ 6y - z &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3=E_3+\frac{3}{5}E_2} \left.\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 0 \\ -10y - 5z &= 10 \\ -4z &= 8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= -2 \end{aligned}\right.$

063 Resuelve, empleando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ x + 2y - z &= 2 \\ x + y + 2z &= 15 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - y - z &= -10 \\ 5x - z &= -10 \\ -6x + 3y + 2z &= 22 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ -x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 3 \\ 4y - 3z &= 10 \\ -x + 2y + 3z &= -8 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 2x + 2y - 8z &= 12 \\ -x + 3y + 5z &= 7 \\ 3x + 4y - z &= 32 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} 4x + 3y + 5z + 2 &= 0 \\ -2x + 6y - z - 2 &= 0 \\ 8x + 9y + 11z + 10 &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ x + 2y - z &= 2 \\ x + y + 2z &= 15 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[E_3=E_3-E_1]{E_2=E_2-E_1} \left.\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ y - 2z &= -8 \\ z &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \\ z &= 5 \end{aligned}\right.$

b) $$\left.\begin{aligned} 3x - y - z &= -10 \\ 5x - z &= -10 \\ -6x + 3y + 2z &= 22 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3 = E_3 + 3E_1} \left.\begin{aligned} 3x - y - z &= -10 \\ 5x - z &= -10 \\ 3x - z &= -8 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{E_3 = E_3 - E_2} \left.\begin{aligned} 3x - y - z &= -10 \\ 5x - z &= -10 \\ -2x &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 2 \\ z &= 5 \end{aligned}\right.$$

c) $$\left.\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ -x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2 = 2E_2 - E_1} \\ \xrightarrow{E_3 = 2E_3 + E_1} \end{array} \left.\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 0 \\ -10y - 5z &= 10 \\ 6y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{E_3 = E_3 + \frac{3}{5}E_2} \left.\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 0 \\ -10y - 5z &= 10 \\ -4z &= 8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= -2 \end{aligned}\right.$$

d) $$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 3 \\ 4y - 3z &= 10 \\ -x + 2y + 3z &= -8 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3 = 2E_3 + E_1} \left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 3 \\ 4y - 3z &= 10 \\ y + 7z &= -13 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{E_3 = 4E_3 - E_2} \left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 3 \\ 4y - 3z &= 10 \\ 31z &= -62 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 1 \\ z &= -2 \end{aligned}\right.$$

e) $$\left.\begin{aligned} 2x + 2y - 8z &= 12 \\ -x + 3y + 5z &= 7 \\ 3x + 4y - z &= 32 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2 = 2E_2 + E_1} \\ \xrightarrow{E_3 = 2E_3 - 3E_1} \end{array} \left.\begin{aligned} 2x + 2y - 8z &= 12 \\ 8y + 2z &= 26 \\ 2y + 22z &= 28 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{E_3 = 4E_3 - E_2} \left.\begin{aligned} 2x + 2y - 8z &= 12 \\ 8y + 2z &= 26 \\ 86z &= 86 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$$

f) $$\left.\begin{aligned} 4x + 3y + 5z + 2 &= 0 \\ -2x + 6y - z - 2 &= 0 \\ 8x + 9y + 11z + 10 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2 = 2E_2 + E_1} \\ \xrightarrow{E_3 = E_3 - 2E_1} \end{array} \left.\begin{aligned} 4x + 3y + 5z &= -2 \\ 15y + 3z &= 2 \\ 3y + z &= -6 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{E_3 = 5E_3 - E_2} \left.\begin{aligned} 4x + 3y + 5z &= -2 \\ 15y + 3z &= 2 \\ 2z &= -32 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 17 \\ y &= \frac{10}{3} \\ z &= -16 \end{aligned}\right.$$

064 Resuelve las inecuaciones.

a) $-x + 15 \le 3 - 7x$

b) $x + 11 \ge 3 - 4x$

c) $-x - 13 \le 3 + 7x$

d) $2x + 11 \ge 6 + 5x$

a) $-x + 15 \le 3 - 7x \rightarrow 6x \le -12 \rightarrow x \le 2 \rightarrow (-\infty, -2]$

b) $x + 11 \ge 3 - 4x \rightarrow 5x \ge -8 \rightarrow x \ge -\frac{8}{5} \rightarrow \left[-\frac{8}{5}, +\infty\right)$

c) $-x - 13 \le 3 + 7x \rightarrow -16 \le 8x \rightarrow -2 \le x \rightarrow [-2, +\infty)$

d) $2x + 11 \ge 6 + 5x \rightarrow 5 \ge 3x \rightarrow \frac{5}{3} \ge x \rightarrow \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$

065 Encuentra la solución de las inecuaciones.

a) $\frac{1-5x}{4}-2\frac{4+3x}{5}\le\frac{1}{2}$

b) $\frac{-2+3x}{5}+\frac{6-4x}{3}+\frac{1}{2}\ge 0$

c) $1-\frac{2x-5}{6}+\frac{1-4x}{2}-\frac{x-1}{3}<0$

a) $\frac{1-5x}{4}-2\frac{4+3x}{5}\le\frac{1}{2}\rightarrow 5-25x-32-24x\le 10$

$\rightarrow -49x\le 37\rightarrow x\ge-\frac{37}{49}$

$\left[-\frac{37}{49},+\infty\right)$

b) $\frac{-2+3x}{5}+\frac{6-4x}{3}+\frac{1}{2}\ge 0\rightarrow -12+18x+60-40x+15\ge 0$

$\rightarrow -22x\ge -63\rightarrow x\le\frac{63}{22}$

$\left(-\infty,\frac{63}{22}\right]$

c) $1-\frac{2x-5}{6}+\frac{1-4x}{2}-\frac{x-1}{3}<0\rightarrow 6-2x+5+3-12x-2x+2<0$

$\rightarrow -16x<-16\rightarrow x>1$

$(1,+\infty)$

066 Determina las soluciones de estas inecuaciones.

a) $\frac{x+2}{3}+\frac{x(x-1)}{5}>0$

b) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-x^2}{3}+1<0$

c) $x-\frac{1-2x}{3}-\frac{2x^2+1}{4}\ge 5$

d) $3-\frac{2x-3}{2}+\frac{16x+x^2}{3}\ge 0$

e) $\frac{x-1}{4}-\frac{12x-x^2}{3}\ge\frac{2x^2+1}{3}-x$

a) $\frac{x+2}{3}+\frac{x(x-1)}{5}>0\rightarrow 5x+10+3x^2-3x>0\rightarrow 3x^2+2x+10>0$

El primer miembro de la inecuación es siempre positivo, por lo que siempre se cumple. Es cierta para todos los números reales.

b) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-x^2}{3}+1<0\rightarrow 9x-3-2x+2x^2+6<0\rightarrow 2x^2+7x+3<0$

Resolvemos la ecuación: $2x^2+7x+3=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10\qquad x=-1\qquad x=0$

Si $x=-10\rightarrow 2\cdot(-10)^2+7\cdot(-10)+3>0\rightarrow(-\infty,-3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 3 < 0 \rightarrow \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + 3 > 0 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$.

c) $x - \frac{1-2x}{3} - \frac{2x^2+1}{4} \geq 5 \rightarrow 12x - 4 + 8x - 6x^2 - 3 \geq 60 \rightarrow -6x^2 + 20x - 67 \geq 0$

Resolvemos la ecuación: $-6x^2 + 20x - 67 = 0$

No tiene solución real. Como el primer miembro de la ecuación toma siempre valores negativos, la inecuación no tiene solución.

d) $3 - \frac{2x-3}{2} + \frac{16x+x^2}{3} \geq 0 \rightarrow 18 - 6x + 9 + 32x + 2x^2 \geq 0$
$\rightarrow 2x^2 + 26x + 27 \geq 0$

Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 26x + 27 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-13-\sqrt{115}}{2} \\ x_2 = \frac{-13+\sqrt{115}}{2} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:
$x = -10 \qquad x = -5 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 2(-10)^2 + 26 \cdot (-10) + 27 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -5 \rightarrow \cdot 2(-5)^2 + 26 \cdot (-5) + 27 < 0 \rightarrow \left(\frac{-13-\sqrt{115}}{2}, \frac{-13+\sqrt{115}}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow \cdot 2 \cdot 0^2 + 26 \cdot 0 + 27 > 0 \rightarrow \left(\frac{-13+\sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right] \cup \left[\frac{-13+\sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$.

e) $\frac{x-1}{4} - \frac{12x-x^2}{3} \geq \frac{2x^2+1}{3} - x \rightarrow 4x^2 + 33x + 7 \geq 0$

Resolvemos la ecuación: $4x^2 + 33x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-33-\sqrt{977}}{8} \\ x_2 = \frac{-33+\sqrt{977}}{8} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:
$x = -10 \qquad x = -5 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 4 \cdot (-10)^2 + 33 \cdot (-10) + 7 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -5 \rightarrow 4 \cdot (-5)^2 + 33 \cdot (-5) + 7 < 0 \rightarrow \left(\frac{-33-\sqrt{977}}{8}, \frac{-33+\sqrt{977}}{8}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0^2 + 33 \cdot 0 + 7 > 0 \rightarrow \left(\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right] \cup \left[\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$.

067 **¿Cuál es la solución de estas inecuaciones?**

a) $x^2 - x - 6 < 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 < 0$

c) $2x^2 + 5x + 6 < 0$

d) $-x^2 + 3x - 4 < 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$

f) $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 10 - 6 > 0 \rightarrow (-\infty, -2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 6 < 0 \rightarrow (-2, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 6 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-2, 3)$.

b) Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 2 \cdot (-10) + 8 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 2 \cdot 0 + 8 > 0 \rightarrow (-4, 2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 2 \cdot 10 + 8 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

c) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores positivos.

No tiene solución.

d) Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores negativos.

Es una identidad.

e) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 5 \cdot (-10) - 3 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 3 < 0 \rightarrow \left(-3, \frac{1}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 3 > 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

f) Resolvemos la ecuación: $6x^2 + 31x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -1 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 6 \cdot (-10)^2 + 31 \cdot (-10) + 18 > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow 6 \cdot (-1)^2 + 31 \cdot (-1) + 18 < 0 \rightarrow \left(-\frac{9}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 6 \cdot 0^2 + 31 \cdot 0 + 18 > 0 \rightarrow \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[-\frac{9}{2}, -\frac{2}{3}\right]$.

068 Resuelve estas inecuaciones que contienen fracciones algebraicas.

a) $\frac{x+3}{x-5} < 0$ b) $\frac{2x-3}{x+3} < 0$ c) $\frac{-x+1}{2-3x} > 0$ d) $\frac{2-x}{2x+5} - 1 > 0$

a) $\frac{x+3}{x-5} < 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3 > 0 \\ x-5 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x > -3 \\ x < 5 \end{array}\right\}$

$(-3, 5)$

b) $\frac{2x-3}{x+3} < 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-3 < 0 \\ x+3 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x < \frac{3}{2} \\ x > -3 \end{array}\right\}$

$\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

c) $\frac{-x+1}{2-3x} > 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+1 < 0 \\ 2-3x > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 1 \\ x < \frac{2}{3} \end{array}\right\}$

$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

d) $\frac{2-x}{2x+5} - 1 > 0 \rightarrow \frac{-3x-3}{2x+5} > 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x < -1 \\ x > -\frac{5}{2} \end{array}\right\}$

$\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$

069 Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 2(x-5)-3(2-2x)<0 \\ -x+3(2+x)>3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4(2x-5)+2(8-2x)+7\geq 0 \\ 3(1-2x)-3(2x-1)+1\geq 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{5}+\dfrac{1-x}{3}<0 \\ \dfrac{2-3x}{6}-\dfrac{3-3x}{2}>0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -3(x+1)\cdot 2-\dfrac{2+5x}{3}>1 \\ 2\cdot\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{1}{5}<0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2(x-5)-3(2-2x)<0 \\ -x+3(2+x)>3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x<16 \\ 2x>-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x<2 \\ x>-\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} 4(2x-5)+2(8-2x)+7\geq 0 \\ 3(1-2x)-3(2x-1)+1\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3>0 \\ -12x+7\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x>-\dfrac{3}{4} \\ x\leq\dfrac{7}{12} \end{array}\right\} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{12}\right]$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{5}+\dfrac{1-x}{3}<0 \\ \dfrac{2-3x}{6}-\dfrac{3-3x}{2}>0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-1<0 \\ 6x-7>0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x>\dfrac{1}{2} \\ x>\dfrac{7}{6} \end{array}\right\} \rightarrow \left(\dfrac{7}{6}, +\infty\right)$

d) $\left.\begin{array}{r} -3(x+1)\cdot 2-\dfrac{2+5x}{3}>1 \\ 2\cdot\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{1}{5}<0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -23x-20>3 \\ 4x-2+1<0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x<-1 \\ x<\dfrac{1}{4} \end{array}$

070 Obtén las soluciones de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3<0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4<0 \\ 2x-3<0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3>0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4<0 \\ 2x-3>0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3<0 \end{array}\right\}$

Resolvemos cada una de las inecuaciones:

$$x^2-3x-4=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=4 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=10$

Si $x=-10 \rightarrow (-10)^2-3\cdot(-10)-4>0 \rightarrow (-\infty,-1)$ es solución de la inecuación.

Si $x=0 \rightarrow 0^2-3\cdot 0-4<0 \rightarrow (-1,4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=10 \rightarrow 10^2-3\cdot 10-4>0 \rightarrow (4,+\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

$$2x - 3 < 0 \rightarrow x < \frac{3}{2}$$

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-\infty, -1)$.

b) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

c) Repitiendo el proceso del primer apartado, la solución es $(4, +\infty)$.

d) Repitiendo el proceso del primer apartado, la solución es $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

071 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} 10 - 3x - x^2 < 0 \\ 3x + 5 > -16 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 10 - 3x - x^2 < 0 \\ 2x - 3 > 13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ 3x - 2 < 10 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2 + 4x - 5 < 0 \\ 3x - 2 > 10 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos cada una de las inecuaciones:

$$-x^2 - 3x + 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 3 \cdot (-10) + 10 < 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 3 \cdot 0 + 10 > 0 \rightarrow (-5, 2)$ no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 3 \cdot 10 + 10 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$.

$$3x + 5 > -16 \rightarrow x > -7$$

Por tanto, la solución es $(-7, +\infty)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-7, -5) \cup (2, +\infty)$.

b) La inecuación de segundo grado es la misma que en el apartado anterior.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$.

$$2x - 3 > 13 \rightarrow x > 8$$

Por tanto, la solución es $(8, +\infty)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(8, +\infty)$.

c) Resolvemos cada una de las inecuaciones:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 4 \cdot (-10) - 5 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 + 4 \cdot 0 - 5 < 0 \rightarrow (-5, 1)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 4 \cdot 10 - 5 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

$$3x - 2 < 10 \rightarrow x < 4$$

Por tanto, la solución es $(-\infty, 4)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-\infty, -5) \cup (1, 4)$.

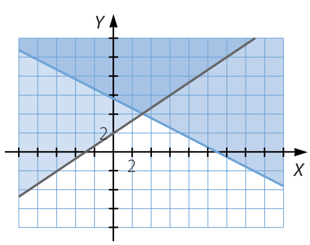
d) Repitiendo el proceso del apartado anterior, vemos que el sistema no tiene solución.

072 **Obtén gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones.**

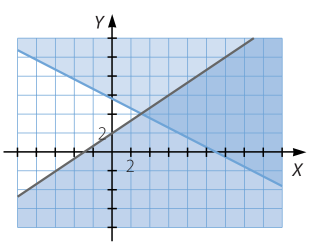
a) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 6 &< 0 \\ x + 2y &> 11 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 6 &> 0 \\ x + 2y &> 11 \end{aligned}\right\}$

a) La solución es la región más oscura.



b) La solución es la región más oscura.



073 **Calcula las soluciones de estos sistemas.**

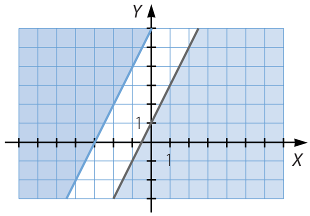
a) $\left.\begin{aligned} 2x - y + 6 &< 0 \\ -4x + 2y &< 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x - y + 6 &< 0 \\ -4x + 2y &> 2 \end{aligned}\right\}$

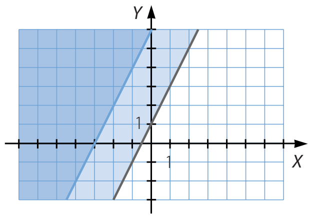
c) $\left.\begin{aligned} 2x - y + 6 &> 0 \\ -4x + 2y &< 2 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x - y + 6 &> 0 \\ -4x + 2y &> 2 \end{aligned}\right\}$

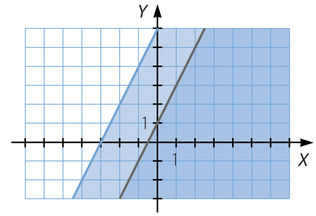
a) No tiene solución.



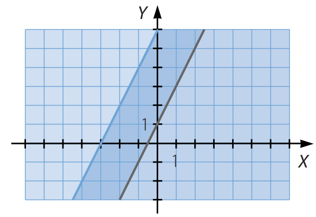
b) La solución es la región más oscura.



c) La solución es la región más oscura.



d) La solución es la región más oscura.



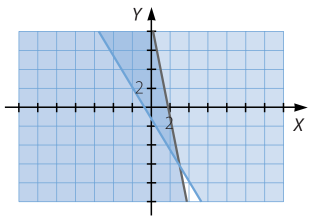
074 ●●● Resuelve los sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+y}{3} < \dfrac{y+6}{5} \\ \dfrac{4-x}{3} + \dfrac{2-y}{5} < 2 \end{array}\right\}$

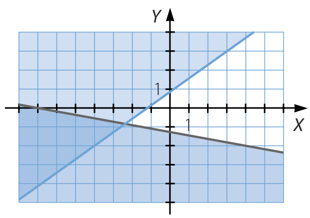
b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x-2y+3}{3} \geq \dfrac{x-y+1}{2} \\ 1 - \dfrac{2x-4-y}{3} + \dfrac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{6x+y}{25} < \dfrac{3-y}{5} \\ \dfrac{-x+1}{3} - 2 \cdot \dfrac{2x+y-3}{2} < \dfrac{3x+1}{4} \end{array}\right\}$

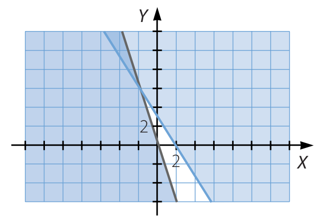
a) La solución es la región más oscura.



b) La solución es la región más oscura.



c) La solución es la región más oscura.



075 Determina la suma y el producto de las soluciones de la ecuación.

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Halla las soluciones. ¿Puedes explicar lo que sucede?

El producto de las raíces es 14 y la suma es 9.

Las raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$.

Si el coeficiente del término de segundo grado es 1, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

076 **Estudia el valor de los coeficientes de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, para que tenga cuatro, tres, dos, una o ninguna solución.**

Analizamos el número de raíces de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ a partir de las raíces obtenidas en la ecuación de segundo grado asociada, $az^2 + bz + c = 0$.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow z = \dfrac{-b}{2a} \rightarrow$ Si $\dfrac{-b}{2a} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

$\rightarrow$ Si $\dfrac{-b}{2a} = 0$ $(b = 0,\ c = 0) \rightarrow$ Tiene una solución: $x = 0$.

$\rightarrow$ Si $\dfrac{-b}{2a} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones opuestas.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Si las dos soluciones son negativas, la ecuación bicuadrada no tiene solución.

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \text{ y } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Si una solución es negativa y la otra es cero:

$$c = 0 \text{ y } \frac{-b}{a} < 0 \rightarrow \text{Tiene una solución: } x = 0.$$

Si una solución es positiva y la otra es cero:

$$c = 0 \text{ y } \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow \text{Tiene tres soluciones: } x = 0,\ x = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}}.$$

Si las dos soluciones son positivas, la ecuación bicuadrada tiene cuatro soluciones.

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \text{ y } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \rightarrow \text{Tiene cuatro soluciones.}$$

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{cases}$$

077 ●●○ **Utiliza el método de sustitución para resolver estos sistemas de ecuaciones no lineales.**

a) $\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ x + y - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} y - x^2 - 5x + 3 &= 0 \\ y &= 6x - 1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 10 &= xy \\ x + 2 &= y + 5 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} y + x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ x - y + 9 &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ x + y - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$x^2 + x - 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$

Si $x_1 = -2 \rightarrow y_1 = 4$

Si $x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1$

b) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{aligned} y - x^2 - 5x + 3 &= 0 \\ y &= 6x - 1 \end{aligned}\right\}$$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$

Si $x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 6 \cdot 2 - 1 = 11$

Si $x_2 = -1 \rightarrow y_2 = 6 \cdot (-1) - 1 = -7$

c) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{aligned} 10 &= xy \\ x + 2 &= y + 5 \end{aligned}\right\}$$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = -2 \qquad x_2 = 5$

Si $x_1 = -2 \rightarrow y_1 = \dfrac{10}{-2} = -5$

Si $x_2 = 5 \rightarrow y_2 = \dfrac{10}{5} = 2$

d) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{aligned} y + x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ x - y + 9 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$x^2 - 4x + 15 = 0$

Esta ecuación no tiene solución real, por lo que el sistema no tiene solución.

078 Resuelve la ecuación.

$$2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$$

Trata de hacerlo sustituyendo en la expresión $x-\dfrac{1}{x}=t$ y obtendrás una ecuación de segundo grado. Calcula las soluciones para la incógnita t y luego sustituye para hallar el valor de x.

$$2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$$

Sustituimos: $x-\dfrac{1}{x}=t$

Resolvemos la ecuación: $2t^2-3t=0$

$t_1=\dfrac{3}{2}$ $\quad t_2=0$

Sustituimos para calcular x:

$$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

$x_1=-\dfrac{1}{2}$ $\quad x_2=2$

$x_3=-1$ $\quad x_4=1$

079 Determina la solución de estas ecuaciones realizando las sustituciones de variable necesarias.

a) $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+10=0$

b) $\dfrac{x^2}{x^2-6x+9}-\dfrac{6x}{x-3}+8=0$

a) Sustituimos: $t=x-\dfrac{1}{x}=0$

Resolvemos la ecuación: $2t^2-9t+10=0$

$t_1=\dfrac{5}{2}$ $\quad t_2=2$

Sustituimos para calcular x:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

$x_1=\dfrac{1}{2}$ $\quad x_2=2$

$$x+\frac{1}{x}=2$$

$x_3=1$

b) Factorizamos el denominador de segundo grado:

$$\frac{x^2}{(x-3)^2} - \frac{6x}{x-3} + 8 = 0$$

Lo expresamos como una igualdad notable:

$$\left(\frac{x}{x-3} - 3\right)^2 - 1 = 0$$

Sustituimos: $t = \dfrac{x}{x-3} - 3$

Resolvemos la ecuación: $t^2 - 1 = 0$

$t_1 = -1 \qquad t_2 = 1$

Sustituimos para calcular x:

$$1 = \frac{x}{x-3} - 3 \rightarrow x_1 = 4$$

$$-1 = \frac{x}{x-3} - 3 \rightarrow x_2 = 6$$

080 **Si Max sube de tres en tres los escalones de una torre, tiene que dar 30 pasos menos que si los sube de dos en dos. ¿Cuántos escalones tiene la torre?**

Llamamos x al número de escalones:

$$\frac{x}{3} + 30 = \frac{x}{2} \rightarrow 2x + 180 = 3x \rightarrow x = 180$$

La torre tiene 180 escalones.

081 **El jeque Omar tiene dispuesto en su testamento que la tercera parte de sus camellos se entregue a su primogénito, Alí; la tercera parte del rebaño sea para su segundo hijo, Casim, y el resto vaya a parar a su esposa Fátima. A la muerte de Omar y, una vez hecho el reparto, a Fátima le corresponden 140 camellos. ¿Cuántos camellos componían el rebaño del jeque?**

Llamamos x al número de camellos del jeque:

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{3} = 140 \rightarrow 3x - 2x = 420 \rightarrow x = 420$$

El rebaño del jeque estaba compuesto por 420 camellos.

082 **En una bodega venden dos tipos de vino: crianza y reserva. Averigua cuál es su precio si sabemos que Juan compró 3 botellas de reserva y 12 botellas de crianza y pagó 69 €, mientras que Belén compró 6 botellas de crianza y 8 botellas de reserva, y pagó 80 €.**

Llamamos x al precio de la botella de crianza e y al precio de la botella de reserva:

$$\left.\begin{array}{r} 12x + 3y = 69 \\ 6x + 8y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{1.5em}} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{array} \left.\begin{array}{r} 12x + 3y = 69 \\ -12x - 16y = -160 \end{array}\right\} \rightarrow -13y = -91 \rightarrow y = 7$$

$6x + 8 \cdot 7 = 80 \rightarrow x = 4$

El precio de la botella de crianza es de 4 € y el precio de la botella de reserva es de 7 €.

083 ●●○ Esther viaja de Barcelona a Sevilla en su coche. Sale a las 8 de la mañana y lleva una velocidad constante de 90 km/h. A 110 km de Barcelona, Juan coge, a esa misma hora, un autobús que viaja a 70 km/h, con la misma dirección que Esther. ¿A qué hora se encuentra Esther con el autobús? ¿Qué distancia ha recorrido cada uno?

El tiempo que tardan en encontrarse es x, y como:
$90x = 110 + 70x \rightarrow 20x = 110 \rightarrow x = 5{,}5$ horas, se encuentran a las 13 h 30 min. La distancia recorrida por Esther es: $5{,}5 \cdot 90 = 495$ km y la distancia recorrida por Juan es: $495 - 110 = 385$ km.

084 ●●● A las 7 de la mañana, Tomás sale de Zamora con dirección a Cádiz a una velocidad de 75 km/h. A la misma hora, Natalia sale de Cádiz y se dirige hacia Zamora en la misma carretera que Tomás a una velocidad de 60 km/h. ¿A qué hora se cruzarán Tomás y Natalia? ¿A qué distancia estarán de Cádiz?

Siendo x el tiempo que tardan en encontrarse, y considerando que están a una distancia de 660 km:
$75x + 60x = 660 \rightarrow 135x = 660 \rightarrow x = 4{,}888$ horas $= 4$ h 53 min 20 s, es decir, se cruzarán a las 11 h 53 min 20 s y estarán a $4{,}888 \cdot 60 = 293{,}333$ km de Cádiz.

085 ●●○ Tenemos un alambre de 17 cm. ¿Cómo hemos de doblarlo para que forme un ángulo recto de modo que sus extremos queden a 13 cm?

Trozo mayor: x. Trozo menor: $17 - x$. Diagonal: $\sqrt{x^2 + (17 - x)^2}$.

$$x^2 + (17 - x)^2 = 13^2 \rightarrow 2x^2 - 34x + 289 = 169 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{17 + 7}{2} = 12 \\ x_2 = \dfrac{17 - 7}{2} = 5 \end{cases}$$

Las dimensiones son 12 cm y 5 cm.

086 ●●● Un cine tiene igual número de filas que de butacas por fila. El propietario decide remodelarlo quitando una butaca por fila y tres filas. Después de la remodelación, el número de butacas es 323.

a) ¿Cuántas filas tenía el cine antes del cambio?
b) ¿Cuántas butacas hay ahora en cada fila?

Butacas iniciales = filas iniciales = x Butacas finales = $x - 1$ Filas finales = $x - 3$

$$(x - 1)(x - 3) = 323 \rightarrow x^2 - 4x - 320 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 1.280}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4 + 36}{2} = 20 \\ x_2 = \dfrac{4 - 36}{2} = -18 \end{cases}$$

La solución negativa no es válida.

a) El número de filas iniciales era de 20.
b) Ahora hay $20 - 1 = 19$ butacas en cada fila.

087 Reparte el número 20 en dos partes tales que la suma de sus cuadrados valga 202.

Parte 1: x Parte 2: $20 - x$

$x^2 + (20 - x)^2 = 202 \rightarrow 2x^2 - 40x + 400 = 202 \rightarrow x^2 - 20x + 99 = 0$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 396}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{20 + 2}{2} = 11 \\ x_2 = \dfrac{20 - 2}{2} = 9 \end{cases}$$

Las partes son 11 y 9.

088 Para embaldosar un salón de 8 m de largo por 6 m de ancho, se han utilizado 300 baldosas cuadradas. ¿Cuánto mide el lado de las baldosas?

Lado de la baldosa: x

$300x^2 = 8 \cdot 6 \rightarrow x^2 = 0{,}16 \rightarrow x = 0{,}4$ m

El lado de la baldosa mide 40 cm.

089 Dos kilos de albaricoques y tres kilos de fresas cuestan 13 €. Tres kilos de albaricoques y dos kilos de fresas cuestan 12 €. ¿Cuál es el precio del kilo de albaricoques? ¿Y el de fresas?

Albaricoques: x Fresas: y

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \\ 3x + 2y &= 12 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 6x + 9y &= 39 \\ -6x - 4y &= -24 \end{aligned}\right\}$$

Sumando queda: $5y = 15 \rightarrow y = 3, x = 2$

Los albaricoques cuestan 2 €/kg y las fresas 3 €/kg.

090 Se han comprado sellos de 0,26 € y de 0,84 €. En total se ha pagado 5,18 € por 11 sellos. ¿Cuántos sellos son de 0,26 €? ¿Y de 0,84 €?

Sellos de 0,26 €: x Sellos de 0,84 €: y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 11 \\ 0{,}26x - 0{,}84y &= 5{,}18 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 11 - y \rightarrow 2{,}86 - 0{,}26y + 0{,}84y = 5{,}18 \rightarrow y = 4, x = 7.$$

Hay 7 sellos de 0,26 € y 4 sellos de 0,84 €.

091 En una compra se han utilizado monedas de 2 € y billetes de 5 €. En total, son 13 monedas y billetes y se ha pagado 32 €. ¿Cuántas monedas de 2 € se utilizan? ¿Y cuántos billetes de 5 €?

Monedas: x Billetes: y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 13 \\ 2x - 5y &= 32 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 13 - y \rightarrow 26 - 2y + 5y = 32 \rightarrow y = 2, x = 11$$

Se utilizan 11 monedas de 2 € y 2 billetes de 5 €.

092 Para una merienda se han comprado bocadillos de jamón, a 2,80 € la unidad, y de queso, a 2,50 €. En total se pagan 48 € por 18 bocadillos. ¿Cuántos bocadillos se compran de jamón? ¿Y de queso?

Jamón: x Queso: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 18 \\ 2{,}80x - 2{,}50y = 48 \end{array}\right\} \rightarrow x = 18 - y \rightarrow 50{,}4 - 2{,}8y + 2{,}5y = 48 \rightarrow y = 8,\ x = 10.$$

Se compran 10 bocadillos de jamón y 8 de queso.

093 Se mezcla vino de 12 €/ℓ con vino de 15 €/ℓ, de modo que resultan 50 ℓ de vino de 13 €/ℓ de mezcla. ¿Cuántos litros de cada tipo de vino se han mezclado?

Vino de 12 €/ℓ: x Vino de 15 €/ℓ: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ 12x + 15y = 50 \cdot 13 \end{array}\right\} \rightarrow x = 50 - y \rightarrow 600 - 12y + 15y = 650 \rightarrow y = \frac{50}{3},\ x = \frac{100}{3}$$

Se mezclan $\frac{100}{3}$ litros de vino de 12 €/ℓ y $\frac{50}{3}$ litros de vino de 15 €/ℓ.

094 Se han mezclado 40 kg de café, a 10 €/kg, con otra cantidad de café a 14 €/kg. ¿Cuántos kilos se han usado de cada clase si se vende la mezcla a 12,80 €/kg?

Café de 14 €/kg: x Total de café: y

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 40 \\ 12{,}8y - 14x = 400 \end{array}\right\} \rightarrow y = 40 + x$$

$$512 + 12{,}8x - 14x = 400 \rightarrow x = 93{,}3;\ y = 133{,}3$$

Se han usado 93,3 kg de café de 14 €/kg para obtener 133,3 kg.

095 Para hacer un lingote de 9 kg de oro de ley 0,85 se funde oro de ley 0,81 con oro de ley 0,9. ¿Qué cantidad de cada ley hay que tomar?

Kilos de oro de ley 0,81: x Kilos de oro de ley 0,9: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ 9 \cdot 0{,}85 = x \cdot 0{,}81 + y \cdot 0{,}9 \end{array}\right\} \rightarrow y = 9 - x$$

$$\rightarrow 9 \cdot 0{,}85 = x \cdot 0{,}81 + (9 - x) \cdot 0{,}9 \rightarrow 0{,}09x = 0{,}45 \rightarrow x = 5,\ y = 4$$

Se toman 5 kg de ley 0,81 y 4 kg de ley 0,9.

096 Se dispone de 7.500 g de plata de ley 0,94. ¿Con qué cantidad de otro metal menos valioso hay que fundirla para hacer un lingote de ley 0,8? ¿Cuánto pesará el lingote?

Otro metal: x Total: y

$$\left.\begin{array}{r} y - x = 7.500 \\ 0{,}8y = 7.500 \cdot 0{,}94 \end{array}\right\} \rightarrow y = 8.812{,}5;\ x = 1.312{,}5.$$

Hay que fundirla con 1.312,5 g de oro, y el lingote pesará 8.812,5 g.

097 Se dispone de 3.500 g de oro de ley 0,85. ¿Con qué cantidad de oro puro habría que fundirlo para conseguir un lingote de ley 0,88? ¿Cuánto pesará el lingote?

Oro: x Total: y

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 3.500 \\ 0{,}88y - x &= 3.500 \cdot 0{,}85 \end{aligned}\right\} \rightarrow y = 3.500 + x$$

$3.080 + 0{,}88x - x = 2.975 \rightarrow x = 8{,}75; y = 3.508{,}75$

Habría que fundirlo con 8,75 g de oro, y el lingote pesará 3.508,75 g.

098 El perímetro de una parcela rectangular es de 350 m y el triple de su largo es igual al cuádruple de su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

Largo: x Ancho: y

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 350 \\ 3x &= 4y \end{aligned}\right\} \rightarrow x = \frac{4y}{3}$$

$$\frac{8y}{3} + 2y = 350 \rightarrow y = 75, x = 100$$

Las dimensiones de la parcela son 100 m y 75 m.

099 Las edades de Marta, Miguel y Carmen suman 94 años. Dentro de diecisiete años las edades de Marta y Miguel sumarán un siglo. Calcula sus edades, sabiendo que Marta le lleva siete años a Carmen.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 94 \\ x + 17 + y + 17 &= 100 \\ x &= z + 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 94 \\ x + y &= 66 \\ x - z &= 7 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3 = E_3 + E_1} \left.\begin{aligned} x + y + z &= 94 \\ x + y &= 66 \\ 2x + y &= 101 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{E_3 = E_3 - E_2} \left.\begin{aligned} x + y + z &= 94 \\ x + y &= 66 \\ x &= 35 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} x &= 35 \\ y &= 31 \\ z &= 28 \end{aligned}$$

Marta tiene 35 años, Miguel tiene 31 años y Carmen tiene 28 años.

100 Tres amigos compran acciones de tres valores: la empresa aseguradora ABX (A), el Banco BETRIX (B) y la empresa de construcciones CONSUR (C). Calcula cuánto vale cada una de las acciones si:

- Félix ha comprado 100 acciones de A, 60 de B y 20 de C, y ha tenido que pagar 1.660 €.
- Damián ha comprado 60 acciones de A, 10 de B y 100 de C, y ha desembolsado 1.570 €.
- Carlos, que ha gastado 1.560 €, tiene 30 acciones de A y 150 de C.

$$\left.\begin{aligned} 100x + 60y + 20z &= 1.660 \\ 60x + 10y + 100z &= 1.570 \\ 30x + 150z &= 1.560 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 5x + 3y + z &= 83 \\ 6x + y + 10z &= 157 \\ x + 5z &= 52 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_2 = 3E_2 - E_1} \left.\begin{aligned} 5x + 3y + z &= 83 \\ 13x + 29z &= 388 \\ x + 5z &= 52 \end{aligned}\right\}$$

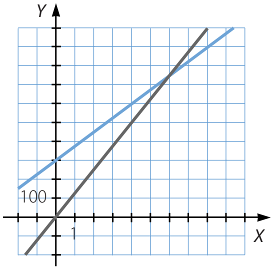
$$\xrightarrow{E_3 = 13E_3 - E_2} \left.\begin{aligned} 5x + 3y + z &= 83 \\ 13x + 29z &= 388 \\ 36z &= 288 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} x &= 12 \\ y &= 15 \\ z &= 8 \end{aligned}$$

Las acciones de A valen 12 €, las acciones de B valen 15 € y las acciones de C valen 8 €.

101 En dos empresas, A y B, hay un puesto de comercial vacante. En la empresa A pagan de salario 300 € fijos más 75 € por cada venta, y en la empresa B se cobra 125 € por cada venta, sin fijo. ¿A partir de cuántas ventas se cobra más en la empresa B que en A?

Salario en la empresa A: $y = 300 + 75x$

Salario en la empresa B: $y = 125x$

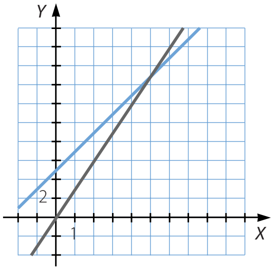


A partir de 6 ventas se cobra más en la empresa B que en la empresa A.

102 En la playa Miralinda alquilan sillas y tumbonas. Por cada silla cobran 3 € a la hora y por cada tumbona 5 €, más 2 € por cada hora.
¿A partir de cuántas horas es más económico alquilar una tumbona que una silla?

Coste de las sillas: $y = 3x$

Coste de las tumbonas: $y = 5 + 2x$



A partir de 5 horas es más económica una tumbona que una silla.F

103 Un comerciante compra melones a 40 céntimos/kg y los vende a 60 céntimos. Halla cuántos kilogramos de melones compró si se le estropearon 10 kg y obtuvo 42 €.

Llamamos x al número de kilogramos de melones que compró:

$0{,}20(x - 10) = 42$

$x = 220$

El comerciante compró 220 kg de melones.

104 **Carmen se dispone a invertir 100.000 €. En el banco le ofrecen dos productos: Fondo Tipo A, al 4 % de interés anual, y Fondo Riesgo B, al 6 % de interés anual. Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4.500 € de intereses. ¿Cuánto adquirió de cada producto?**

Llamamos x al dinero invertido en el Fondo Tipo A e y al dinero invertido en el Fondo Riesgo B:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 100.000 \\ 0{,}04x + 0{,}06y &= 4.500 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow 4.000 - 0{,}04y + 0{,}06y = 4.500$$
$$\rightarrow 0{,}02y = 500 \rightarrow y = 25.000$$

$x = 100.000 - 25.000 = 75.000$

Adquirió 75.000 € del Fondo Tipo A, y 25.000 € del Fondo Riesgo B.

105 **Un ciclista y un coche parten uno al encuentro del otro desde dos ciudades separadas por 180 km. Sabiendo que el ciclista avanza cuatro veces más despacio que el coche y que tardan 1 h 48 min en encontrarse, ¿cuál es la velocidad de cada uno?**

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el ciclista e y a su velocidad:

1 h 48 min = 1,8 h

$$\left.\begin{aligned} x &= 1{,}8y \\ 180 - x &= 7{,}2y \end{aligned}\right\} \rightarrow 180 - 1{,}8y = 7{,}2y \rightarrow y = 20$$

$x = 1{,}8 \cdot 20 = 36$

La velocidad del ciclista es de 20 km/h, y la velocidad del coche es de 80 km/h.

106 **Un camión sale de una ciudad a 80 km/h y dos horas después parte en la misma dirección un coche a 100 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo y cuánta distancia habrá recorrido hasta ese momento?**

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el camión e y al tiempo que tarda en alcanzarlo:

$$\left.\begin{aligned} x &= 80y \\ x + 160 &= 100y \end{aligned}\right\} \rightarrow 80y + 160 = 100y \rightarrow y = 8$$

$x = 80 \cdot 8 = 640$

Tardará 8 horas en alcanzarlo y habrá recorrido 800 kilómetros.

107 **Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos en 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m^2. Halla las dimensiones del rectángulo.**

Llamamos x al lado menor del rectángulo e y a su área:

$$\left.\begin{aligned} x(x + 2) &= y \\ (x + 2)(x + 4) &= y + 40 \end{aligned}\right\} \rightarrow x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 40 \rightarrow 4x = 32 \rightarrow x = 8$$

$y = 8(8 + 2) = 80$

Los lados del rectángulo miden 8 y 10 m, respectivamente.

108 **Calcula un número, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.**

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la cifra de las unidades:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 14 \\ 10y + x + 18 &= 10x + y \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} y &= 14 - x \\ 9y - 9x + 18 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\to 126 - 9x - 9x + 18 = 0 \to 18x = 144 \to x = 8$$

$y = 14 - 8 = 6$

El número es 86.

109 **El alquiler de una tienda de campaña cuesta 80 € al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión: «Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 € menos cada uno». ¿Cuántos amigos van de excursión?**

Llamamos x al número de amigos de Inés, e y al dinero que tiene que pagar cada uno:

$$\left.\begin{aligned} xy &= 80 \\ (x + 3)(y - 6) &= 80 \end{aligned}\right\} \to \left(\frac{80}{y} + 3\right)(y - 6) = 80 \to 80 - \frac{480}{y} + 3y - 18 = 80$$

$$\to y^2 - 6y - 160 = 0$$

$$y = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-160)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 26}{2} \to \begin{cases} y_1 = -10 \to \text{Solución no válida} \\ y_2 = 16 \end{cases}$$

Si $y_2 = 16 \to x_2 = \dfrac{80}{16} = 5$

Van de excursión 5 amigos.

110 **Jacinto está cercando un terreno de forma rectangular. Cuando lleva puesto alambre a dos lados consecutivos del terreno, se da cuenta de que ha gastado 170 m de alambre. Si sabe que la diagonal del rectángulo mide 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?**

Llamamos x e y a las dimensiones del terreno:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 170 \\ x^2 + y^2 &= 130^2 \end{aligned}\right\} \to y^2 - 170y + 6.000 = 0$$

$$y = \frac{-(-170) \pm \sqrt{(-170)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6.000}}{2 \cdot 1} = \frac{170 \pm 70}{2} \to \begin{cases} y_1 = 120 \\ y_2 = 50 \end{cases}$$

Si $y_1 = 120 \to x_1 = 170 - 120 = 50$

Si $y_2 = 50 \to x_2 = 170 - 50 = 120$

Las dimensiones del terreno son 120 y 50 m, respectivamente.

El área del terreno mide 6.000 m^2.

111 La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Determina la medida de su lado, y su área.

Llamamos x al lado del hexágono, y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que tiene por catetos a la apotema y la mitad del lado, y por hipotenusa, la longitud del lado:

$$x^2 = 8^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 = 256 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{256}{3}} \rightarrow x_1 = -\frac{16\sqrt{3}}{3} \qquad x_2 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

La longitud del lado es $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm.

El área de un polígono regular es: $A = \frac{P \cdot a_p}{2}$

Por tanto, el área mide: $A = 128\sqrt{3}$ cm^2

112 Averigua las dimensiones que tiene un pliego rectangular de papel, sabiendo que si dejamos los márgenes laterales de 1 cm y los verticales de 2,5 cm, el área es 360 cm^2, y que si los márgenes laterales son de 2 cm y los verticales son de 1,25 cm, el área es la misma.

Llamamos x e y a las dimensiones del pliego:

$$\left.\begin{array}{r}(x-2)(y-5) = 360\\(x-4)(y-2{,}5) = 360\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x = \dfrac{350+2y}{y-5}\\[2mm] x = \dfrac{350+4y}{y-2{,}5}\end{array}\right\} \rightarrow 2y^2 - 15y - 875 = 0$$

$$y = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4\cdot 2\cdot(-875)}}{2\cdot 2} = \frac{15 \pm 85}{4} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{35}{2}\\ y_2 = 25\end{cases}$$

$$\text{Si } y_1 = -\frac{35}{2} \rightarrow x_1 = \frac{350 + 2\cdot\dfrac{-35}{2}}{\dfrac{-35}{2} - 5} = -14 \qquad \text{Si } y_2 = 25 \rightarrow x_2 = \frac{350 + 2\cdot 25}{25-5} = 20$$

Las dimensiones del pliego son 20 y 25 cm, respectivamente.

113 Calcula un número entero, sabiendo que si al cuadrado del siguiente número le restamos ocho veces su inverso obtenemos 23.

Llamamos x al número:

$$(x+1)^2 - \frac{8}{x} = 23 \rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 8 = 23x \rightarrow x^3 + 2x^2 - 22x - 8 = 0$$

	1	2	−22	−8
4		4	24	8
	1	6	2	0

$$x^2 + 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - \sqrt{7}\\ x_2 = -3 + \sqrt{7}\end{cases}$$

$x_1 = -3 - \sqrt{7} \qquad x_2 = -3 + \sqrt{7} \qquad x_3 = 4$

El número entero es 4.

114 Si aumentáramos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.

Llamamos x a la arista del cubo:

$(x+4)^3 = 8x^3 \rightarrow -7x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -7 & 12 & 48 & 64 \\ 4 & & -28 & -64 & -64 \\ \hline & -7 & -16 & -16 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 4$

$-7x^2 - 16x - 16 = 0 \rightarrow 7x^2 + 16x + 16 = 0$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 7 \cdot 16}}{2 \cdot 7} = \frac{-16 \pm \sqrt{-192}}{14} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

La longitud de la arista es de 4 cm.

115 Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.

Llamamos x al precio de las vacas, y al precio de los terneros y z al precio de las ovejas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 16z \\ x + 4z = 3y \\ 3y + 8z = 4x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4z \\ y = \dfrac{8}{3}z \end{array}\right\}$$

Una vaca vale lo mismo que cuatro ovejas, y un ternero cuesta igual que ocho terceras partes del precio de una oveja.

116 Un número que tiene tres cifras lo representamos en la forma *abc*. Determínalo, sabiendo que si escribes *cab*, el número disminuye en 459 unidades; si escribes *bac*, el número disminuye en 360 unidades, y que *bca* es 45 unidades menor que *bac*.

A la cifra de las centenas la llamamos a, a la cifra de las decenas b y a la cifra de las unidades c:

$$\left.\begin{array}{r} 100a + 10b + c = 100c + 10a + b + 459 \\ 100a + 10b + c = 100b + 10a + c + 360 \\ 100b + 10c + a = 100b + 10a + c - 45 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 90a + 9b - 99c = 459 \\ 90a - 90b = 360 \\ -9a + 9c = -45 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 10a + b - 11c = 51 \\ 10a - 10b = 40 \\ -a + c = -5 \end{array}\right\} \xrightarrow{a = c+5} \left.\begin{array}{r} b - c = 1 \\ -10b + 10c = -10 \end{array}\right\}$$

$a = c + 5$ y $b = c + 1$

Para determinar la solución sabemos que los tres números son enteros y, por tanto, c es un número de 0 a 9. Como $a = c + 5$, c solo puede valer 0, 1, 2, 3 y 4. Para cada uno de estos valores de c resultan a y b.

Si $c = 0$, entonces: $a = 5$ y $b = 1$. El número es 510.

Si $c = 1$, entonces: $a = 6$ y $b = 2$. El número es 621.

Si $c = 2$, entonces: $a = 7$ y $b = 3$. El número es 732.

Si $c = 3$, entonces: $a = 8$ y $b = 4$. El número es 843.

Si $c = 4$, entonces: $a = 9$ y $b = 5$. El número es 954.

117 El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?

Llamamos x al número:

$$3x - \frac{x}{2} > 3 \rightarrow 6x - x > 6 \rightarrow x > \frac{6}{5} \rightarrow \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$$

Los números que cumplen esta propiedad son los números mayores que $\frac{6}{5}$.

118 De un número se sabe que si a su cuadrado le restamos su mitad, se obtiene un número menor que 1. ¿Qué número puede ser?

Llamamos x al número: $x^2 - \frac{x}{2} < 1 \rightarrow 2x^2 - x - 2 < 0$

Resolvemos la ecuación: $2x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 - (-10) - 1 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 - 0 - 1 < 0 \rightarrow \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 - 10 - 1 > 0 \rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Los números pedidos son los números mayores que $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ y menores que $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

119 ¿Es cierto que la suma de un número y de su cuadrado es siempre positiva? ¿Qué números cumplen esa condición?

Llamamos x al número:

Vemos que no se verifica que: $-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

$x + x^2 > 0$

Resolvemos la ecuación: $x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -0,5 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 > 0 \rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -0,5 \rightarrow (-0,5)^2 - 0,5 < 0 \rightarrow (-1, 0)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 10 > 0 \rightarrow (0, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

120 **Encuentra todos los números enteros que, multiplicados por el siguiente número, den un resultado menor que 24.**

Llamamos x al número: $x(x+1) < 24 \rightarrow x^2 + x - 24 < 0$

Resolvemos la ecuación: $x^2 + x - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{97}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{97}}{2} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 24 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 + 0 - 24 < 0 \rightarrow \left(\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 10 - 24 > 0 \rightarrow \left(\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}\right)$.

Los números pedidos son los números mayores que $\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}$ y menores que $\dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}$.

121 **Determina para qué valores de x es posible realizar las operaciones indicadas.**

a) $\sqrt{5-3x}$

b) $\sqrt{x-3}$

c) $\sqrt{4-3x-x^2}$

d) $\log(2-5x)$

e) $\log(6-x-x^2)$

f) $\log(x^2-2x+1)$

a) $5 - 3x \geq 0 \rightarrow x \leq \dfrac{5}{3}$

$\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right]$

b) $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

$[3, +\infty)$

c) $4 - 3x - x^2 \geq 0$

Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 3 \cdot (-10) + 4 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 3 \cdot 0 + 4 > 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 3 \cdot 10 + 4 < 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-4, 1]$.

d) $2 - 5x > 0 \rightarrow x < \dfrac{2}{5}$

$$\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$$

e) $6 - x - x^2 > 0$

Resolvemos la ecuación: $-x^2 - x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - (-10) + 6 < 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 0 + 6 > 0 \rightarrow (-3, 2)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 10 + 6 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 2)$.

f) $x^2 - 2x + 1 > 0$

La ecuación solo se anula para $x = 1$, y en el resto de los valores el primer miembro de la inecuación es siempre positivo.

$x \neq 1$

122 ●●● **Jesús y Beatriz quieren saber cuánto cuesta un bote de refresco, pero no recuerdan exactamente lo que pagaron. Jesús compró 8 botes y sabe que pagó con un billete de 5 € y que le devolvieron una moneda de 2 € y algo más de dinero. Beatriz compró 18 botes y recuerda que pagó la cantidad exacta con un billete de 5 €, una moneda de 2 € y alguna moneda más. Con estos datos, ¿qué podrías decir del precio del bote de refresco?**

Llamamos x al precio del bote de refresco:

$$\left.\begin{array}{r} 5 - 8x > 2 \\ 18x < 7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x < \dfrac{3}{8} \\ x < \dfrac{7}{18} \end{array}\right\}$$

El precio del bote de refresco es menor que 0,375 €.

PARA FINALIZAR...

123 ¿Qué es mayor, $2x^3$ o $x+1$?

$2x^3 > x+1 \rightarrow 2x^3 - x - 1 > 0$
$2x^3 - x - 1 = 0 \rightarrow (x-1)(2x^2+2x+1) = 0 \rightarrow x = 1$
Si $x < 1$, entonces $2x^3$ es menor que $x+1$.
Si $x > 1$. entonces $2x^3$ es mayor que $x+1$.

124 Resuelve este sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}&=1\\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}&=\frac{17}{3}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}&=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\}$$

Sean $A=\frac{1}{x}$, $B=\frac{1}{y}$ y $C=\frac{1}{z}$.

$$\left.\begin{aligned}A+2B-3C&=1\\ 2A-4B+5C&=\frac{17}{3}\\ 3A+6B-2C&=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\\ \xrightarrow{E_2=E_2-2E_1}\\ \xrightarrow{E_3=E_3-3E_1}\end{matrix}\left.\begin{aligned}A+2B-3C&=1\\ -8B+11C&=\frac{11}{3}\\ 7C&=-\frac{7}{3}\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}A&=\frac{11}{6}\\ B&=-\frac{11}{12}\\ C&=-\frac{1}{3}\end{aligned}\right.$$

$x=\frac{6}{11}$, $y=-\frac{12}{11}$, $z=-3$

125 Discute las soluciones de la siguiente ecuación, según los valores de m.

$$x^2-2x+\log m=0$$

Por la definición de logaritmo, $m > 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot \log m$
Para que la ecuación no tenga solución: $4 - 4\log m < 0 \rightarrow (10, +\infty)$
Para que la ecuación tenga una solución: $4 - 4\log m = 0 \rightarrow m = 10$
Para que la ecuación tenga dos soluciones: $4 - 4\log m > 0 \rightarrow (-\infty, 10)$

126 Si las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son x_1 y x_2, escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) Los cuadrados de x_1 y x_2.
b) Los inversos de x_1 y x_2.
c) Los opuestos de x_1 y x_2.

a) $(x-x_1^2)(x-x_2^2)=0 \rightarrow x^2-(x_1^2+x_2^2)x+x_1^2\cdot x_2^2$

b) $\left(x-\frac{1}{x_1}\right)\left(x-\frac{1}{x_2}\right)=0 \rightarrow x^2-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)x+\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=0$

c) $(x+x_1)(x+x_2)=0 \rightarrow x^2+(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2=0$

127 **Halla la relación entre los coeficientes de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ y la suma, el producto y la suma de los dobles productos de sus tres raíces.**

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0 \rightarrow x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$

Dividiendo la ecuación de tercer grado entre el coeficiente del monomio de mayor grado, y comparando los coeficientes, se obtiene que:

El coeficiente de segundo grado es el opuesto a la suma de las tres raíces.

El coeficiente de primer grado es la suma del resultado de multiplicar las raíces dos a dos.

El término independiente es el opuesto del producto de las tres raíces.

128 **Juan y Luis suben en una escalera mecánica. Juan sube tres veces más rápido que su amigo, haciéndolo ambos de peldaño en peldaño. Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis contó 50 escalones. Con esos datos, calcula los peldaños «visibles» de la escalera.**

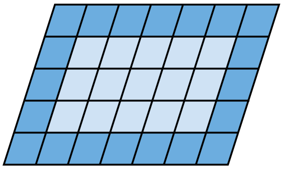
Mientras Juan sube un escalón, la escalera mecánica ha subido x escalones, y el número de escalones visibles es $75 + 75x$.

Luis sube 50 escalones. Como lo hace tres veces más despacio que Juan, mientras que Luis sube un escalón, la escalera sube $3x$. El número de escalones visibles es $50 + 150x$.

Por tanto, resulta que: $75 + 75x = 50 + 150x \rightarrow x = \frac{1}{3}$

El número de peldaños «visibles» es 100.

129 **Tenemos un suelo rectangular, formado por baldosas enteras cuadradas de color claro, que está rodeado de baldosas oscuras, también cuadradas. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo claro para que el número de baldosas de la zona clara sea igual al de la franja oscura que lo rodea?**



Sean x e y el número de baldosas claras que hay en el largo y el ancho.

$(x + 2)(y + 2) = 2xy \rightarrow$ Esta ecuación tiene infinitas soluciones.

Una solución de esta ecuación es: $x = 10$ e $y = 3$

Es decir, el rectángulo claro tendrá 10 baldosas de largo y 3 baldosas de ancho.