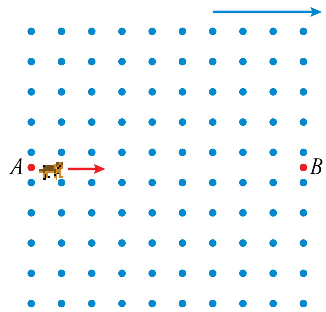
Resuelve

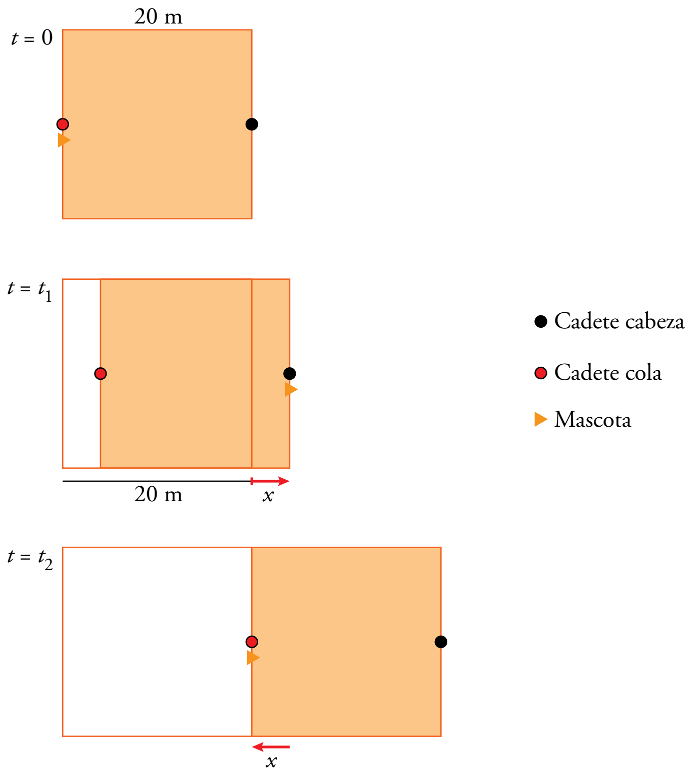
Página 75

Los cadetes que desfilan con su mascota

Una compañía de cadetes, formada en cuadro de 20 metros de lado, avanza con paso regular. La mascota de la compañía, un pequeño perro, parte del centro de la última fila, punto *A*, camina en línea recta hasta el centro de la fila de cabeza, punto *B*, y regresa del mismo modo hasta el centro de la última fila. En el momento de volver a alcanzar *A*, los cadetes han recorrido exactamente 20 metros. Suponiendo que el perro camina con velocidad constante y que no pierde tiempo en los giros, ¿cuántos metros ha recorrido?



Representamos esquemáticamente el movimiento de la mascota y de los cadetes:



Llamamos x al espacio que recorre el soldado de cabeza hasta que la mascota lo alcanza, y usaremos la fórmula $tiempo = \dfrac{espacio}{velocidad}$.

El tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el soldado de cabeza, t_1, es el mismo que el que tarda el soldado de cabeza en recorrer los x metros.

Llamamos $v_{mascota}$ a la velocidad de la mascota y v_{cadete} a la velocidad de los cadetes.

La ventaja del cadete de cabeza es de 20 m.

t_1 = tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el cadete de cabeza

$$t_1 = \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}}$$

t_1 = tiempo que tarda el cadete de cabeza en recorrer los x metros

$$t_1 = \frac{x}{v_{cadete}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$I: \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}} = \frac{x}{v_{cadete}}$$

El espacio recorrido por la mascota cuando avanza con los cadetes es $20 + x$. El espacio recorrido por la mascota al volver es x, puesto que al final se queda a 20 m del principio. Luego el espacio total recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x$.

El tiempo total durante el cual avanza la compañía, t_2, es el mismo que el tiempo que está la mascota corriendo.

t_2 = tiempo total durante el cual avanza la compañía

$$t_2 = \frac{20}{v_{cadete}}$$

t_2 = tiempo total durante el cual corre la mascota

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{mascota}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$II: \frac{20 + 2x}{v_{mascota}} = \frac{20}{v_{cadete}} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20 + 2x}{20}$$

Operamos en la igualdad I:

$$x(v_{mascota} - v_{cadete}) = 20 \cdot v_{cadete} \rightarrow x \cdot v_{mascota} = 20 \cdot v_{cadete} + xv_{cadete} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \cdot v_{mascota} = v_{cadete}(20 + x) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{mascota} = v_{cadete}\frac{(20 + x)}{x} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20}{x} + 1$$

Hemos obtenido la razón entre las dos velocidades. Usamos esta relación en la igualdad II y obtenemos:

$$\frac{20 + 2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow 1 + \frac{2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow \frac{2x}{20} = \frac{20}{x}$$

Operamos y obtenemos:

$$2x^2 = 400 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

El espacio recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x = 20 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 20$ m.

1 Las igualdades en álgebra

Página 76

1 ¿Verdadero o falso?

a) La igualdad $x = 3$ es una ecuación porque solo se cumple para $x = 3$.

b) La igualdad $x^2 + 4 = 0$ no es ni ecuación ni identidad, ya que no se cumple para ningún valor de x.

c) Si una igualdad se cumple para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$…, entonces es una identidad.

a) Verdadero, pues no es cierta la igualdad para todos los números reales.

b) Falso. Es una ecuación sin soluciones.

c) Falso. La igualdad se tiene que cumplir para todos los números reales, no solo para los naturales.

2 Factorización de polinomios

Página 77

1 Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1)$

b) $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x + 3)$

c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3)$

d) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1)$

a)

	1	–3	2	4
–1		–1	4	–6
	1	–4	6	–2

Cociente: $x^2 - 4x + 6$

Resto: –2

b)

	5	14	–5	–4	5	–2
–3		–15	3	6	–6	3
	5	–1	–2	2	–1	1

Cociente: $5x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

Resto: 1

c)

	2	0	–15	–8
3		6	18	9
	2	6	3	1

Cociente: $2x^2 + 6x + 3$

Resto: 1

d)

	1	0	1	0	1
–1		–1	1	–2	2
	1	–1	2	–2	3

Cociente: $x^3 - x^2 + 2x - 2$

Resto: 3

2 a) El polinomio $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ podría ser divisible por $x - a$ para los siguientes valores de a: 1, –1, 2, –2, 5, –5, 10, –10. Comprueba que lo es por $x - 1$, $x - 2$ y $x - 5$.

b) Halla los divisores de estos polinomios:

a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ **b)** $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

a) Por el teorema del resto, el resto de la división entre $x - a$ es igual a $P(a)$. Por tanto, si $P(a) = 0$, el polinomio es divisible entre $x - a$.

$P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$

$P(1) = 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 17 \cdot 1 - 10 = 0 \rightarrow P(x)$ es divisible por $x - 1$.

$P(2) = 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 17 \cdot 2 - 10 = 0 \rightarrow P(x)$ es divisible por $x - 2$.

$P(5) = 5^3 - 8 \cdot 5^2 + 17 \cdot 5 - 10 = 0 \rightarrow P(x)$ es divisible por $x - 5$.

b) • $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

	1	3	–4	–12
2		2	10	12
	1	5	6	0
–2		–2	–6	
	1	3	0	
–3		–3		
	1	0		

$P(x)$ es divisible por $x - 2$, $x + 2$ y $x + 3$.

• $P(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

	1	5	–7	–29	30
2		2	14	14	–30
	1	7	7	–15	0
–3		–3	–12	15	
	1	4	–5	0	
–5		–5	5		
	1	–1	0		
1		1			
	1	0			

$P(x)$ es divisible por $x - 1$, $x - 2$, $x + 3$ y $x + 5$.

Página 79

3 Descompón factorialmente los siguientes polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -9 & 24 & -20 \\
2 & & 2 & -14 & 20 \\
\hline
 & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -10 & \\
\hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x - 2)\ 2\ (x - 5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -3 & -3 & -5 & 2 & 8 \\
2 & & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 \\
\hline
 & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 3 & 3 & 8 & \\
\hline
 & 1 & -3 & -2 & -8 & \boxed{0} & \\
4 & & 4 & 4 & 8 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (no tiene solución)

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x - 1)\ (x + 1)\ (x - 4)\ (x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 6 & 9 & 0 & -1 & -6 & -9 \\
-1 & & -1 & -5 & -4 & 4 & -3 & 9 \\
\hline
 & 1 & 5 & 4 & -4 & 3 & -9 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & -6 & 6 & -6 & 9 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & 3 & -3 & 3 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} & & \\
1 & & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$ (no tiene solución)

$x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x + 3)^2\ (x + 1)\ (x - 1)\ (x^2 + 1)$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 0 & -15 & -5 & 6 \\ 2 & & 8 & 16 & 2 & -6 \\ \hline & 4 & 8 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -4 & -4 & 3 & \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{3}{2}$$

$$4x^4 - 15x^2 - 5x + 6 = 4(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

4 **a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.**

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +4x^3 & +8x^2 & +7x & +4 & x^2 + x + 1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2 + 3x + 4 \\ \cline{1-5} & 3x^3 & +7x^2 & +7x & +4 & \\ & -3x^3 & -3x^2 & -3x & & \\ \cline{2-5} & & 4x^2 & +4x & +4 & \\ & & -4x^2 & -4x & -4 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución).

Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

5 **Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces suyas.**

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

Teniendo en cuenta el dato adicional (que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces), procedemos así:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 7 & 6 & 0 & -1 \\ -1/2 & & -3 & -2 & -2 & 1 \\ \hline & 6 & 4 & 4 & -2 & \boxed{0} \\ 1/3 & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 6 & 6 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$6x^2 + 6x + 6 = 0$

$6(x^2 + x + 1) = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ (no tiene solución)

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)6(x^2 + x + 1) = (2x+1)(3x-1)(x^2 + x + 1)$$

3 Fracciones algebraicas

Página 81

1 ¿Verdadero o falso?

a) $\dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{x+1}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x-3}{x^2-1} = \dfrac{3}{x+1}$

d) $\dfrac{x+1}{x} - 1 = \dfrac{1}{x}$

a) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x+1)(x+1) \neq x^2+1$, luego es falso.

b) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x-1)(x+1) = x^2-1$, luego es verdadero.

c) La primera fracción es el triple de $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, y la segunda es el triple de $\dfrac{1}{x+1}$ que son las fracciones del apartado anterior, luego es verdadero.

d) Operamos en el miembro de la izquierda:

$$\frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

Obtenemos el miembro de la derecha, luego es verdadero.

2 Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ x^2+x = x(x+1) \\ x+1 = x+1 \end{array}\right\} \text{mín.c.m.} = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x} = \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{(2x+1)x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2+x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Las sumamos:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{-2x^2-x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x} = \frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

3 Efectúa:

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x$

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$= \frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$= \frac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x = \dfrac{x+5x(x+1)}{x+1}=\dfrac{x(5x+6)}{x+1}=\dfrac{5x^2+6x}{x+1}$

4 Efectúa estas operaciones:

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5} = \dfrac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5} = \dfrac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(2x+3)(x-2)}=\dfrac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$

5 Calcula:

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right) = \dfrac{x+2}{x}:\dfrac{(x-1)(2x+1)}{3x}=\dfrac{(x+2)\,3x}{x(x-1)(2x+1)}=\dfrac{3(x+2)}{(2x+1)(x-1)}$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4} = \dfrac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)\,x^4}=\dfrac{x^2(x^2-1)\cdot x^2(x^2+1)}{(x^2+1)\,x^4}=\dfrac{x^4(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)\,x^4}=x^2-1$

4 Resolución de ecuaciones

Página 82

Hazlo tú. Resuelve esta ecuación:

$$\mathbf{x^4 - 2x^2 + 1 = 0}$$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 2y + 1 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

1 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\mathbf{x^4 - x^2 - 12 = 0}$ **b)** $\mathbf{x^4 - 8x^2 - 9 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2}$ $\begin{cases} 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ -3 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) $x^2 = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2}$ $\begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -1 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

2 Resuelve:

a) $\mathbf{x^4 + 10x^2 + 9 = 0}$ **b)** $\mathbf{x^4 - x^2 - 2 = 0}$

a) $x^2 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \dfrac{-10 \pm 8}{2}$ $\begin{cases} -1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ -9 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

No tiene solución.

b) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x^2 = -1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$

Página 83

Hazlo tú. a) $\mathbf{\sqrt{19 - 6x} - 2 = x}$ **b)** $\mathbf{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5}$

a) $\sqrt{19-6x} - 2 = x \rightarrow \sqrt{19-6x} = x + 2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$19 - 6x = x^2 + 4x + 4 \rightarrow x^2 + 10x - 15 = 0 \rightarrow x_1 = -5 + 2\sqrt{10},\ x_2 = -5 - 2\sqrt{10}$ (no vale)

Solución: $x = -5 + 2\sqrt{10}$

b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 5 \rightarrow \sqrt{x-2} = 5 - \sqrt{x-3}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x - 2 = x - 10\sqrt{x-3} + 22 \rightarrow 10\sqrt{x-3} = 24 \rightarrow x - 3 = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 \rightarrow x = \left(\dfrac{24}{10}\right)^2 + 3 = \dfrac{219}{25}$, que es válida.

Solución: $x = \dfrac{219}{25}$

3 **Resuelve:**

a) $-\sqrt{2x-3}+1=x$ **b)** $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$ **c)** $2+\sqrt{x}=x$

d) $2-\sqrt{x}=x$ **e)** $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$ **f)** $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

a) $1-x=\sqrt{2x-3}$

$1+x^2-2x=2x-3$

$x^2-4x+4=0;\ x=2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x-3=16+x+7+8\sqrt{x+7}$

$x-26=8\sqrt{x+7}$

$x^2+676-52x=64(x+7)$

$x^2+676-52x=64x+448$

$x^2-116x+228=0$

$$x=\frac{116\pm 12}{2}=\begin{cases}114\\ 2 \to \text{(no vale)}\end{cases}$$

$x=114$

c) $\sqrt{x}=x-2;\ x=x^2+4-4x;\ 0=x^2-5x+4$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\ 1 \to \text{(no vale)}\end{cases}$$

$x=4$

d) $2-x=\sqrt{x};\ 4+x^2-4x=x;\ x^2-5x+4=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4 \to \text{(no vale)}\\ 1\end{cases}$$

$x=1$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$

$3x+3=1+8-2x+2\sqrt{8-2x}$

$5x-6=2\sqrt{8-2x}$

$25x^2+36-60x=4(8-2x)$

$25x^2-52x+4=0$

$$x=\frac{52\pm 48}{50}=\begin{cases}2\\ 0{,}08 \to \text{(no vale)}\end{cases}$$

Así, $x=2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$16(3x+27)=4x^2-120x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \to x=39,\ x=3$

Comprobación:

$x=39 \to \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39} \to 14+2\neq 12 \to$ (no vale)

$x=3 \to \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3} \to 4+2=6$

4 Resuelve:

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ **b)** $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$ **c)** $\sqrt{x+3} + 3 = x$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ **e)** $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$ **f)** $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$

$\sqrt{4x+9} = 2 + \sqrt{2x+1}$

$4x+9 = 4 + 2x + 1 + 4\sqrt{2x+1}$

$x + 2 = 2\sqrt{2x+1}$

$x^2 + 4 + 4x = 4(2x + 1)$

$x^2 - 4x = 0;\ \ x(x-4) = 0$

$x_1 = 0,\ \ x_2 = 4$

b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

$\sqrt{3x+4} = \sqrt{1-x} + 1$

$3x + 4 = 1 - x + 1 + 2\sqrt{1-x}$

$2\sqrt{1-x} = 4x + 2$

$4(1-x) = 16x^2 + 16x + 4$

$4x^2 + 5x = 0 \ \to\ x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{-5}{4}$ (no vale)

$x = 0$

c) $\sqrt{x+3} + 3 = x$

$\sqrt{x+3} = x - 3$

$x + 3 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = \dfrac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \ \to\ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 6$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

$\sqrt{x-2} = -\sqrt{x+1} + 3$

$x - 2 = (x + 1) + 9 - 6\sqrt{x+1}$

$6\sqrt{x+1} = 12$

$36(x + 1) = 144$

$x = 3$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$3x = x + 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x}$

$x - 1 = \sqrt{2}\sqrt{x}$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \ \to\ \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 2 + \sqrt{3}$

f) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$-5-7x+4+x+2\sqrt{-5-7x}\ \sqrt{4+x} = 7-6x$

$\sqrt{(-5-7x)(4+x)} = 4$

$7x^2 + 33x + 36 = 0$

$x = \dfrac{-33 \pm 9}{14} = \begin{cases} x = -\dfrac{12}{7} \\ x = -3 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{-12}{7},\ x_2 = -3$

Página 84

Hazlo tú.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{4}{3}$$

$3(x-2) + 3x = 4x(x-2)$

$2x^2 - 7x + 3 = 0;\ x = \dfrac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

Las dos soluciones son válidas.

5 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$

b) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

a) $10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \dfrac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489;\ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \dfrac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = \dfrac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \dfrac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \dfrac{-2}{3}$

6 **Resuelve:**

a) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$ **b)** $\frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2}$ **c)** $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$

a) $x(x+1) + 2x(x-1) = 3(x^2-1)$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$

$x = 3$

b) $10(x+3) + 2x(x+2) = 3(x^2 + 5x + 6)$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$x_1 = 3;\ x_2 = -4$

c) $35(x+3)(x+1) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35(x^2 + 4x + 3) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$

$35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26$

$26x^2 - 140x - 96 = 0$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases}$$

$x_1 = 6;\ x_2 = \frac{-8}{13}$

Página 85

Hazlo tú.

a) $5^{6-x^2} = \frac{1}{125}$ **b)** $7^{x^2+2x-15} = 1$ **c)** $3^x + 3^{x-1} = 36$

a) $5^{6-x^2} = \frac{1}{125} \rightarrow 5^{6-x^2} = 5^{-3} \rightarrow 6 - x^2 = -3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3$

b) $7^{x^2+2x-15} = 1 \rightarrow 7^{x^2+2x-15} = 7^0 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -5$

c) $3^x + 3^{x-1} = 36$

Hacemos el cambio de variable $3^x = y$. Nos queda:

$y + \frac{y}{3} = 36 \rightarrow y = 27 \rightarrow 3^x = 27 \rightarrow x = 3$

7 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$ **c)** $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$ **d)** $7^{x+2} = 5\,764\,801$

a) $2^{3x} = 2^{-3x-2} \rightarrow 3x = -3x - 2 \rightarrow 6x = -2 \rightarrow x = \frac{-1}{3}$

b) $3^{4-x^2} = 3^{-2} \rightarrow 4 - x^2 = -2 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

c) $\frac{2^{2x-2}}{2^{x+2}} = 186 \rightarrow 2^{2x-2-x-2} = 186 \rightarrow 2^{x-4} = 186 \rightarrow$

$\rightarrow \log 2^{x-4} = \log 186 \rightarrow (x-4) \log 2 = \log 186 \rightarrow x = 4 + \frac{\log 186}{\log 2} = 11{,}54$

d) $7^{x+2} = 7^8 \rightarrow x = 6$

8 Resuelve:

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$

c) $\frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3\,125$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6}$

a) $3^x + 3^x \cdot 9 = 30 \to 3^x(10) = 30 \to 3^x = 3 \to x = 1$

b) $5 \cdot 5^x + 5^x + \frac{5^x}{5} = \frac{31}{5} \to 5^x \cdot \frac{31}{5} = \frac{31}{5} \to x = 0$

c) $\frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3\,125 \to \frac{5^{x^2+1}}{5^{2(x+2)}} = 5^5 \to 5^{x^2+1-2(x+2)} = 5^5 \to$

$\to x^2 + 1 - 2(x-2) = 5 \to x^2 - 2x - 8 = 0 \quad x_1 = -2, \; x_2 = 4$

d) $5^{2x} = 0{,}2^{4x-6} \to 5^{2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-6} \to 5^{2x} = 5^{-(4x-6)} \to 2x = -(4x-6) \to 6x = 6 \to x = 1$

Página 86

Hazlo tú. Resuelve:

a) $\log x - \log 4 = 2$

b) $3 \log_5 (x-1) = \log_5 125$

c) $2 \ln x = \ln (2x+3)$

(Recuerda: *ln* es logaritmo neperiano o logaritmo en base *e*)

a) $\log x - \log 4 = 2 \to \log\left(\frac{x}{4}\right) = \log 10^2 \to \frac{x}{4} = 100 \to x = 400$

b) $3\log_5 (x-1) = \log_5 125 \to 3\log_5 (x-1) = 3\log_5 5 \to x - 1 = 5 \to x = 6$

c) $2\ln x = \ln(2x+3) \to \ln x^2 = \ln(2x+3) \to x^2 = 2x + 3 \to x_1 = 3, \; x_2 = -1$ (no válida)

Solución: $x = 3$

9 ¿Verdadero o falso?

a) Al resolver una ecuación con algún radical cuadrático siempre aparece alguna raíz falsa.

b) 4 y –4 son soluciones de la ecuación $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 4$.

c) 4 y –4 son soluciones de la ecuación $\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = 2$.

a) Falso, hemos resuelto ecuaciones de este tipo en las que todas las soluciones eran válidas.

Ejemplo: $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ en la página 83.

b) Verdadero, si sustituimos x por 4 o por -4 obtenemos una igualdad.

c) Falso, solo es solución $x = 4$. Al sustituir x por -4 no sale una igualdad.

10 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

d) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - y - 12 = 0 \to y = 4,\ y = -3$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - 8y - 9 = 0 \to y = 9,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

c) Hacemos $x^2 = y \to y^2 + 10y + 9 = 0 \to y = -1,\ y = -9$

Soluciones: No hay.

d) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - y - 2 = 0 \to y = 2,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$

11 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$ **c)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$

d) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$ **e)** $\frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2}$ **f)** $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$

a) $10(x + 3) + 10x = 3x(x + 3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \frac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489;\ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x - 2) + 2x(x + 1) = 12x(x - 2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ \ x_2 = \frac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \frac{-2}{3}$

d) $x(x + 1) + 2x(x - 1) = 3(x^2 - 1)$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$

$x = 3$

e) $10(x + 3) + 2x(x + 2) = 3(x^2 + 5x + 6)$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = -4$

f) $35(x + 3)(x + 1) - 35(x^2 + 1) = 26(x^2 - 1)$

$35(x^2 + 4x + 3) - 35(x^2 + 1) = 26(x^2 - 1)$

$35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26$

$26x^2 - 140x - 96 = 0$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases}$$

$x_1 = 6;\ x_2 = \frac{-8}{13}$

12 Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$ **b)** $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$ **c)** $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$ **e)** $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$ **f)** $\sqrt{5x+1} + 2 = \sqrt{27+3x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3$

$x^2 - 4x + 4 = 0;\ x = 2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x + 7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$x^2 - 116x + 228 = 0$

$$x = \frac{116 \pm 12}{2} = \begin{cases} 114 \\ 2 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

$x = 114$

c) $\sqrt{x} = x - 2;\ x = x^2 + 4 - 4x;\ 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

$x = 4$

d) $2 - x = \sqrt{x};\ 4 + x^2 - 4x = x;\ x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \to \text{(no vale)} \\ 1 \end{cases}$$

$x = 1$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8-2x}$

$5x - 6 = 2\sqrt{8-2x}$

$25x^2 + 36 - 60x = 4(8 - 2x)$

$25x^2 - 52x + 4 = 0$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} = \begin{cases} 2 \\ 0{,}08 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

Así, $x = 2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$16(3x+27)=4x^2-120\,x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \rightarrow x=39,\ x=3$

Comprobación:

$x=39 \rightarrow \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39} \rightarrow 14+2\neq 12 \rightarrow$ (no vale)

$x=3 \rightarrow \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3} \rightarrow 4+2=6$

13 **Resuelve:**

a) $\mathbf{2^{3x}=0{,}5^{3x+2}}$

b) $\mathbf{3^{4-x^2}=\frac{1}{9}}$

c) $\mathbf{\frac{4^{x+1}}{2^{x+2}}=186}$

d) $\mathbf{7^{x+2}=5\,764\,801}$

a) $2^{3x}=2^{-3x-2} \rightarrow 3x=-3x-2 \rightarrow 6x=-2 \rightarrow x=\frac{-1}{3}$

b) $3^4-x^2=3^{-2} \rightarrow 4-x^2=-2 \rightarrow x^2=6 \rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

$x_1=\sqrt{6};\ x_2=-\sqrt{6}$

c) $\frac{2^{2x+2}}{2^{x+2}}=186 \rightarrow 2^{2x+2-x-2}=186 \rightarrow 2^x=186 \rightarrow$

$\rightarrow \log 2^x=\log 186 \rightarrow x\ \log 2=\log 186 \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{\log 186}{\log 2}=7{,}54$

d) $7^{x+2}=7^8 \rightarrow x=6$

14 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\mathbf{3^x+3^{x+2}=30}$

b) $\mathbf{5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\frac{31}{5}}$

c) $\mathbf{2\log x-\log(x+6)=3\log 2}$

d) $\mathbf{4\log_2(x^2+1)=\log_2 625}$

a) $3^x+3^x\cdot 9=30 \rightarrow 3^x(10)=30 \rightarrow 3^x=3 \rightarrow x=1$

b) $5\cdot 5^x+5^x+\frac{5^x}{5}=\frac{31}{5} \rightarrow 5^x\cdot\frac{31}{5}=\frac{31}{5} \rightarrow x=0$

c) $\log\frac{x^2}{x+6}=\log 8 \rightarrow x^2=8x+48 \rightarrow x^2-8x-48=0 \rightarrow x=\frac{8\pm 16}{2}=\begin{cases}12\\ -4 \rightarrow \text{(no vale)}\end{cases}$

$x=12$

d) $\log_2(x^2+1)4=\log_2 5^4 \rightarrow x^2+1=5 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

$x_1=2;\ x_2=-2$

5 Resolución de sistemas de ecuaciones

Página 88

1 ¿Verdadero o falso?

a) El sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ **tiene dos soluciones:** $x=4,\ y=1$

b) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene solo dos soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1]$ **y** $[x_2=-2,\ y_2=-1]$

c) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene cuatro soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1];\ [x_2=2,\ y_2=-1]$

$[x_3=-2,\ y_3=1];\ [x_4=-2,\ y_4=-1]$

a) Falso, $x=4$ e $y=1$ no son dos soluciones, sino una solución para cada incógnita, luego son una solución del sistema.

b) Falso, como las dos incógnitas están al cuadrado, también son soluciones $x_3=-2$, $y_3=1$ y $x_4=2$, $y_4=-1$.

c) Verdadero, por el razonamiento del apartado anterior.

2 Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x^2-7=y+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{1}{xy} \\ xy=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2y+1 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2-x^2=16 \\ \sqrt{5-4y}-x=-(x+y) \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y=2x-1 \\ y=x^2-9 \end{array}\right\}$

$x^2-9=2x-1;\ x^2-2x-8=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\dfrac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$x_1=4;\ y_1=7$

$x_2=-2;\ y_2=-5$

b) $\left.\begin{array}{l} y+x=xy-1 \\ xy=6 \end{array}\right\}$

$y=5-x$

$x(5-x)=6;\ 5x-x^2=6;\ x^2-5x+6=0 \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

$x_1=2;\ y_1=3$

$x_2=3;\ y_2=2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y-1} = 2;\ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \rightarrow x = 17$

$y = 0$ (no vale)

$x = 17;\ y = 8$

d) $\sqrt{5-4y} - x = -(x + y);\ \sqrt{5-4y} = -y$

$(\sqrt{5-4y})^2 = y^2;\ 5 - 4y = y^2 \left\langle \begin{array}{l} y = 1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ y = -5 \end{array} \right.$

$25 - x^2 = 16 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

$x_1 = 3;\ y_1 = -5$

$x_2 = -3;\ y_2 = -5$

3 Resuelve:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ x^2 - x - 20 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{array} \right.$

$x_1 = -4;\ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} \log \dfrac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{array}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \dfrac{-5 \pm 13}{8} = \left\langle \begin{array}{l} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{array} \right.$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\ y_2 = \dfrac{-9}{4}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$10y = 27 + y;\ \ 9y = 27;\ \ y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\ \ x = 10y;\ \ x = 30$

$x = 30;\ \ y = 3$

d) $\begin{cases} \log (2x - y^2) = \log (2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases} \to \begin{cases} \log (2x - y^2) = \log (2 - y) + \log 10 \\ 3^{x-1} = (3^3)^{y+3} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} \log (2x - y^2) = \log 10\,(2 - y) \\ 3^{x-1} = 3^{3y+9} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 2x - y^2 = 10\,(2 - y) \\ x - 1 = 3y + 9 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 2x - y^2 + 10y = 20 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$

$x = 10 - 3y$

$2(10 - 3y) - y^2 + 10y - 20 = 0;\ \ y(y - 4) = 0;\ \ y = 4,\ \ y = 0$

$y = 4$ no es válida porque aparecería $\log (-2)$ en la primera ecuación.

$x_1 = 10;\ \ y_1 = 0$

6 Método de Gauss para sistemas lineales

Página 89

1 Reconoce como escalonados y resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left.\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 7 \\ y = \dfrac{2x - 8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$$

$$\text{b) } \left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$$

$$\text{c) } \left.\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}$$

$$\text{d) } \left.\begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$$

2 Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

$$\text{a) } \begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left.\begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = -3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$$

$$\text{b) } \left.\begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + \quad = -5 \\ 5y = -10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-10}{5} = -2 \\ x = \dfrac{-5 - y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$$

$$\text{c) } \left.\begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z = 1 \\ y = \dfrac{5 + z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 0 + 10 - 3 = 15 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

$$\text{d) } \left.\begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{3} = 3 \\ y = \dfrac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$$

Página 90

3 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{5} = 4 \\ y = \dfrac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$$

4 Resuelve:

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} 4x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) + 4 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x + 10z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot (1.^a) + (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) : 2 \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{l} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-1 + x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ z = \dfrac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \dfrac{2x + 4z + 1}{5} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = -1 \end{array}$$

Página 91

5 Intenta resolver por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 2). Por tanto, el sistema es incompatible.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y, z en función de x:

(2.ª) $\rightarrow$ $y = 2x - 1$

(1.ª) $\rightarrow$ $z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$

Soluciones: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{cases}$

Para cada valor de x, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$ Para $x = -2 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$

6 Resuelve:

a) $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 10 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación es absurda. No puede ser 0 = 1. Por tanto, el sistema no tiene solución.

b) $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 9 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación no dice nada. No es una ecuación. Por tanto, solo quedan dos ecuaciones, la 1.ª y la 3.ª.

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z:

$\begin{cases} x + z = 3 \rightarrow x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \rightarrow y = 1 - x + z = 1(3 - z) + z = -2 + 2z \end{cases}$

Soluciones: $\begin{cases} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{cases}$

Para cada valor que le demos a z, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $z = 0 \rightarrow x = 3,\ y = -2.$

Para $z = 4 \rightarrow x = -1,\ y = 6.$

7 Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita

Página 92

1 Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x - 2 \le 10$ **b)** $x - 2 > 1$ **c)** $2x + 5 \ge 6$ **d)** $3x + 1 \le 15$

a) $3x - 2 \le 10 \rightarrow 3x \le 12 \rightarrow x \le 4$

Soluciones: $\{x \,/\, x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Soluciones: $\{x \,/\, x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \rightarrow 2x \ge 1 \rightarrow x \ge \frac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \ge \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \rightarrow 3x \le 14 \rightarrow x \le \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \,/\, x \le \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

2 Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 2 \le 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5 \ge 6 \\ 3x + 1 \le 15 \end{cases}$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \le 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Soluciones:* $\{x \,/\, 3 < x \le 4\} = (3, 4]$

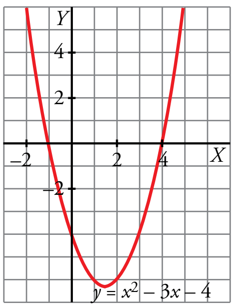
b) $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x \le \frac{14}{3} \end{cases}$ *Soluciones:* $\left\{x \,/\, \frac{1}{2} \le x \le \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

Página 93

3 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 3x - 4 < 0$ **b)** $x^2 - 3x - 4 \ge 0$ **c)** $x^2 + 7 < 0$ **d)** $x^2 - 4 \le 0$

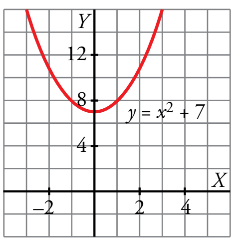
a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \ge 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

c)



$x^2 + 7 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

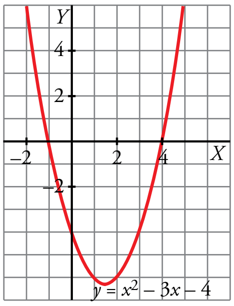
d) $x^2 - 4 \le 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a)



$2x - 7 > 5 \;\to\; 2x > 12 \;\to\; x > 6 \;\to\; (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \;\to\; (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\left.\begin{matrix} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{matrix}\right\}$

- Las soluciones de la primera inecuación son lon puntos del intervalo [–2, 2]. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$$x - 4 > 1 \;\to\; x > 5 \;\to\; (5, +\infty)$$

- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

8 Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Página 94

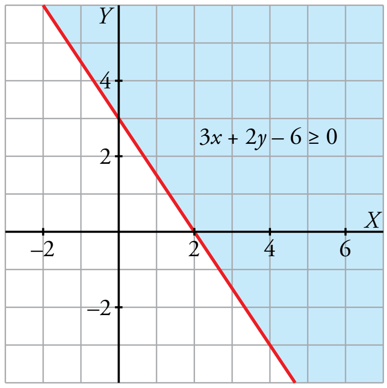
1 Resuelve:

a) $3x + 2y \geq 6$ **b)** $x - y + 1 \geq 0$

a) Dibujamos la recta $r: 3x + 2y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 0 - 6 \geq 0$.

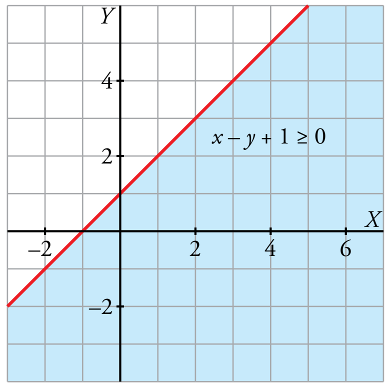
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: x - y + 1 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad: $0 + 0 + 1 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.



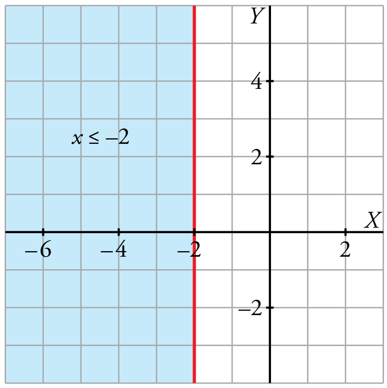
2 Resuelve:

a) $x \leq -2$ **b)** $y > 1$

a) Dibujamos la recta $r: x = -2$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 2 \leq 0$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

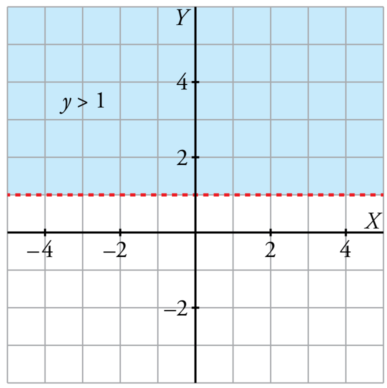


b) Dibujamos la recta $r: y = 1$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 \geq 1$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

La recta $y = 1$ no pertenece al conjunto de soluciones.



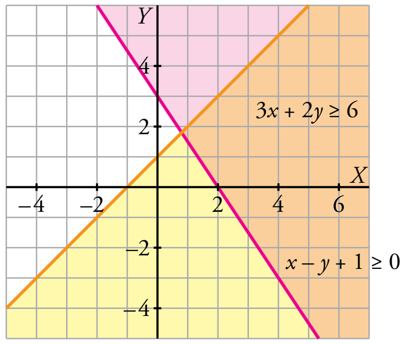
Página 95

3 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

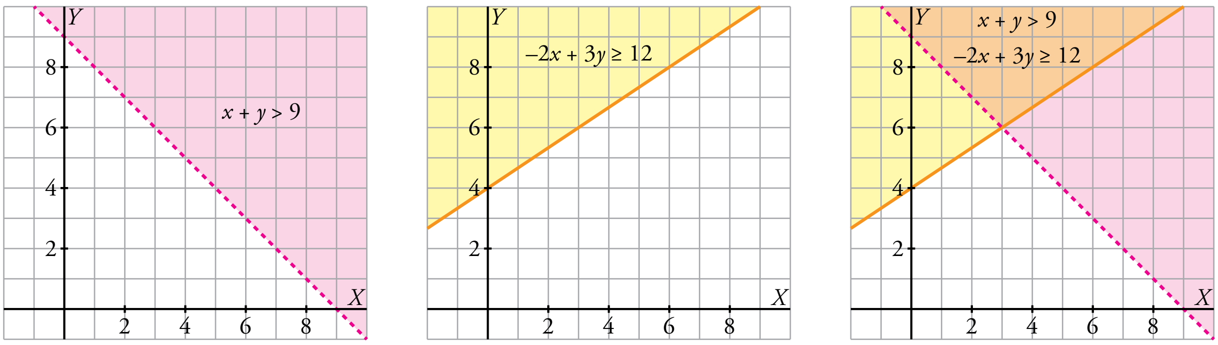
a) $\begin{cases} 3x+2y\ge 6 \\ x-y+1\ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y>9 \\ -2x+3y\ge 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\ge 3 \\ y\le 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y\ge 11 \\ -x+2y\ge 10 \\ y\le 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y\le 11 \\ -x+2y\ge 10 \\ y<9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y<11 \\ -x+2y\le 10 \\ y\ge 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x-3y\le -3 \\ x+y\le 11 \\ x\ge 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x-3y>-3 \\ x+y>11 \\ x\le 2 \end{cases}$

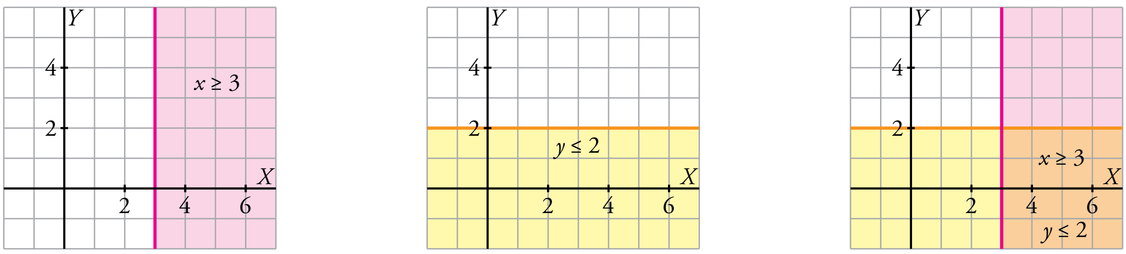
a) Ambas inecuaciones han sido resueltas en el ejercicio 1 anterior. El recinto solución del sistema es la intersección de los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones. Es decir, es el recinto de color marrón.



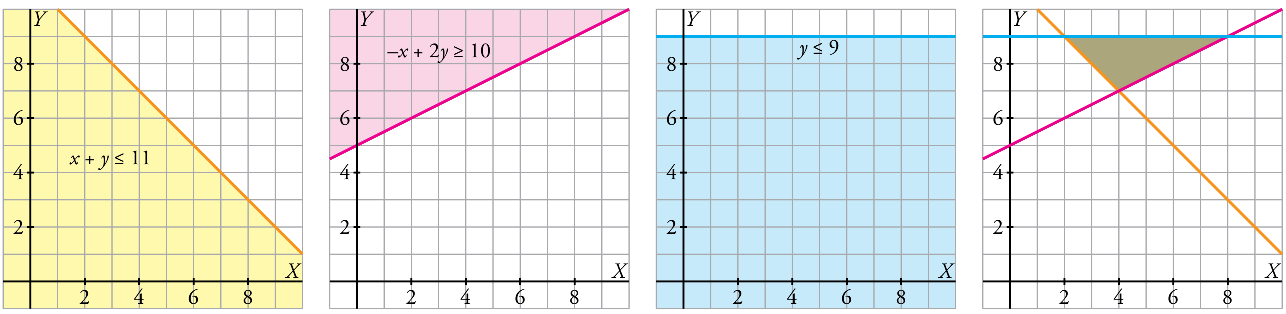
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.



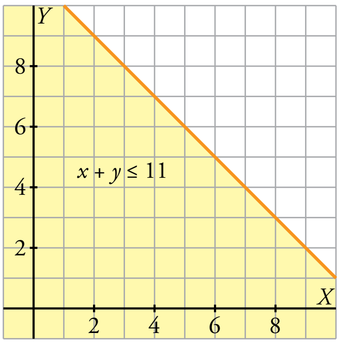
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.

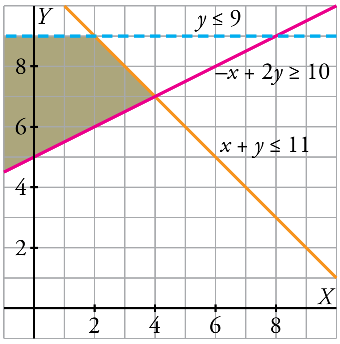


d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los semiplanos. La solución es el triángulo de intersección.

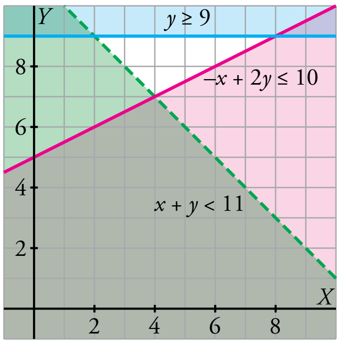


e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. Los semiplanos de la segunda y tercera inecuaciones coinciden con los del apartado d). Representamos el semiplano de la primera inecuación. La solución es la región común a los recintos.

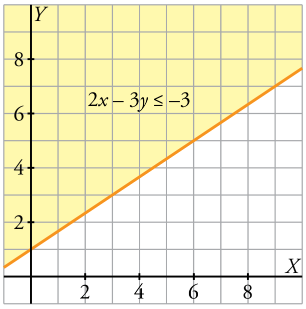


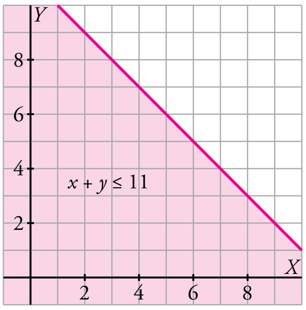


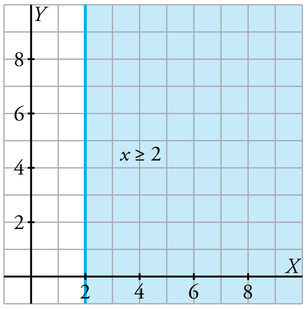
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.

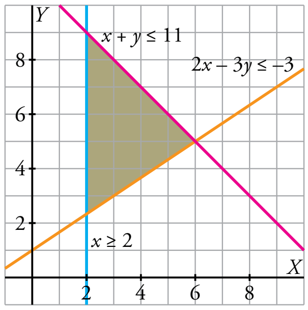


g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. La solución es el triángulo común a los semiplanos.

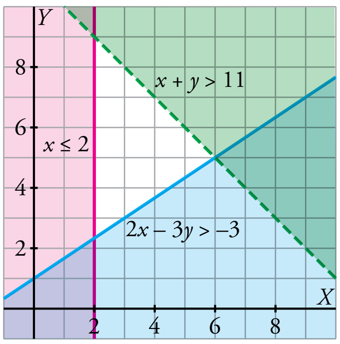








h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.



Ejercicios y problemas resueltos

Página 96

1. Ecuaciones polinómicas de grado tres o superior

Hazlo tú. **Resuelve esta ecuación:**

$$\mathbf{12x^4 + 14x^3 - 2x = 0}$$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común $2x$:

$$2x(6x^3 + 7x^2 - 1) = 0$$

Buscamos ahora las raíces enteras del nuevo polinomio entre los divisores del término independiente y factorizamos.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1)$$

Como no hay más raíces enteras, para descomponer el polinomio de segundo grado resolvemos la ecuación asociada y como el coeficiente principal es 6, nos queda:

$$12x^4 + 14x^3 - 2x = 6 \cdot 2x(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{3}$

2. Ecuaciones con valores absolutos

Hazlo tú. **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $|x^2 - 2| = 2$ **b)** $|3x + 1| = |2x + 4|$

a) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado a).

$x^2 - 2 = 2 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$x^2 - 2 = -2 \to x_3 = 0$

b) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado b).

$3x + 1 = 2x + 4 \to x_1 = 3$

$3x + 1 = -(2x + 4) \to x_2 = -1$

3. Inecuaciones con fracciones algebraicas

Hazlo tú. **Resuelve esta inecuación:**

$$\mathbf{\frac{x-1}{x} \le 0}$$

Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

$x - 1 = 0 \to x_1 = 1;\ x_2 = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	–	–	+
x	–	+	+
$\frac{x-1}{x}$	+	–	+

La solución es el intervalo $(0, 1]$. Añadimos $x = 1$ porque anula la fracción.

Página 97

4. Ecuaciones tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Hazlo tú. Resuelve esta ecuación:

$$x^8 - 15x^4 - 16 = 0$$

Hacemos el cambio de variable: $x^4 = y$

La ecuación queda: $y^2 - 15y - 16 = 0 \rightarrow y_1 = 16,\ y_2 = -1$

$x = \pm\sqrt[4]{16} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

$x = \pm\sqrt[4]{-1}$ que no existe.

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

5. Ecuaciones exponenciales

Hazlo tú. Resuelve las ecuaciones:

a) $3^{x^2+1} = 9^x$

b) $2^{x+1} = 5$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2^x + 2 = 0$

a) $3^{x^2+1} = 9^x \rightarrow 3^{x^2+1} = 3^{2x} \rightarrow x^2 + 1 = 2x \rightarrow x = 1$

b) $2^{x+1} = 5 \rightarrow x + 1 = \log_2 5 \rightarrow x = \log_2 5 - 1 = 1,3219$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2^x + 2 = 0$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$.

$y^2 - 3y + y + 2 = 0 \rightarrow y^2 - 2y + 2 = 0$, que no tiene solución.

6. Ecuaciones logarítmicas

Hazlo tú. Resuelve las ecuaciones:

a) $\ln(2x) = 1$

b) $\log_x 16 = 2$

c) $\log 3 + \log x = \log 15 - \log 5$

a) $\ln(2x) = 1 \rightarrow \ln(2x) = \ln e \rightarrow 2x = e \rightarrow x = \frac{e}{2}$

b) $\log_x 16 = 2 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$

Como la base de un logaritmo no puede ser negativa, la solución es $x = 4$.

c) $\log 3 + \log x = \log 15 - \log 5 \rightarrow \log 3x = \log 75 \rightarrow 3x = 75 \rightarrow x = 25$

Ejercicios y problemas guiados

Página 98

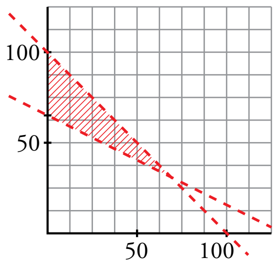
1. Resolución de un problema mediante un sistema de inecuaciones

A una exposición asisten menos de 100 personas y se recaudan más de 260 € con entradas de 2 € y de 4 €. ¿Cuántas entradas de cada tipo han podido ser vendidas?

$x \rightarrow$ número de entradas vendidas de 2 €

$y \rightarrow$ número de entradas vendidas de 4 €

$$\begin{cases} x + y < 100 \\ 2x + 4y > 260 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Cualquier punto de coordenadas enteras del recinto intersección es una solución. Los puntos de las rectas $x + y = 100$ y $2x + 4y = 260$ no forman parte de la solución.

2. Resolución de un problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Un peregrino que recorre el Camino de Santiago avanza a una velocidad de 3,5 km/h. Se da cuenta de que, a ese paso, llegará 1 hora más tarde de lo previsto al albergue.

Entonces, acelera el paso y recorre el resto del camino a 5 km/h, llegando media hora antes del tiempo fijado.

¿Qué distancia le faltaba por recorrer ese día hasta el albergue?

$x \rightarrow$ distancia que falta por recorrer

$t \rightarrow$ tiempo que tardaría si va a 3,5 km/h

$$\left.\begin{aligned} x &= 3,5t \\ x &= 5(t-1,5) \end{aligned}\right\} \rightarrow t = 5,\ x = 17,5$$

Le faltan 17,5 km por recorrer.

3. Resolución de un problema mediante un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Un corredor sube las cuestas a 8 km/h, las baja a 16 km/h y marcha en llano a 11,5 km/h.

En su última maratón tardó 3 horas y media, y si el recorrido hubiese sido en sentido inverso, su tiempo habría sido de 4 horas y cuarto. Sabiendo que una maratón tiene un recorrido de 42 km, ¿cuál fue la longitud del recorrido llano en esta maratón?

x → tramos de subida en la maratón original

y → parte llana en la maratón original

z → tramos de bajada en la maratón original

$$\begin{cases} x+y+z=42 \\ \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{11,5}+\dfrac{z}{16}=3,5 \\ \dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{11,5}+\dfrac{z}{8}=4,25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=42 & (1.^a) \\ 23x+16y+11,5z=644 & (2.^a) \\ 11,5x+16y+23z=782 & (3.^a)-(2.^a) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=42 & (1.^a) \\ 23x+16y+11,5z=644 & (2.^a) \\ -11,5x+11,5z=138 & (3.^a)/11,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=42 & (1.^a) \\ 23x+16y+11,5z=644 & (2.^a)-16\cdot(1.^a) \\ -x+z=12 & (3.^a) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=42 \\ 7x-4,5z=-28 \\ -x+z=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=42 & (2.^a) \\ 2,5z=56 & (3.^a) \\ -x+z=12 & (1.^a) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=22,4 \\ x=10,4 \\ y=9,2 \end{cases}$$

Hay 9,2 km de recorrido llano.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 99

Para practicar

División de polinomios. Regla de Ruffini

1 Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $(4x^5 - 4x + 1) : (2x^2 + 1)$

b) $x^6 : (x^3 + x)$

c) $(x^4 + x^2 - 20x) : (x + 2)$

d) $(x^4 - 81) : (x + 3)$

a) Cociente: $2x^3 - x$ Resto: $-3x + 1$

b) Cociente: $x^3 - x$ Resto: x^2

c) Cociente: $x^3 - 2x^2 + 5x - 30$ Resto: 60

d) Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$ Resto: 0

2 Espresa en la forma $\dfrac{D}{d} = C + \dfrac{r}{d}$.

a) $\dfrac{x-1}{x+3}$ **b)** $\dfrac{3x-1}{x-2}$ **c)** $\dfrac{3x^3-2x^2+1}{x^2+2}$

d) $\dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^3-1}$ **e)** $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$ **f)** $\dfrac{x^5}{x^2+3}$

a) $\dfrac{x-1}{x+3} = 1 - \dfrac{4}{x+3}$

b) $\dfrac{3x-1}{x-2} = 3 + \dfrac{5}{x-2}$

c) $\dfrac{3x^3-2x^2+1}{x^2+2} = 3x - 2 - \dfrac{6x-5}{x^2+2}$

d) $\dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^3-1} = 2x^2 - \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

e) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} = x + 1$

f) $\dfrac{x^5}{x^2+3} = x^3 - 3x + \dfrac{9x}{x^2+3}$

3 Halla el polinomio $P(x)$ sabiendo que:

$$\frac{4x^4-8x^3+4x^2+x-1}{P(x)} = x - 1$$

Despejando $P(x)$ obtenemos:

$$P(x) = \frac{4x^4-8x^3+4x^2+x-1}{x-1} = 4x^3 - 4x^2 + 1$$

4 Averigua usando la regla de Ruffini si el polinomio $2x^4 - 3x + 1$ es divisible entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$. Hazlo también empleando el teorema del resto.

- Para $x = 1$:

	2	0	0	–3	1
1		2	2	2	–1
	2	2	2	–1	$\boxed{0}$

El resto es cero, luego es divisible entre $x - 1$.

- Para $x = -1$:

	2	0	0	–3	1
–1		–2	–2	–2	–5
	2	–2	–2	–5	$\boxed{-4}$

El resto no es cero, luego no es divisible entre $x + 1$.

5 **Calcula el valor de m para que sea exacta la división $(2x^3 - 9x^2 + 2x + m) : (x - 4)$.**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -9 & 2 & m \\ 4 & & 8 & -4 & -8 \\ \hline & 2 & -1 & -2 & \boxed{m-8} \end{array}$$

$m - 8 = 0 \rightarrow m = 8$

Factorización de polinomios

6 **Factoriza cada polinomio y señala sus raíces.**

a) $2x^2 - 8x - 10$

b) $4x^2 - 9$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$

d) $x^4 + x^2 - 20$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3$

f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$

g) $x^5 - 16x$

h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x$

a) $2x^2 - 8x - 10 = 2(x^2 - 4x - 5) = 2(x - 5)(x + 1)$

$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$

b) $4x^2 - 9 = 4 \cdot \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$

$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \pm\dfrac{3}{2}$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x + 1)(x^2 - 5) = (x + 1)\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$

d) $x^4 + x^2 - 20 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 5)$

e) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3 = 2x^3\,(x + 3)(x - 1)(x - 2)$

f) $6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (3x + 2)(2x - 1)(x + 1)$

g) $x^5 - 16x = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

h) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x = 2x(x - 1)(x + 3)(x - 3)$

7 **Saca factor común y usa las identidades notables para factorizar.**

a) $x^7 - 4x^5$

b) $9x^4 - 6x^3 + x^2$

c) $2x^3 - 18x$

d) $12x^3 + 36x^2 + 27x$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5$

f) $6x^9 - 54x$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \dfrac{1}{4}x$

h) $\dfrac{x^6}{4} - x^4 + x^2$

a) $x^7 - 4x^5 = x^5(x - 2)(x + 2)$

b) $9x^4 - 6x^3 + x^2 = x^2(3x - 1)^2$

c) $2x^3 - 18x = 2x(x - 3)(x + 3)$

d) $12x^3 + 36x^2 + 27x = 3x(2x + 3)^2$

e) $98x^3 - 56x^4 + 8x^5 = 2x^3(2x - 7)^2$

f) $6x^9 - 54x = 6x(x^4 - 3)(x^4 + 3)$

g) $25x^{15} - 15x^8 + \dfrac{1}{4}x = \dfrac{1}{4}x(100x^{14} - 60x^7 + 1)$

h) $\dfrac{x^6}{4} - x^4 + x^2 = \dfrac{1}{4}x^2\,(x^2 - 2)^2$

Fracciones algebraicas

8 **Descompón en factores y simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-2}{x+2}$

9 **Reduce al mínimo común denominador y opera:**

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{x-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3} + \dfrac{2x}{x-2} - \dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2x-3}{x-1} + 3$

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{x-2}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)^2 - 3(x-1) + (x-2)}{x^2-1} = \dfrac{x^2+2x+1-3x+3+x-2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{1-x}{x+3} + \dfrac{2x}{x-2} - \dfrac{x^2+5x-10}{x^2+x-6} = \dfrac{(1-x)(x-2) + 2x(x+3) - (x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)} =$

$= \dfrac{-x^2+3x-2+2x^2+6x-x^2-5x+10}{(x+3)(x-2)} = \dfrac{4x+8}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2x-3}{x-1} + 3 = \dfrac{x^2(x-1) - (2x-3)(x+1)^2 + 3(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} =$

$= \dfrac{x^3-x^2-(2x-3)(x^2+2x+1)+3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} =$

$= \dfrac{x^3-x^2-2x^3-4x^2-2x+3x^2+6x+3+3x^3-3x^2+6x^2-6x+3x-3}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{2x^3+x^2+x}{(x+1)^2(x-1)}$

10 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{x} : \dfrac{x-3}{x}$

b) $\dfrac{x+1}{3} \cdot \dfrac{15}{x^2-1}$

c) $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^2$

d) $\dfrac{x-2}{x} : \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2$

a) $\dfrac{3}{x} : \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{3x}{x(x-3)} = \dfrac{3}{x-3}$

b) $\dfrac{x+1}{3} \cdot \dfrac{15}{x^2-1} = \dfrac{15(x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \dfrac{5}{x-1}$

c) $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^3 = \dfrac{x^6}{36} \cdot \dfrac{27}{x^3} = \dfrac{27x^6}{36x^3} = \dfrac{3x^3}{4}$

d) $\dfrac{x-2}{x} : \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{-1} = \dfrac{x}{x-2}$

11 **Opera y simplifica.**

a) $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right):\dfrac{x}{x+1}$

b) $\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right):\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)$

c) $\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$

d) $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$

e) $\left(\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x-2}\right):\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-2}\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right):\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-2x}{x^2-1}:\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{-x+1}{x^2-1}:\dfrac{x}{x+1}=$

$=\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}:\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{-1}{x+1}:\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{-(x+1)}{x(x+1)}=\dfrac{-1}{x}$

b) $\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right):\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]:(x^2-1)=\left[\dfrac{x-1}{x}:\dfrac{x+1}{x}\right]:(x^2-1)=\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}:(x^2-1)=$

$=\dfrac{x-1}{x+1}:(x^2-1)=\dfrac{x-1}{(x+1)(x^2-1)}=\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

c) $\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{x-1-x-1}{x^2-1}:\dfrac{x+1+x-1}{x^2-1}=\dfrac{-2}{x^2-1}:\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{-2(x^2-1)}{2x(x^2-1)}=\dfrac{-1}{x}$

d) $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right](x-1)=\left[\dfrac{x^2+1}{x}:\dfrac{x^2-1}{x}\right](x-1)=\dfrac{x(x^2+1)}{x(x^2-1)}\cdot(x-1)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}\cdot(x-1)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

e) $\left(\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x-2}\right):\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-2}\right)=\dfrac{x^2-4x+4-(x^2-6x+9)}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{x-2+x+3}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{2x-5}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{2x-5}{(x-3)(x-2)}=1$

Ecuaciones de primer y segundo grado

12 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(3x+1)(2x-3)-(x-3)(6x+4)=9x$

b) $\dfrac{x^2-1}{4}-\dfrac{2}{3}(x+1)=\dfrac{(2x-3)^2-(13x-5)}{16}$

c) $\dfrac{1}{6}\left[(13-2x)-2(x-3)^2\right]=-\dfrac{1}{3}(x+1)^2$

d) $\dfrac{x^2-1}{3}+(x-2)^2=\dfrac{x^2+2}{2}$

e) $0{,}5(x-1)^2-0{,}25(x+1)^2=4-x$

f) $(0{,}5x-1)(0{,}5x+1)=(x+1)^2-9$

a) $6x^2-9x+2x-3-6x^2-4x+18x+12=9x$

$2x=9$

$x=\dfrac{9}{2}$

b) $\dfrac{x^2-1}{4}-\dfrac{(2x+2)}{3}=\dfrac{4x^2+9-12x-13x+5}{16}$

$12x^2-12-32x-32=12x^2+27-36x-39x+15$

$-44-32x=42-75x$

$43x=86$

$x=2$

c) $\frac{1}{6}(13-2x-2x^2-18+12x)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$\frac{1}{6}(-2x^2+10x-5)=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-\frac{2x^2}{6}+\frac{10x}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3}$

$-2x^2+10x-5=-2x^2-2-4x$

$14x=3$

$x=\frac{3}{14}$

d) $2x^2-2+6x^2+24-24x=3x^2+6$

$5x^2-24x+16=0$

$x=\frac{24\pm\sqrt{576-320}}{10}$

$x=\frac{24\pm 16}{10}$ $\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=4/5 \end{cases}$

e) $\frac{1}{2}(x^2+1-2x)-\frac{1}{4}(x^2+1+2x)=4-x$

$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-x-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}-\frac{x}{2}=4-x$

$2x^2+2-4x-x^2-1-2x=16-4x$

$x^2-2x-15=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}$ $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$

f) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)=x^2+1+2x-9$

$\frac{x^2}{4}-1=x^2+1+2x-9$

$x^2-4=4x^2+4+8x-36$

$0=3x^2+8x-28$

$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+336}}{6}$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-14/3 \end{cases}$

13 **Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general:**

a) $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$

b) $\frac{x^2-2x+5}{2}-\frac{x^2+3x}{4}=\frac{x^2-4x+15}{6}$

c) $\frac{3x+1}{3}-\frac{5x^2+3}{2}=\frac{x^2-1}{2}-\frac{x+2}{3}$

d) $\frac{3x^2-1}{4}+\frac{1}{2}\left[x^2-2-\frac{1}{2}x\right]=\frac{x^2-5}{4}$

a) $x^2+1+2x-x^2-4+4x=x^2+9+6x+x^2-20$

$6x-3=2x^2+6x-11$

$8=2x^2$ $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x(x - 13) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 13 \end{cases}$

c) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x$

$2x(9x - 4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/9 \end{cases}$

d) $\dfrac{3x^2 - 1}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 1 - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

$3x^2 - 1 + 2x^2 - 4 - x = x^2 - 5$

$4x^2 - x = 0$

$x(4x - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1/4 \end{cases}$

Página 100

14 Resuelve estas ecuaciones (una de ellas no tiene solución y otra tiene infinitas):

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

b) $0,2x + 0,6 - 0,25(x - 1)^2 = 1,25x - (0,5x + 2)^2$

c) $(5x - 3)^2 - 5x(4x - 5) = 5x(x - 1)$

d) $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{(x+1)(x-2)}{2} = \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{2}$

a) $x^2 + 1 + 2x - 8 - 8x = x^2 + 1 - 2x - 8 - 4x$

$0 = 0$

Tiene infinitas soluciones.

b) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{(x^2 + 1 - 2x)}{4} = \dfrac{5x}{4} - \dfrac{x^2}{4} - 4 - 2x$

$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = 25x - 5x^2 - 80 - 40x$

$29x = -87$

$x = -\dfrac{87}{29}$

$x = -3$

c) $25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x$

$9 = 0$

No tiene solución.

d) $4x + 2 - 7x^2 + 14x - 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$

$-7x^2 + 11x + 16 = -7x^2 + 35x - 42$

$x = \dfrac{58}{24} = \dfrac{29}{12}$

15 **Resuelve las siguientes ecuaciones expresando previamente los decimales en forma de fracción:**

a) $0,\widehat{3}x^2 - x - 1,\widehat{3} = 0$

b) $0,\widehat{1}x^2 - 1 = 0$

c) $0,\widehat{1}x^2 - 0,\widehat{5}x = 0$

d) $0,\widehat{1}x^2 - 1,\widehat{7} = x - 4$

a) $\frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3} = 0 \quad x_1 = 4,\ x_2 = -1$

b) $\frac{1}{9}x^2 - 1 = 0 \quad x_1 = -3,\ x_2 = 3$

c) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{9}x = 0 \quad x_1 = 5,\ x_2 = 0$

d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{9} = x - 4 \quad x_1 = 5,\ x_2 = 4$

Ecuaciones bicuadradas

16 **Resuelve y comprueba las soluciones.**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ **c)** $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **d)** $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$

e) $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$ **f)** $x^4 - 4x^2 = 0$ **g)** $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ **h)** $9x^4 - x^2 = 0$

a) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$ — $z = 4$: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$; $z = 1$: $x_3 = 1,\ x_4 = -1$

b) $x^2 = z$

$z^2 + 3z - 4 = 0$

$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$ — $z = -4$ (no vale); $z = 1$: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

c) $x^2 = z$

$z^2 + 3z + 2 = 0$

$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ — $z = -2$ (no vale); $z = -1$ (no vale) (no tiene solución)

d) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 36 = 0$

$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-144}}{2}$ (no tiene solución)

e) $x^2 = z$

$9z^2 - 46z + 5 = 0$

$z = \frac{46 \pm \sqrt{2\,116-180}}{18}$ — $z = \frac{90}{18} = 5$: $x_1 = \sqrt{5},\ x_2 = -\sqrt{5}$; $z = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$: $x_3 = 1/3,\ x_4 = -1/3$

f) $x^2(x^2 - 4) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 2,\; x_3 = -2$

g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

$z = x^2$

$4z^2 - 17z + 4 = 0$

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} \;\begin{cases} z = 4 \;\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\[2ex] z = \dfrac{1}{4} \;\begin{cases} x_3 = 1/2 \\ x_4 = -1/2 \end{cases} \end{cases}$$

h) $9x^4 - x^2 = 0$

$x^2(9x^2 - 1) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = \dfrac{1}{3},\; x_3 = -\dfrac{1}{3}$

17 **Resuelve estas ecuaciones del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ haciendo el cambio de variable $y = x^n$:**

a) $x^6 + 16x^3 + 64 = 0$

b) $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$

c) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$

d) $x^8 + x^4 - 2 = 0$

a) $x^6 + 16x^3 + 64 = 0$

Hacemos el cambio $x^3 = y$.

$y^2 + 16y + 64 = 0 \;\rightarrow\; y = -8$

$x = \sqrt[3]{-8} = -2$

Solución: $x = -2$

b) $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$

Hacemos el cambio $x^3 = y$.

$8y^2 - 7y - 1 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = 1,\; y_2 = -\dfrac{1}{8}$

Soluciones: $x_1 = \sqrt[3]{1} = 1,\; x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}} = -\dfrac{1}{2}$

c) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$

Hacemos el cambio $x^4 = y$.

$y^2 - 82y + 81 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = 81,\; y_2 = 1$

$x = \pm\sqrt[4]{81},\; x = \pm\sqrt[4]{1}$

Soluciones: $x_1 = 3,\; x_2 = -3,\; x_3 = 1,\; x_4 = -1$

d) $x^8 + x^4 - 2 = 0$

Hacemos el cambio $x^4 = y$.

$y^2 + y - 2 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = 1,\; y_2 = -2$

$x = \pm\sqrt[4]{1}$

Soluciones: $x_1 = 1,\; x_2 = -1$

18 Halla las soluciones de estas ecuaciones:

a) $(2x^2+1)(x^2-3)=(x^2+1)(x^2-1)-8$

b) $\frac{1}{4}(3x^2-1)(x^2+3)-(2x^2+1)(x^2-3)=4x^2$

a) $2x^4-6x^2+x^2-3=x^4-x^2+x^2-1-8$

$x^4-5x^2+6=0$

$x^2=z$

$$z=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}\begin{cases} z=3 \begin{cases} x_1=\sqrt{3} \\ x_2=-\sqrt{3}\end{cases} \\ z=2 \begin{cases} x_3=\sqrt{2} \\ x_4=-\sqrt{2}\end{cases}\end{cases}$$

b) $\frac{3x^4+9x^2-x^2-3}{4}-2x^4+6x^2-x^2+3=4x^2$

$3x^4+8x^2-3-8x^4+20x^2+12=16x^2$

$-5x^4+12x^2+9=0$

$$x^2=z \to z=\frac{-12\pm\sqrt{144+180}}{-10}\begin{cases} z=-3/5 \text{ (no vale)} \\ z=3 \begin{cases} x_1=\sqrt{3} \\ x_2=-\sqrt{3}\end{cases}\end{cases}$$

Ecuaciones con radicales

19 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{5x+6}=3+2x$

b) $x+\sqrt{7-3x}=1$

c) $\sqrt{2-5x}+x\sqrt{3}=0$

d) $\sqrt{2x}+\sqrt{5x-6}=4$

e) $\sqrt{3x+4}+2x-4=0$

f) $x-\sqrt{7-3x}=1$

g) $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}=0$

h) $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3-x}=0$

a) $5x+6=9+4x^2+12x$

$4x^2+7x+3=0$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{8}\begin{cases} x=-3/4 \\ x=-1\end{cases}$$

b) $7-3x=1+x^2-2x$

$x^2+x-6=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}\begin{cases} x=2 \text{ (no vale)} \\ x=-3\end{cases}$$

c) $2-5x=\left(-x\sqrt{3}\right)^2$

$2-5x=x^2\cdot 3$

$3x^2+5x-2=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}\begin{cases} x=-2 \\ x=1/3 \text{ (no vale)}\end{cases}$$

d) $\left(\sqrt{5x-6}\right)^2 = \left(4-\sqrt{2x}\right)^2$

$5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$\left(8\sqrt{2x}\right)^2 = (-3x + 22)^2$

$64 \cdot 2x = 9x^2 + 484 - 132x$

$128x = 9x^2 + 484 - 132x$

$0 = 9x^2 - 260x + 484$

$x = \dfrac{260 \pm \sqrt{67\,600 - 17\,424}}{18}$ $\begin{cases} x = 484/18 = 242/9 \ \text{(no vale)} \\ x = 2 \end{cases}$

e) $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = (4 - 2x)^2$

$3x + 4 = 16 + 4x^2 - 16x$

$4x^2 - 19x + 12 = 0$

$x = \dfrac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{8}$ $\begin{cases} x = 4 \ \text{(no vale)} \\ x = 6/8 = 3/4 \end{cases}$

f) $(x - 1)^2 = \left(\sqrt{7-3x}\right)^2$

$x^2 + 1 - 2x = 7 - 3x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$ $\begin{cases} x = -3 \ \text{(no vale)} \\ x = 2 \end{cases}$

g) $\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1, \ x_2 = -1$

h) $\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 = \left(\sqrt{3-x}\right)^2$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = -1$

20 Resuelve:

a) $\dfrac{\sqrt{10+x}}{3} - \dfrac{\sqrt{1-3x}}{2} = 0$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6} + \dfrac{x}{4} = x - 1$

a) $2\sqrt{10+x} = 3\sqrt{1-3x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4(10 + x) = 9(1 - 3x) \ \rightarrow \ x = -1,$ solución válida.

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6} - \dfrac{x}{4} = x - 1 \ \rightarrow \ 2\sqrt{x^2+5} = 3x + 12(x-1) \ \rightarrow \ 2\sqrt{x^2+5} = 15x - 12$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4(x^2 + 5) = (15x - 12)^2 \ \rightarrow \ 4x^2 + 20 = 225x^2 - 360x + 144 \ \rightarrow \ 221x^2 - 360x + 124 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ x_1 = \dfrac{180 + 2\sqrt{1\,249}}{221}$ (válida), $x_2 = \dfrac{180 - 2\sqrt{1\,249}}{221}$ (no válida)

Solución: $x = \dfrac{180 + 2\sqrt{1\,249}}{221}$

21 Resuelve y comprueba las soluciones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{x+3}} = \dfrac{6}{\sqrt{10x+6}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{2}{x-1}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{\sqrt{5x+5}}{x+1}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2} \;\to\; 2 = \sqrt{1-x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros: $4 = 1 - x \;\to\; x = -3$, solución válida.

b) $\dfrac{3}{\sqrt{x+3}} = \dfrac{6}{\sqrt{10x+6}} \;\to\; 3\sqrt{10x+6} = 6\sqrt{x+3} \;\to\; \sqrt{10x+6} = 2\sqrt{x+3} \;\to$

$\to\; 10x + 6 = 4(x + 3) \;\to\; 6x = 6 \;\to\; x = 1$, solución válida.

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{2}{x-1} \;\to\; x - 1 = 2\sqrt{x+2}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros: $x^2 - 2x + 1 = 4x + 8 \;\to\; x_1 = 7$ (válida), $x_2 = -1$ (no válida).

Solución: $x = 7$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{\sqrt{5x+5}}{x+1} \;\to\; 3(x+1) = \sqrt{x+5}\,\sqrt{5x+5}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$(3x + 3)^2 = (x + 5)(5x + 5) \;\to\; 9x^2 + 18x + 9 = 5x^2 + 30x + 25 \;\to\; 4x^2 - 12x - 16 = 0 \;\to$

$\to\; x_1 = 4$ (válida), $x_2 = -1$ (no válida).

Solución: $x = 4$

22 Resuelve aislando el radical y elevando al cubo.

a) $\sqrt[3]{x^2-28} + 3 = 0$

b) $\sqrt[3]{x+1} - 2 = 0$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{13-5x}} = -1$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = 4$

a) $\sqrt[3]{x^2-28} = -3 \;\to\; x^2 - 28 = -27 \;\to\; x^2 = 1 \;\to\; x_1 = 1,\; x_2 = -1$

b) $\sqrt[3]{x+1} - 2 = 0 \;\to\; \sqrt[3]{x+1} = 2 \;\to\; x + 1 = 8 \;\to\; x = 7$

c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{13-5x}} = -1 \;\to\; 3 = -\sqrt[3]{13-5x} \;\to\; 27 = -13 + 5x \;\to\; 5x = 40 \;\to\; x = 8$, solución válida.

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = 4 \;\to\; 2 = 4\sqrt[3]{x} \;\to\; 1 = 2\sqrt[3]{x} \;\to\; 1 = 8x \;\to\; x = \dfrac{1}{8}$, solución válida.

Ecuaciones factorizadas y factorizables

23 Resuelve las siguientes ecuaciones factorizadas:

a) $(3x-6)^5=0$

b) $4x^2(x+1)^2(x-2)=0$

c) $(x+2)(x^2+1)(x^2+5)=0$

a) $(3x-6)^5=0 \;\rightarrow\; 3x-6=0 \;\rightarrow\; x=2$

b) $4x^2(x+1)^2(x-2)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \;\rightarrow\; x=-1 \\ x-2=0 \;\rightarrow\; x=2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\; x_2=-1,\; x_3=2$

c) $(x+2)(x^2+1)(x^2+5)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x+2=0 \;\rightarrow\; x=-2 \\ x^2+1=0 \;\rightarrow\; \text{No tiene solución} \\ x^2+5=0 \;\rightarrow\; \text{No tiene solución} \end{cases}$

Solución: $x=-2$

24 Resuelve estas ecuaciones identificando identidades notables:

a) $x^2+6x+9=0$

b) $x^4-2x^2+1=0$

c) $x^6+2x^3+1=0$

d) $x^4-16=0$

a) $x^2+6x+9=0 \;\rightarrow\; (x+3)^2=0 \;\rightarrow\; x=-3$

b) $x^4-2x^2+1=0 \;\rightarrow\; (x-1)^2(x+1)^2=0 \;\rightarrow\; x_1=1,\; x_2=-1$

c) $x^6+2x^3+1=0 \;\rightarrow\; (x+1)^2(-x+x^2+1)^2=0$

Solo tiene raíz el factor $(x+1)^2$.

Solución: $x=-1$

d) $x^4-16=0 \;\rightarrow\; (x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

Soluciones: $x_1=2,\; x_2=-2$

25 Las siguientes ecuaciones tienen todas sus soluciones enteras. Hállalas usando la regla de Ruffini:

a) $x^3+6x^2+11x+6=0$

b) $x^3-5x^2-2x+24=0$

c) $x^4-x^3-7x^2+13x-6=0$

d) $x^4-3x^3-2x^2+12x-8=0$

a) $x^3+6x^2+11x+6=0 \;\rightarrow\; (x+3)(x+2)(x+1)=0$

Soluciones: $x_1=-3,\; x_2=-2,\; x_3=-1$

b) $x^3-5x^2-2x+24=0 \;\rightarrow\; (x-3)(x-4)(x+2)=0$

Soluciones: $x_1=3,\; x_2=4,\; x_3=-2$

c) $x^4-x^3-7x^2+13x-6=0 \;\rightarrow\; (x+3)(x-2)(x-1)^2=0$

Soluciones: $x_1=-3,\; x_2=2,\; x_3=1$

d) $x^4-3x^3-2x^2+12x-8=0 \;\rightarrow\; (x+2)(x-1)(x-2)^2=0$

Soluciones: $x_1=-2,\; x_2=1,\; x_3=2$

26 **Descompón en factores y resuelve:**

a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

c) $x^3 - 9x = 0$

d) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

e) $2x^3 - 5x^2 + 4x = 1$

f) $-x^3 + 13x = 12$

g) $x^3 - 5x^2 + 7x = 3$

h) $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

a) $x(x-2)(x+3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

b) $x^2(x-1)^2 = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$

c) $x(x-3)(x+3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3$

d) $(x-1)(x+2)(x+3) = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -3$

e) $2(x-1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 1/2$

f) $-(x+4)(x-1)(x-3) = 0$

$x_1 = -4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$

g) $(x-1)^2(x-3) = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 3$

h) $(x-2)(x+2)^2 = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = -2$

Ecuaciones racionales

27 **Resuelve.**

a) $\frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{x}{3} - 1$

c) $\frac{600}{x} + 80 = \frac{600}{x-2}$

d) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2}$

$x = 2$

b) $3 + 6 + 9 = x^2 - 3x$

$x^2 - 3x - 18 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+72}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

c) $600x - 1\,200 + 80x^2 - 160x = 600x$

$80x^2 - 160x - 1\,200 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \dfrac{2 \pm 8}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

d) $8x - 48 + 12x - x^2 + 72 - 6x = x^2 - 36$

$2x^2 - 14x - 60 = 0$

$x = \dfrac{14 \pm \sqrt{196+480}}{4} \quad \begin{cases} x_1 = (14+26)/4 = 10 \\ x_2 = (14-26)/4 = -3 \end{cases}$

28 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\frac{10}{3}+\frac{5-x}{x+5}=\frac{x+5}{x-5}$ **b)** $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$

a) $10x^2-250+15x-3x^2-75+15x=3x^2+15x+15x+75$

$4x^2=400$

$x^2=100 \quad \begin{cases} x_1=10 \\ x_2=-10 \end{cases}$

b) $x(x+3)+2x(x-3)=6$

$x^2+3x+2x^2-6x=6$

$3x^2-3x-6=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{6} \quad \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

29 **Resuelve.**

a) $\frac{x}{x+1}=\frac{4}{x+4}$ **b)** $\frac{3}{x+3}=\frac{x+2}{2-x}$ **c)** $\frac{2x}{x+2}=\frac{3x+2}{2x}$ **d)** $\frac{x^2}{x+1}=\frac{x}{x^2+1}$

a) $x^2+4x=4x+4 \;\to\; x^2=4 \quad \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $6-3x=x^2+3x+2x+6 \;\to\; x^2+8x=0 \;\to\; x(x+8)=0 \quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-8 \end{cases}$

c) $4x^2=3x^2+2x+6x+4 \;\to\; x^2-8x-4=0 \;\to\; x=\frac{8\pm\sqrt{64+16}}{2} \quad \begin{cases} x_1=4+2\sqrt{5} \\ x_2=4-2\sqrt{5} \end{cases}$

d) $x^2(x^2+1)=x(x+1) \;\to\; x^4+x^2-x^2-x=0 \;\to\; x^4-x=0 \;\to\; x(x^3-1)=0 \quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases}$

30 **Resuelve esta ecuación simplificando previamente las fracciones algebraicas que aparecen. Comprueba las soluciones:**

$$\frac{x^2+4x+4}{x+2}+\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$$

$$\frac{x^2+4x+4}{x+2}+\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{x^2+3x+2}{x+1} \;\to\; \frac{(x+2)^2}{x+2}+\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{(x+2)(x+1)}{x+1} \;\to$$

$$\to\; x+2+(x-1)(x+1)=x+2 \;\to\; (x-1)(x+1)=0$$

Soluciones: $x_1=1,\; x_2=-1$

Página 101

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

31 **Halla la solución de las siguientes ecuaciones tomando logaritmos en cada miembro:**

a) $7^x=20$

b) $1{,}2^x=10$

a) $7^x=20 \;\to\; x=\log_7 20$

b) $1{,}2^x=10 \;\to\; x=\log_{1{,}2} 10$

32 Resuelve expresando ambos miembros de cada ecuación como potencias de la misma base.

a) $2^{x^2-1} = 64$

b) $3^{x+2} = 6561$

c) $(0{,}2)^x = 25$

d) $\sqrt{2^x} = 0{,}25$

a) $2^{x^2-1} = 2^6 \to x^2 - 1 = 6 \to x_1 = -\sqrt{7},\ x_2 = \sqrt{7}$

b) $3^{x+2} = 6561 = 3^8 \to 3^{x+2} = 3^8 \to x + 2 = 8 \to x = 6$

c) $(0{,}2)^x = 25 \to \left(\frac{2}{10}\right)^x = 5^2 \to 5^{-x} = 5^2 \to -x = 2 \to x = -2$

d) $\sqrt{2^x} = 0{,}25 \to 2^{x/2} = \frac{1}{4} \to \frac{x}{2} = -2 \to x = -4$

33 Resuelve las ecuaciones siguientes mediante un cambio de variable:

a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

b) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$

c) $3^x - 3^{-x} = \frac{728}{27}$

a) $2^x = z;\ z^2 - 5z + 4 = 0 \to z_1 = 4,\ z_2 = 1 \to x_1 = 2,\ x_2 = 0$

b) $3^x = z;\ z - \frac{z}{3} + \frac{z}{9} = 21 \to z = 27 \to x = 3$

c) $3^x = z;\ z - \frac{1}{z} = \frac{728}{27} \to z^2 - 1 = \frac{728}{27}z \to 27z^2 - 728z - 27 = 0 \to$

$\to z_1 = 27,\ z_2 = -\frac{2}{54}$ (no vale) $\to x = 3$

34 Resuelve aplicando la definición de logaritmo.

a) $lox_x\, 25 = 2$ **b)** $log\, x = -1$ **c)** $lox_x\, 27 = 3$ **d)** $lox_2\, x = 3$

a) Como la base tiene que ser positiva, $x = 5$.

b) $log\, x = -1 \to 10^{-1} = x \to x = \frac{1}{10}$

c) $log_x\, 27 = 3 \to x^3 = 27 \to x = 3$

d) $log_2\, x = -3 \to 2^{-3} = x \to x = \frac{1}{8}$

35 Halla la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $log\, x = log\, 9 + log\, 2$

b) $ln\, x = 2\, ln\, 10$

c) $\frac{1}{2} log\, (x + 1) = log\, 3$

d) $\frac{1}{3} log_2\, x = -3$

a) $log\, x = log\, 9 + log\, 2 \to log\, x = log\, (9 \cdot 2) \to x = 18$

b) $ln\, x = 2 ln\, 10 \to ln\, x = ln\, 10^2 \to x = 100$

c) $\frac{1}{2} log\, (x+1) = log\, 3 \to log\, \sqrt{(x+1)} = log\, 3 \to \sqrt{(x+1)} = 3 \to x + 1 = 9 \to x = 8$

d) $\frac{1}{3} log_2\, x = -3 \to log_2 \sqrt[3]{x} = log_2\, 2^{-3} \to \sqrt[3]{x} = 2^{-3} \to x = 2^{-9} \to x = \frac{1}{512}$

Sistemas de ecuaciones

36 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - 11y = -11 \\ 23x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5 = 2y + 1 \\ x - 9 = 1 - 5y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

a) $y = 1 - 23x$

$2x - 11 + 253x = -11$

$0 = 255x$

$x = 0, \ y = 1$

b) $x = 10 - 5y$

$30 - 15y + 5 = 2y + 1$

$34 = 17y \to y = 2$

$x = 0, \ y = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}\right\}$

$x = 2 - 3y$

$2 - 3y + 8y = 7 \to 5y = 5 \to y = 1$

$x = -1, \ y = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ 2x - \ \ y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{r} -2x + 3y = -24 \\ 2x - \ \ y = 8 \\ \hline 2y = -16 \end{array} \to y = -8$

$x = 0, \ y = -8$

37 Resuelve.

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

a) $x = \dfrac{5y}{3}$

$\dfrac{5y^2}{2} = 15 \to y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \to x = 5 \\ y = -3 \to x = -5 \end{cases}$

$x_1 = 5, \ y_1 = 3; \ x_2 = -5, \ y_2 = -3$

b) $\left.\begin{array}{l} 6y + 6x = 5xy \\ y = \dfrac{2 - 2x}{3} \end{array}\right\}$

$4 - 4x + 6x = \dfrac{5x(2 - 2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0 \to 5x^2 - 2x + 6 = 0 \to$ No tiene solución.

38 **Resuelve por sustitución:**

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (x^2+1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 + y \\ (6+y)^2 + y^2 = 20 \to 2y^2 + 12y + 36 = 20 \to y_1 = -2,\ y_2 = -4 \end{array}$

$\begin{cases} y_1 = -2 \to x_1 = 4 \\ y_2 = -4 \to x_2 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 4,\ y_1 = -2;\ x_2 = 2,\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 - y \\ (2-y)y = 1 \to 2y - y^2 - 1 = 0 \to y = 1 \to x = 1 \end{array}$

$x = 1,\ y = 1$

c) $\left.\begin{array}{l} (x^2+1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 4x \\ (x^2+1)(4x)^2 = 5 \to 16x^4 + 16x^2 - 5 = 0 \to x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \to y_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \to y_2 = -2 \end{cases}$

$x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = -2$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \to \left(\frac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \to -\frac{y^4 - 36}{y^2} - 5 = 0 \to -\frac{(y^4 + 5y^2 - 36)}{y^2} = 0 \to \\ xy = 6 \to x = \frac{6}{y} \end{cases}$

$\to y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \to y_1 = 2,\ y_2 = -2$

$y_1 = 2,\ x_1 = 3;\ y_2 = -2,\ x_2 = -3$

39 **Resuelve por reducción:**

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$

a) $\begin{array}{r} 3x^2 - 5y^2 = \ \ 30 \\ -3x^2 + 6y^2 = -21 \\ \hline y^2 = \ \ \ 9 \end{array} \to y = \pm 3$

$x^2 = 25 \to x = \pm 5$

$x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = 3;\ x_3 = 5,\ y_3 = -3;\ x_4 = -5,\ y_4 = -3$

b) $$\begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4} \\ \hline 2x^2 \qquad\qquad = \dfrac{2}{4} \to x = \pm\dfrac{1}{2} \end{array}$$

- Si $x = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} + y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$
$$1 + 4y^2 + 2y = 3$$
$$4y^2 + 2y - 2 = 0$$
$$2y^2 + y - 1 = 0$$
$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $x = -\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} + y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$
$$1 + 4y^2 - 2y = 3$$
$$4y^2 - 2y - 2 = 0$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{1}{2},\ y_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ y_2 = \dfrac{1}{2};\ x_3 = -\dfrac{1}{2},\ y_3 = 1;\ x_4 = -\dfrac{1}{2},\ y_4 = -\dfrac{1}{2}$

40 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{y+3}{y+1} = 3 \\ x(x-2) = y(1-y) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2xy + 2x - y - 1 + xy + 3x + y + 3 = 3(xy + x + y + 1) \\ x^2 - 2x = y - y^2 \end{array}\right\}$

$$3xy + 5x + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3 \to 2x - 3y = 1 \to x = \frac{1+3y}{2}$$

$$\frac{1 + 9y^2 + 6y}{4} - 1 - 3y = y - y^2 \to 1 + 9y^2 + 6y - 4 - 12y = 4y - 4y^2 \to$$

$$\to 13y^2 - 10y - 3 = 0 \to y = \frac{10 \pm \sqrt{100+156}}{26} = \frac{10 \pm 16}{26} = \begin{cases} 1 \\ -3/13 \end{cases}$$

$x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{2}{13},\ y_2 = -\dfrac{3}{13}$

b) $x = \dfrac{28}{y}$

$$\left(\frac{28}{y}\right)^2 + y^2 = 65 \to 784 + y^4 = 65y^2 \to y^4 - 65y^2 + 784 = 0$$

$$y^2 = z \to z = \frac{65 \pm 33}{2} = \begin{cases} 49 \to y = \pm 7 \\ 16 \to y = \pm 4 \end{cases}$$

$x_1 = 7,\ y_1 = 4;\ x_2 = -7,\ y_2 = -4;\ x_3 = 4,\ y_3 = 7;\ x_4 = -4,\ y_4 = -7$

c) $2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{rrrrrl} x^2 + & y^2 - & 5x - & 5y + & 10 & = 0 \\ -x^2 + & y^2 + & 5x - & 5y - & 2 & = 0 \\ \hline & 2y^2 - & & 10y + & 8 & = 0 \end{array}$$

$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 3,\ y_1 = 4;\ x_2 = 3,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2,\ y_3 = 4;\ x_4 = 2,\ y_4 = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 7 \\ x = \dfrac{4y}{3} \end{array}\right\}$

$\dfrac{16y^2}{9} - y^2 = 7 \rightarrow 16y^2 - 9y^2 = 63 \rightarrow y^2 = 9$

$x_1 = 4,\ y_1 = 3;\ x_2 = -4,\ y_2 = -3$

41 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

a) $x = (5-y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y \rightarrow 8y = 24 \rightarrow y = 3$

$x = 4,\ y = 3$

b) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x-6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \rightarrow y = 48 \text{ (no vale)} \\ 6 \rightarrow y = 6 \end{cases}$

$x = 6,\ y = 6$

42 **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ \log x + \log y = \log 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{array}\right\}\begin{array}{l} x = 1 + y \\ 2^{1+y} + 2^y = 6 \rightarrow 2 \cdot 2^y + 2^y = 6 \rightarrow 2^y \cdot 3 = 6 \rightarrow 2^y = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2 \end{array}$

$x = 2,\ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{array}\right\}\begin{array}{l} x = 5 - y \\ (5-y)y = 6 \rightarrow 5y - y^2 = 6 \rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \end{array}$

$y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = 2$

Método de Gauss

43 **Resuelve por el método de Gauss:**

$$\text{a) }\begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases} \qquad \text{b) }\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{c) }\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) }\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \qquad \text{e) }\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases} \qquad \text{f) }\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 7x = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 + 10 = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{array}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ 2x + 2z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ -x = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{5 - 3x}{2} = 1 \\ y = 3 - x - z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 3x + 3z = 36 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) : 3 \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x + z = 12 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 2x = 18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 9 \\ z = x - 6 = 3 \\ y = 18 - x - z = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{array}$$

d)

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ -6y + 5z = 27 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 6 \cdot (2.^a) \end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = \dfrac{69}{23} = 3 \\ y = 7 - 3z = 7 - 9 = -2 \\ x = 2 - y - z = 2 + 2 - 3 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$$

e)

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 3x + 4z = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 2z = -5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = \dfrac{-5}{2} \\ x = \dfrac{13 - 2z}{3} = 6 \\ y = 9 - x + 2z = 9 - 6 - 5 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{-5}{2} \end{array}$$

f) $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+\ z=0\\ 3x+6y-2z=0\\ 4x+\ y-\ z=0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a})+2\cdot(1.^{a})\\ (3.^{a})+(1.^{a})\end{array} \to \left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0\\ 7x\qquad\quad\ =0\\ 6x-2y\qquad=0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}x=0\\ y=0\\ z=0\end{array}$

44 **Resuelve aplicando el método de Gauss:**

a) $\begin{cases} x-y=1\\ 2x+6y-5z=-4\\ x+y-z=0\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y+z=3\\ x-2y+5z=5\\ 5x-2y+17z=1\end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y+3z=2\\ 2x+3y+4z=1\\ -2x-y-8z=-7\end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y-z=2\\ 3x-2y-2z=2\\ -5x+3y+5z=-1\end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+y+z=3\\ -x+2y+z=5\\ x+4y+3z=1\end{cases}$ **f)** $\begin{cases} -2x+y+z=1\\ 3x+2y-z=0\\ -x+4y+z=2\end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x-y=1\\ 2x+6y-5z=-4\\ x+y-z=0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a})-5\cdot(3.^{a})\\ (3.^{a})\end{array} \to \left.\begin{array}{l} x-y=1\\ -3x+y=-4\\ x+y-z=0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a})+3\cdot(1.^{a})\\ (3.^{a})\end{array} \to$

$\left.\begin{array}{l} x-y=1\\ -2y=-1\\ x+y-z=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}\\ x=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\\ z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2\end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\\ z=2\end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=3\\ x-2y+5z=5\\ 5x-2y+17z=1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a})+(1.^{a})\\ (3.^{a})+(1.^{a})\end{array} \to \left.\begin{array}{l} x+2y+z=3\\ 2x+6z=8\\ 6x+18z=4\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a}):2\\ (3.^{a}):6\end{array} \to$

$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=3\\ x+3z=4\\ x+3z=4/6\end{array}\right\}$ Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias.

El sistema es incompatible, no tiene solución.

c) $\left.\begin{array}{l} x+y+3z=2\\ 2x+3y+4z=1\\ -2x-y-8z=-7\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a})-3\cdot(1.^{a})\\ (3.^{a})+(1.^{a})\end{array} \to \left.\begin{array}{l} x+y+3z=2\\ -x-5z=-5\\ -x-5z=-5\end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función de z:

$\left.\begin{array}{l} x+y=2-3z\\ -x=-5+5z\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\to (5-5z)+y=2-3z \to y=2z-3\\ \to x=5-5z\end{array}$

$x=5-5z,\ y=2z-3,\ z=z$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x-y-z=2\\ 3x-2y-2z=2\\ -5x+3y+5z=-1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a})-2\cdot(1.^{a})\\ (3.^{a})+5\ (1.^{a})\end{array} \to \left.\begin{array}{l} 2x-y-z=2\\ -x=-2\\ 5x-2y=9\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x=2\\ y=\dfrac{5x-9}{2}=\dfrac{1}{2}\\ z=2x-y-2=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}$

$x=2,\ y=\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{3}{2}$

e) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=3\\ -x+2y+z=5\\ x+4y+3z=1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(1.^{a})\\ (2.^{a})+(1.^{a})\\ (3.^{a})-(1.^{a})\end{array} \to \left.\begin{array}{l} x+y+z=3\\ 3y+2z=8\\ 3y+2z=-2\end{array}\right\}$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

f) $\left.\begin{array}{r}-2x + y + z = 1\\ 3x + 2y - z = 0\\ -x + 4y + z = 2\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a) + (1.^a)\\ (3.^a) - (1.^a)\end{array}$ $\left.\begin{array}{r}-2x + y + z = 1\\ x + 3y \quad = 1\\ x + 3y \quad = 1\end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función del parámetro y:

$\left.\begin{array}{l}-2x + z = 1 - y\\ x = 1 - 3y\end{array}\right\} \to -2(1-3y) + z = 1 - y \to z = 3 - 7y$

$x = 1 - 3y,\ z = 3 - 7y$

Página 102

Inecuaciones

45 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x - 3 < x - 1$

b) $\dfrac{3x-2}{2} \le \dfrac{2x+7}{3}$

c) $-3x - 2 < 5 - \dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{3x}{5} - x > -2$

a) $x < 2;\ (-\infty, 2)$

b) $9x - 6 \le 4x + 14 \to 5x \le 20 \to x \le 4;\ (-\infty, 4]$

c) $-6x - 4 < 10 - x \to -14 < 5x \to x > -\dfrac{14}{5};\ \left(-\dfrac{14}{5}, +\infty\right)$

d) $3x - 5x > -10 \to -2x > -10 \to 2x < 10 \to x < 5;\ (-\infty, 5)$

46 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases}4x - 3 < 1\\ x + 6 > 2\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}3x - 2 > -7\\ 5 - x < 1\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}5 - x < -12\\ 16 - 2x < 3x - 3\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}2x - 3 > 0\\ 5x + 1 < 0\end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l}4x < 4 \to x < 1\\ x > -4\end{array}\right\}\ (-4, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l}3x > -5 \to x > -5/3\\ x > 4\end{array}\right\}\ (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l}x > 17\\ 5x > 19 \to x > 19/5\end{array}\right\}\ (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l}x > 3/2\\ x < -1/5\end{array}\right\}$ No tiene solución

47 **Resuelve.**

a) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$

b) $5 - x^2 < 0$

c) $x^2 + 3x > 0$

d) $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$

e) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

f) $x^2 - 7x + 6 > 0$

a) $-(x+3)(x+1) \geq 0 \rightarrow [-3, 1]$

b) $\left(\sqrt{5} - x\right)\left(\sqrt{5} + x\right) < 0 \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

c) $x(x+3) > 0 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

d) $-(x-1)(x-5) \leq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

e) $x^2 - 7x + 6 \leq 0 \rightarrow [1, 6]$

f) $x^2 - 7x + 6 > 0 \rightarrow (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

48 **Resuelve estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ 3 - 2x < 7 \rightarrow \textit{Soluciones: } (-2, \infty) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -5) \cup (3, \infty)) \cap (-2, \infty) = (3, \infty)$

b) $\begin{cases} 5x - x^2 \geq 4 \rightarrow \textit{Soluciones: } [1, 4] \\ 5x - 1 < 4x + 2 \rightarrow \textit{Soluciones: } (-\infty, 3) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[1, 4] \cap (-\infty\ 3) = [1, 3)$

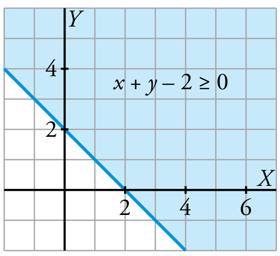
49 **Resuelve gráficamente:**

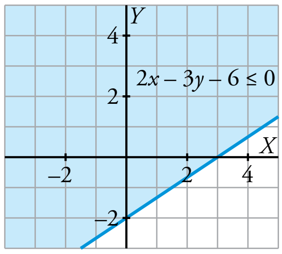
a) $x + y - 2 \geq 0$ **b)** $2x - 3y \leq 6$ **c)** $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3$ **d)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1$

a) Dibujamos la recta $r: x + y - 2 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad $0 + 0 - 2 \geq 0$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

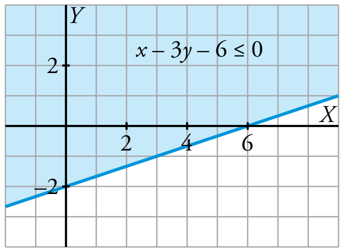




b) Dibujamos la recta $r: 2x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \le 0$.

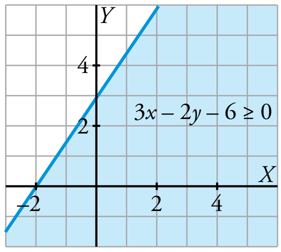
La solución es el semiplano que contiene a O.



c) $\dfrac{x - 3y}{2} \le 3 \;\to\; x - 3y - 6 \le 0$. Dibujamos la recta $r: x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \le 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.

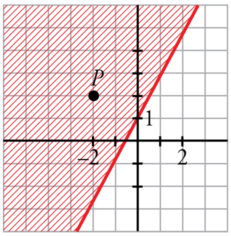


d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \ge -1 \;\to\; 3x - 2y + 6 \ge 0$. Dibujamos la recta $r: 3x - 2y + 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 + 6 \ge 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.

50



a) Comprueba que el punto P verifica la inecuación $2x - y \le -1$.

b) Elige tres puntos cualesquiera de la zona rayada y prueba que son soluciones de la inecuación.

a) Las coordenadas de P son $(-2, 2)$.

Sustituyendo en la inecuación, queda: $2 \cdot (-2) - (-2) = -2 \le -1$

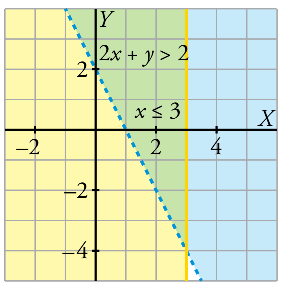
b) Por ejemplo, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, -1)$.

Todos los puntos de la zona rayada cumplen la inecuación.

51 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

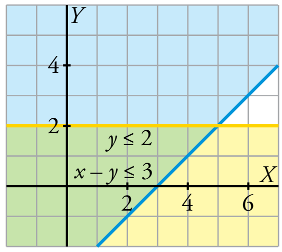
a) $\begin{cases} 2x + y \ge 2 \\ x \le 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y \le 3 \\ y \le 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y \le 3 \\ 2x + y \le 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y \le 5 \\ x + y \ge 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x - y \le 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y \ge 1 \\ x \le 3 \\ -x + y \le 1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x \le 5 \\ y \ge 0 \\ y \le x + 1 \\ 2x + y \ge 3 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x \ge 2 \\ 3x + y \ge 7 \\ 2x - y \ge -7 \end{cases}$

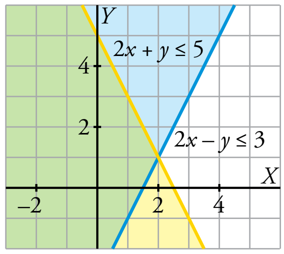


a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La recta $2x + y = 2$ no pertenece al recinto solución.

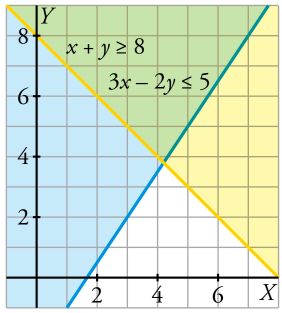
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



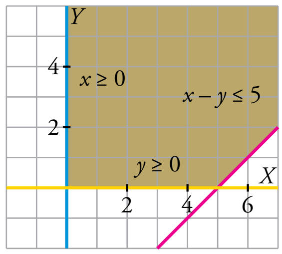
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



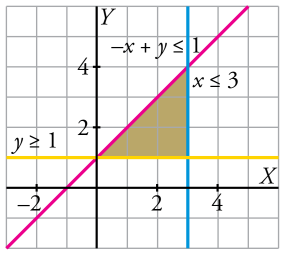
d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



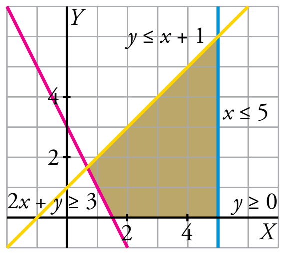
e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



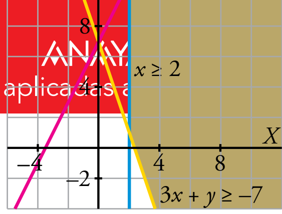
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos.



g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los cuatro semiplanos.



h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.


8
4
x ≥ 2
X
–4
4
8
–2
3x + y ≥ –7

Para resolver

52 El resto de la división $(-x^3 + 3x^2 + kx + 7) : (x + 2)$ es igual a –7. ¿Cuánto vale k?

El resto al dividir $P(x) = -x^3 + 3x^2 + kx + 7$ entre $x + 2$ es igual a $P(-2)$. Por tanto, queremos que $P(-2) = -7$:

$P(-2) = -(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + k(-2) + 7 = 27 - 2k$

$27 - 2k = -7 \to k = 17$

53 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{(x+1)^2}{6} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{3} - 2x$

b) $\sqrt{3x+3} - \sqrt{2x} = 1$

c) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$

d) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

e) $\dfrac{x+2}{x^2-1} - \dfrac{x-1}{x+1} = 1$

a) $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{(x+1)^2}{6} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{3} - 2x$

Reducimos a común denominador:

$3(x + 3) - (x + 1)^2 = 2(x - 1)(x + 1) - 12x \to -x^2 + x + 8 = 2x^2 - 2 - 12x \to -3x^2 + 13x + 10 = 0$

Soluciones: $x_1 = 5,\ x_2 = -\dfrac{2}{3}$

b) $\sqrt{3x+3} - \sqrt{2x} = 1 \to \sqrt{3x+3} = 1 + \sqrt{2x} \to 3x + 3 = 2x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 1 \to x + 2 = 2\sqrt{2}\sqrt{x} \to$

$\to x^2 + 4x + 4 = 8x \to x^2 - 4x + 4 = 0$

Solución: $x = 2$

c) $2x^4 + 3x^3 - x = 0 \to x(2x^3 + 3x^2 - 1) = 0 \to x(2x - 1)(x + 1)^2 = 0$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_3 = -1$

d) $x^4 - x^2 - 12 = 0$. Ecuación bicuadrada. Hacemos el cambio $x^2 = y$.

$y^2 - y - 12 = 0 \to y_1 = 4,\ y_2 = -3$ (no válida) $\to x^2 = 4$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $\dfrac{x+2}{x^2-1} - \dfrac{x-1}{x+1} = 1$

Reducimos a común denominador:

$\dfrac{-x^2+3x+1}{x^2-1} = 1 \to -x^2 + 3x + 1 = x^2 - 1 \to 2x^2 - 3x - 2 = 0$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$

54 Resuelve estas ecuaciones con valor absoluto.

a) $|x + 1| = 3$

b) $|x^2 - 3| = 1$

c) $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| = 2$

d) $|x + 2| = |3x - 2|$

a) $|x + 1| = 3 \to \begin{cases} x+1 = 3 \to x = 2 \\ x+1 = -3 \to x = -4 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -4$

b) $|x^2 - 3| = 1 \to \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2 \\ x^2 - 3 = -1 \to x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$

c) $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| = 2 \;\to\; \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = 2 \;\to\; x = 3 \\ \dfrac{x+1}{2} = -2 \;\to\; x = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\; x_2 = -5$

d) $|x+2| = |3x-2| \;\to\; \begin{cases} x + 2 = 3x - 2 \;\to\; x = 2 \\ x + 2 = -(3x-2) \;\to\; x = 0 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\; x_2 = 0$

55 Resuelve por el método más adecuado.

a) $\mathbf{5^{2x-4} = 1}$

b) $\mathbf{3^x = 30}$

c) $\mathbf{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2^2 = 0}$

d) $\mathbf{(0{,}25)^{x+1} = 1\,024}$

a) $5^{2x-4} = 1 \;\to\; 5^{2x-4} = 5^0 \;\to\; 2x - 4 = 0 \;\to\; x = 2$

b) $3^x = 30 \;\to\; x = \log_3 30$

c) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2^2 = 0$

Hacemos el cambio $2^x = y$.

$y^2 - 5y + 4 = 0 \;\to\; y_1 = 4,\; y_2 = 1$

$\begin{cases} y_1 = 4 \;\to\; 2^x = 2^2 \;\to\; x_1 = 2 \\ y_2 = 1 \;\to\; 2^x = 2^0 \;\to\; x_2 = 0 \end{cases}$

d) $(0{,}25)^{x+1} = 1\,024 \;\to\; \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1} = 2^{10} \;\to\; 2^{-2(x+1)} = 2^{10} \;\to\; -2x - 2 = 10 \;\to\; x = -6$

56 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{array}\right\}$

Sumamos ambas ecuaciones: $2\log x = 2 \;\to\; \log x = 1 \;\to\; x = 10$

Restamos las ecuaciones: $2\log y = 4 \;\to\; \log y = 2 \;\to\; y = 100$

Solución: $x = 10,\; y = 100$

b) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases} \to \begin{cases} 5^{x+y} = 5^0 \\ 5^{x-y} = 5^2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \to x = 1,\; y = -1$

Solución: $x = 1,\; y = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2\sqrt{x+1} - 1 \\ 2x - 3\left(2\sqrt{x+1} - 1\right) = 1 \;\to\; 2x - 6\sqrt{x+1} + 3 = 1 \;\to \end{array}$

$\to\; 2x + 2 = 6\sqrt{x+1} \;\to\; x + 1 = 3\sqrt{x+1} \;\to\; x^2 + 2x + 1 = 9x + 9 \;\to\; x_1 = 8,\; x_2 = -1$

$\begin{cases} x_1 = 8 \;\to\; y_1 = 5 \\ x_2 = -1 \;\to\; y_2 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 8,\; y_1 = 5;\; x_2 = -1,\; y_2 = -1$

d) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y}+2=x+1\\ 2x-y=5\end{array}\right\}\begin{array}{l}y=2x-5\\ \sqrt{x+2x-5}+2=x+1 \to \sqrt{3x-5}=x-1 \to 3x-5=x^2-2x+1 \to x_1=3,\ x_2=2\end{array}$

$\begin{cases}x_1=3 \to y_1=1\\ x_2=2 \to y_2=-1\end{cases}$

Soluciones: $x_1=3,\ y_1=1;\ x_2=2,\ y_2=-1$

57 Resuelve.

a) $\begin{cases}2(x-y)=3z+14\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{6}=5+y\\ 2(x+y)-3(y+z)=10\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2y-z}{2}=y+1\\ x+y+z-6=0\\ 3(x+z)=y-2\end{cases}$

a) $\begin{cases}2(x-y)=3z+14\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{6}=5+y\\ 2(x+y)-3(y+z)=10\end{cases}$ $\begin{cases}2x-2y-3z=14\\ 2x-6y+z=30\\ 2x-y-3z=10\end{cases}$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)-(1.^a)\\ (3.^a)-(1.^a)\end{array}$ $\begin{cases}2x-2y-3z=14\\ -4y+4z=16\\ y=-4\end{cases}$ $\begin{cases}y=-4\\ z=0\\ x=3\end{cases}$

Solución: $x=3,\ y=-4,\ z=0$

b) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2y-z}{2}=y+1\\ x+y+z-6=0\\ 3(x+z)=y-2\end{cases}$ $\begin{cases}x+y-z=2\\ x+y+z=6\\ 3x-y+3z=-2\end{cases}$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)-(1.^a)\\ (3.^a)-3\cdot(1.^a)\end{array}$ $\begin{cases}x+y-z=2\\ 2z=4\\ -4y+6z=-8\end{cases}$ $\begin{cases}z=2\\ y=5\\ x=-1\end{cases}$

Solución: $x=-1,\ y=5,\ z=2$

58 Comprueba que una de estas inecuaciones tiene por solución al conjunto $\mathbb{R}$ y la otra es incompatible:

a) $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+1$ **b)** $3(x-2)+7<x+2(x-5)$

a) $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+1 \to -3x-14<-3x+1 \to -14<1$ que es cierto para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$.

b) $3(x-2)+7<x+2(x-5) \to 3x+1<3x-10 \to 1<-10$ que es falso, luego no se verifica nunca la desigualdad.

59 Resuelve.

a) $\dfrac{1}{x+3}<0$ **b)** $\dfrac{x^2+1}{x+5}>0$ **c)** $\dfrac{x+3}{x-3}\le 0$ **d)** $\dfrac{x^2-4}{x}\ge 0$

a) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, +\infty)$
1	+	+
$x+3$	–	+
$\dfrac{1}{x+3}$	–	+

Solución: $(-\infty, -3)$

b) Para que la fracción sea positiva, el numerador y el denominador deben tener el mismo signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

$x^2 + 1 = 0$ no tiene solución.

Solución: $(-5, +\infty)$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
$x^2 + 1$	+	+
$x + 5$	–	+
$\frac{x^2+1}{x+5}$	–	+

c) Para que la fracción sea negativa, el numerador y el denominador deben tener distinto signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -3]$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 3$	–	+	+
$x - 3$	–	–	+
$\frac{x+3}{x-3}$	+	–	+

Solución: $[-3, 3)$; $x = 3$ no es solución porque hace cero el denominador.

d) Para que la fracción sea positiva, el numerador y el denominador deben tener el mismo signo. Calculamos las raíces de ambos polinomios. Ellas determinan los intervalos en los que hay que estudiar el signo de la fracción:

	$(-\infty, -2]$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$[2, +\infty)$
$x^2 - 4$	+	–	–	+
x	–	–	+	+
$\frac{x^2-4}{x}$	–	+	–	+

Solución: $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$; $x = 0$ no es solución porque hace cero del denominador.

60 **Contratamos una hipoteca en enero de 2011 con revisión semestral del tipo de interés. En julio nos sube la cuota un 4 % y en la siguiente revisión baja un 1 % respecto a julio. Si en enero de 2012 estamos pagando 19,24 € mensuales más que en el mismo mes del año anterior, ¿cuál era la cuota inicial?**

x = Cuota inicial

Usando los índices de variación, tenemos:

$x \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}99 = x + 19{,}24 \rightarrow x = 650$

La cuota inicial era de 650 €.

Página 103

61 **En la primera prueba de una oposición queda eliminado el 52 % de los participantes. En la segunda prueba se elimina el 25 % de los restantes. Si el número total de personas suspendidas es 512, ¿cuántas personas se presentaron a la oposición?**

x = n.º de participantes

En la primera prueba se eliminan $0{,}52x$.

Después de la primera prueba quedan $x - 0{,}52x$.

Después de la segunda prueba se eliminan $0{,}25(x - 0{,}52x)$.

Han suspendido: $0{,}52x + 0{,}25(x - 0{,}52x) = 0{,}64x = 512$

$0{,}64x = 512 \rightarrow x = 800$

Se presentaron 800 personas.

62 **Una piscina tarda en llenarse 5 horas utilizando su toma de agua habitual, y 20 horas si utilizamos una manguera. ¿Qué tiempo será necesario emplear para su llenado si usamos ambos métodos de forma simultánea?**

En una hora, la toma de agua habitual llenaría $\frac{1}{5}$ de la piscina. En una hora la manguera llenaría $\frac{1}{20}$ de la piscina.

Entre los dos, en una hora llenarían $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$ de la pisicina.

Luego necesitan 4 horas para llenar la piscina.

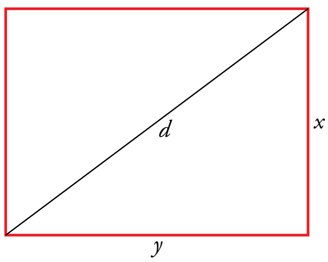
63 **En una tienda se vende té blanco a 18 €/kg y té verde a 14 €/kg. También vende una mezcla de ambos productos a 16,4 €/kg. ¿Cuál es la composición de la mezcla?**

	PRECIO	CANTIDAD DE TÉ PURO EN 1 KG DE MEZCLA	TOTAL
TÉ BLANCO	18 €/kg	x	$18x$
TÉ VERDE	14 €/kg	y	$14y$
MEZCLA	16,40 €/kg	$1 = x + y$	$18x + 14y = 16,40$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 18x+14y=16,40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0,6 \\ y=0,4 \end{array}$$

La mezcla tiene 60 % de té blanco y 40 % de té verde.

64 **Calcular las dimensiones de una finca rectangular sabiendo que su perímetro mide 140 m y su diagonal es de 50 m.**



$$\begin{cases} P = 2x+2y \\ d=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 140 = 2x+2y \\ 50=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 70 = x+y \\ 2\,500=x^2+y^2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 30,\ y_1 = 40;\ x_2 = 40,\ y_2 = 30$

Un lado mide 30 m y el otro 40 m.

65 **Una tienda ha vendido 60 ordenadores, cuyo precio original era de 1 200 €, con un descuento del 20 % a unos y un 25 % a otros. Si se han recaudado 56 400 €, calcula a cuántos ordenadores se rebajó el 25 %.**

x = n.º de ordenadores vendidos con un 20 % de descuento

y = n.º de ordenadores vendidos con un 25 % de descuento

Expresamos las condiciones mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=60 \\ 0,8\cdot 1\,200x+0,75\cdot 1\,200y=56\,400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=60 \\ 960x+900y=56\,400 \end{cases} \rightarrow x=40,\ y=20$$

Se han vendido 20 ordenadores con un 25 % de descuento.

66 **Hemos necesitado 10 dm² de cartón para construir una caja de base cuadrada de 2 dm³ de volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?**

l = lado de la base; h = altura

$V = A_{BASE} \cdot h$

$A_{TOTAL} = 2l^2 + 4 \cdot l \cdot h$

Tenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} l^2 \cdot h = 2 \\ 2l^2 + 4 \cdot l \cdot h = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} h = \dfrac{2}{l^2} \\ 2l^2 + 4 \cdot l \cdot \dfrac{2}{l^2} = 10 \to 2l^2 + \dfrac{8}{l} = 10 \to \end{array}$$

$$\to 2l^3 + 8 = 10l \to 2l^3 - 10l + 8 = 0 \to 2(l-1)(l^2 + l - 4) = 0 \to \begin{cases} l_1 = 1 \\ l_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{17} - \dfrac{1}{2} \\ l_3 = -\dfrac{1}{2}\sqrt{17} - \dfrac{1}{2} \text{ no es válida porque es negativa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_1 = 1 \to h_1 = 2 \\ l_2 = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2} \to h_2 = \dfrac{\sqrt{17} + 9}{16} \end{cases}$$

Soluciones: l_1 = 1 dm, h_1 = 2 dm; $l_2 = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}$ dm, $h_2 = \dfrac{\sqrt{17} + 9}{16}$ dm

67 **La suma de las edades, en el momento actual, de tres hermanos es de 15 años. Dentro de un año, la edad del menor será la mitad que la edad del mediano. Hace 2 años, la edad del mayor era el doble que la del mediano. Halla las edades de los tres hermanos.**

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 1 AÑO	EDAD HACE 2 AÑOS
HERMANO 1	x	$x + 1$	$x - 2$
HERMANO 2	y	$y + 1$	$y - 2$
HERMANO 3	z	$z + 1$	$z - 2$
TOTAL	$x + y + z = 15$	$2(z + 1) = y + 1$	$x - 2 = 2(y - 2)$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ 2(z + 1) = y + 1 \\ x - 2 = 2(y - 2) \end{array}\right\} \to x = 8,\ y = 5,\ z = 2$$

El mayor tiene 8 años, el segundo tiene 5 años y el menor tiene 2 años.

68 **En una caja registradora encontramos billetes de 50 €, 100 € y 200 €, siendo el número total de billetes igual a 21, y la cantidad total de dinero de 1 800 €. Sabiendo que el número de billetes de 50 € es el quíntuple de los de 200 €, calcula el número de billetes de cada clase.**

x = n.º de billetes de 50 €

y = n.º de billetes de 100 €

z = n.º de billetes de 200 €

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=21 \\ 50\,x+100y+200\,z=1\,800 \\ x=5z \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } x=10,\ y=9,\ z=2$$

Hay 10 billetes de 50 €, 9 billetes de 100 € y 2 billetes de 200 €.

69 **En una función de teatro se recaudan 5 200 €, vendiéndose 200 entradas de tres precios distintos: 30 €, 25 € y 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25 % del número de localidades de 25 €, calcula el número de localidades de cada tipo.**

x = n.º de localidades a 10 €

y = n.º de localidades a 25 €

z = n.º de localidades a 30 €

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=200 \\ 10x+25y+30z=5\,200 \\ 4x=y \end{array}\right\} \quad \textit{Solución}:\ x=20,\ y=80,\ z=100$$

Se han vendido 20 localidades de 10 €, 80 de 25 € y 100 de 30 €.

70 **Preparamos un surtido con dos tipos de bombones de 10 €/kg y 15 €/kg. Nuestro presupuesto es de 600 € y queremos preparar, al menos, 40 kg. ¿Qué restricciones tiene la composición del surtido?**

x = kilos de bombones de 10 €/kg

y = kilos de bombones de 15 €/kg

Restricciones:

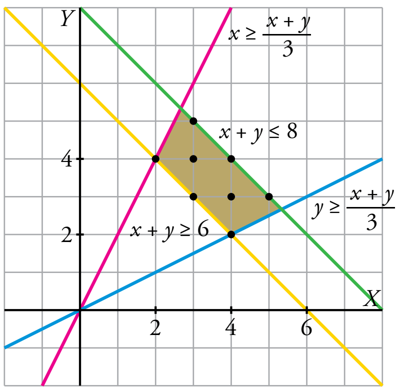
$$\begin{cases} x+y\ge 40 \\ 10x+15y\le 600 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

71 **Un comité de una comunidad de vecinos, debe estar formado entre 6 y 8 personas, no pudiendo ser el número de hombres ni el de mujeres inferior a un tercio del grupo. ¿Cuántas combinaciones posibles hay?**

Llamamos x al n.º de mujeres e y al n.º de hombres. Las condiciones son:

$$\begin{cases} 6\le x+y\le 8 \\ x\ge \dfrac{x+y}{3} \\ y\ge \dfrac{x+y}{3} \end{cases}$$

Representamos el recinto solución:



Las diferentes posibilidades son: $(x=4,\ y=2)$, $(x=3,\ y=3)$, $(x=2,\ y=4)$, $(x=4,\ y=3)$, $(x=3,\ y=4)$, $(x=5,\ y=3)$, $(x=4,\ y=4)$, $(x=3,\ y=5)$, que corresponden a los puntos del recinto común cuyas coordenadas son enteras.

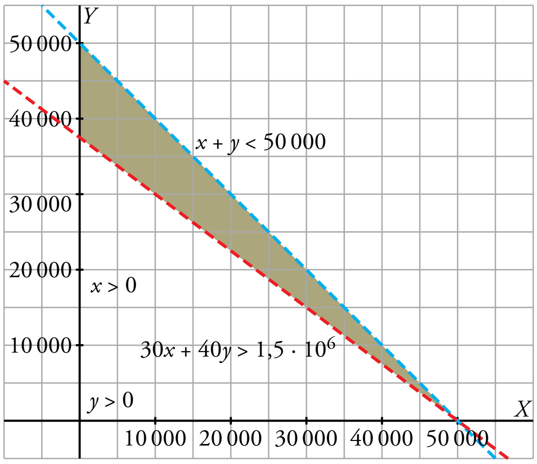
72 **La recaudación de un partido de fútbol en el que se vendieron menos de 50 000 entradas superó los 1,5 millones de euros. Si se vendieron entradas de 30 € y de 40 €, ¿cuántas localidades de cada tipo pudieron ser vendidas?**

x = n.º de entradas de 30 €

y = n.º de entradas de 40 €

Restricciones:

$$\begin{cases} x + y < 50\,000 \\ 30x + 40y > 1{,}5 \cdot 10^6 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



Las posibles soluciones son los puntos de coordenadas enteras que están en el recinto intersección de los cuatro semiplanos.

Autoevaluación

1 **Factoriza los siguientes polinomios señalando sus raíces:**

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ **b)** $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Aplicamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Las raíces de $P(x)$ son –2, –1 y 2.

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

Sacando factor común: $Q(x) = x(2x^2 - x - 1)$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de 2.º grado a $2x^2 - x - 1$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} x_1 = -1/2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \qquad Q(x) = 2x(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Las raíces de $Q(x)$ son $-\frac{1}{2}$, 0 y 1.

2 Opera y simplifica el resultado:

a) $\dfrac{(x+5)^2-2x(x+5)}{(x+5)^4}$

b) $\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+2}\right):\left(1+\dfrac{x}{x+2}\right)$

a) $\dfrac{(x+5)^2-2x(x+5)}{(x+5)^4}=\dfrac{(x+5)-2x}{(x+5)^3}=\dfrac{5-x}{(x+5)^3}$

b) $\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+2}\right):\left(1+\dfrac{x}{x+2}\right)=\left(\dfrac{(x+1)(x+2)-x^2}{x(x+2)}\right):\left(\dfrac{x+2+x}{x+2}\right)=$

$=\left(\dfrac{x^2+3x+2-x^2}{x(x+2)}\right):\left(\dfrac{2x+2}{x+2}\right)=$

$=\left(\dfrac{3x+2}{x(x+2)}\right)\cdot\left(\dfrac{x+2}{2x+2}\right)=\dfrac{3x+2}{x(2x+2)}=\dfrac{3x+2}{2x^2+2x}$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

b) $x^4-8x^2-9=0$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x$

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}$

a) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

Multiplicando por mín.c.m.(2, 3) = 6 $\to$

$\to 2(3x+1)-3(5x^2+3)=3(x^2-1)-2(x+2) \to$

$\to 6x+2-15x^2-9=3x^2-3-2x-4 \to -15x^2+6x-7=3x^2-2x-7 \to$

$\to 18x^2-8x=0 \to 2x(9x-4)=0 \begin{cases} 2x=0 \to x_1=0 \\ 9x-4=0 \to x_2=4/9 \end{cases}$

b) $x^4-8x^2-9=0 \xrightarrow{x^2=y} y^2-8y-9=0$

$y=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4\cdot(-9)\cdot(1)}}{2}=\dfrac{8\pm 10}{2} \begin{cases} y=9 \to x^2=9 \to x=\pm 3 \\ y=-1 \text{ (no vale)} \end{cases}$

c) $x-\sqrt{2x-1}=1-x \to (2x-1)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 \to 4x^2-4x+1=2x-1 \to 4x^2-6x+2=0 \to 2x^2-3x+1=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(2)\cdot(1)}}{4}=\dfrac{3\pm 1}{4} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1/2 \end{cases}$ (Son válidas ambas soluciones.)

d) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-3)} \to (x+1)\cdot x-(x-3)(x+3)=x^2-3 \to x^2+x-(x^2-9)=x^2-3 \to$

$\to x^2+x-x^2+9=x^2-3 \to x+9=x^2-3 \to x^2-x-12=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(1)\cdot(-12)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{1\pm 7}{2} \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-3 \end{cases}$

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9$

b) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x}$

c) $log\, x + log\, 2 = 1$

d) $log_x 49 = 2$

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9 \;\rightarrow\; 3^{x^2-2} = 3^2 \;\rightarrow\; x^2 - 2 = 2 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = \pm 2$

b) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x} \;\rightarrow\; 5^{x^2} \cdot (5^2)^{x-1} = 5^{3x} \;\rightarrow\; 5^{x^2} \cdot 5^{2x-2} = 5^{3x} \;\rightarrow\; 5^{x^2+2x-2} = 5^{3x} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + 2x - 2 = 3x \;\rightarrow\; x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (1) \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$$

c) $log\, x + log\, 2 = 1 \;\rightarrow\; log\, 2x = log\, 10 \;\rightarrow\; 2x = 10 \;\rightarrow\; x = 5$

d) $log_x 49 = 2 \;\rightarrow\; x^2 = 49 \;\rightarrow\; x = 7,\; x = -7$

Como la base no puede ser negativa, $x = 7$.

5 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} xy = -2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = -2 \;\rightarrow\; x = -\dfrac{2}{y} \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$$3\left(-\frac{2}{y}\right) + 2y = -1 \;\rightarrow\; -\frac{6}{y} + 2y = -1 \;\rightarrow\; -6 + 2y^2 = -y \;\rightarrow\; 2y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (2) \cdot (-6)}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \left\langle \begin{array}{l} y_1 = \frac{3}{2} \;\rightarrow\; x_1 = -\frac{4}{3} \\ y_2 = -2 \;\rightarrow\; x_2 = 1 \end{array} \right.$$

Hay dos pares de *soluciones*:

$x_1 = -\dfrac{4}{3},\; y_1 = \dfrac{3}{2};\; x_2 = 1,\; y_2 = -2$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \;\rightarrow\; x = 4 + 2y \end{cases}$

$$\sqrt{-2(4 + 2y)} + y = 1 \;\rightarrow\; \left(\sqrt{-8 - 4y}\right)^2 = (-1 - y)^2 \;\rightarrow\; -8 - 4y = 1 + 2y + y^2 \;\rightarrow\; y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}}{2} = \frac{-6}{2} \;\rightarrow\; y = -3$$

$x = 4 + 2(-3) \;\rightarrow\; x = -2$

Solución: $x = -2,\; y = -3$

6 **Resuelve por el método de Gauss:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x-5y+z=11 \\ x+2y-3z=-10 \\ x+y-2z=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a)-3\cdot(3.^a) \\ (2.^a)-(3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -8y+7z=29 \\ y-z=-4 \\ x+y-2z=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a)+8\cdot(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -z=-3 \\ y-z=-4 \\ x+y-2z=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=3 \\ y=-1 \\ x=1 \end{array}$$

Solución: $x = 1,\ y = -1,\ z = 3$

b) $$\left.\begin{array}{r} x-5y+9z=4 \\ 2x+y-3z=2 \\ x+17y-33z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)\cdot(1.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-5y+9z=4 \\ 11y-21z=-6 \\ 22y-42z=-4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(2.^a) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-5y+9z=4 \\ 11y-21z=-6 \\ 0=8 \end{array}\right\}$$

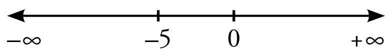
El sistema no tiene solución.

7 **Resuelve:**

a) $x^2 + 5x \geq 0$ **b)** $x^2 - 25 < 0$ **c)** $\begin{cases} 2x+1 \geq 7 \\ x+1 \leq 8 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ y-2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$

a) $x^2 + 5x \geq 0 \rightarrow x(x+5) \geq 0$

Las raíces de $x(x+5) = 0$ son 0 y 5:

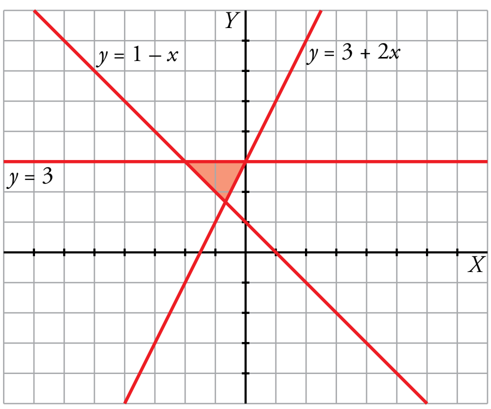


$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x=-6 \rightarrow -6(-6+5)>0 \\ \text{Si } x=-1 \rightarrow -1(-1+5)<0 \\ \text{Si } x=1 \rightarrow 1(1+5)>0 \end{array}\right\} \textit{Solución}: (-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$$

b) $x^2 - 25 < 0 \rightarrow x^2 < 25 \rightarrow -5 < x < 5 \rightarrow$ *Solución*: $(-5, 5)$

c) $$\left.\begin{array}{l} 2x+1 \geq 7 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3 \\ x+1 \leq 8 \rightarrow x \leq 7 \end{array}\right\} \textit{Solución}: [3, 7]$$

d) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ y-2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$ La solución es el recinto sombreado:



8 **Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kilos por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?**

Llamamos x al número de kilos que compró el tendero.

Llamamos y al precio al que compra cada kilo de manzanas.

$$\begin{cases} x \cdot y = 125 \\ (x-20)(y+0,4) = 147 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (nos quedamos solo con la solución positiva):

$x = 125, \; y = 1$

Por tanto, el tendero compró 125 kg.