Resuelve

Página 215

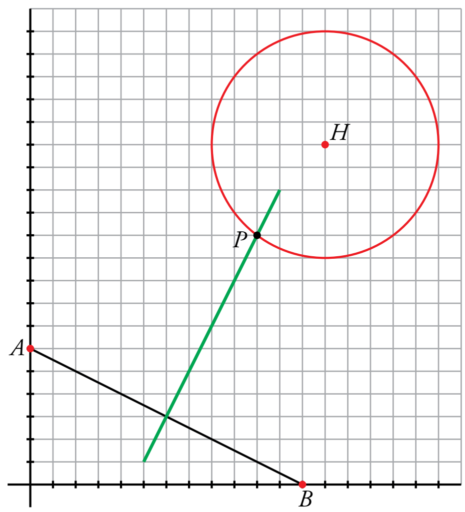
¿Dónde se situará el depósito?

Se quiere instalar un gran depósito de propano para abastecer a una factoría industrial y a dos urbanizaciones.

Han de cumplirse las siguientes condiciones: conviene que el depósito esté lo más cerca de la factoría, pero por razones de seguridad, no puede estar a menos de 500 m de un horno que hay en ella. Por tanto habrá de situarse, exactamente, a 500 m del horno, H. Además, se desea que esté a la misma distancia de A que de B.

Para resolverlo, llevamos los datos a unos ejes cartesianos (1 cuad = 100 m) y suponemos que los puntos H, A y B se sitúan donde se indica en la gráfica de la derecha.

- **La circunferencia roja es el conjunto de puntos que están a 500 m del horno. Analíticamente, son puntos (x, y) cuya distancia a $H(13, 15)$ es 5. Exprésalo mediante una ecuación.**
- **La recta verde es el conjunto de puntos que equidistan de A y de B. Analíticamente, es una recta que pasa por $(6, 3)$ y tiene pendiente 2. Escribe su ecuación.**
- **El punto P donde hemos de situar el depósito de propano se obtiene hallando la intersección de las dos líneas que acabamos de describir. Resuelve el sistema que forman sus ecuaciones para hallar las coordenadas de P.**



- $\sqrt{(x-13)^2+(y-15)^2}=5$
- $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-3}{2} \to 2x-y-9=0$
- $\begin{cases}\sqrt{(x-13)^2+(y-15)^2}=5\\ 2x-y-9=0\end{cases} \to x=\dfrac{72}{5},\ y=\dfrac{99}{5};\ x=10,\ y=11$

La solución es $P=(10, 11)$ porque el depósito debe estar cerca de las urbanizaciones.

1 Lugares geométricos

Página 216

Hazlo tú 1. Halla la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(0, 0)$ y $B(6, 4)$.

$X = (x, y)$ punto de la mediatriz.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2} \to x^2+y^2 = x^2+36-12x+y^2+16-8y$$

Mediatriz: $-12x-8y+52=0 \to -3x-2y+13=0$

Página 217

Hazlo tú 2. Halla la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por r_1: $5x-12y=0$ y r_2: $12x+5y=0$.

$X = (x, y)$ punto de la bisectriz.

$$\frac{|5x-12y|}{13} = \frac{|12x+5y|}{13} \to |5x-12y| = |12x+5y| \to$$

$$\to \begin{cases} 5x-12y=12x+5y \\ 5x-12y=-(12x+5y) \end{cases} \to \begin{cases} B_1: -7x-17y=0 \\ B_2: 17x-7y=0 \end{cases}$$

Hazlo tú 3. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a $P(2, 5)$ y a $Q(4, -1)$ es 40, es decir, $\overline{XP}^2 - \overline{XQ}^2 = 40$.

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}\right)^2 = 40 \to$$

$$\to (x-2)^2+(y-5)^2-((x-4)^2+(y+1)^2) = 40 \to$$

$$\to 4x-12y+12 = 40 \to 4x-12y-28=0 \text{ es una recta.}$$

1 Halla las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos:

a) Mediatriz del segmento de extremos $A(-5, -3)$, $B(7, 1)$. Comprueba que es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

b) Circunferencia de centro $O(-3, 4)$ y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas.

c) Bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

r_1: $5x+y+3=0$

r_2: $x-2y+16=0$

Comprueba que las bisectrices son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto en que se cortan las rectas r_1 y r_2.

a) Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir $dist(X, A) = dist(X, B)$:

$$\sqrt{(x+5)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$x^2+10x+25+y^2+6y+9 = x^2-14x+49+y^2-2y+1$$

$$10x+14x+6y+2y+34-50=0 \to 24x+8y-16=0$$

$$3x+y-2=0 \to y=-3x+2$$

• El punto medio de AB es $M(1, -1)$ que, efectivamente, está en la recta (pues verifica la ecuación).

- La pendiente de la recta es $m_r = -3$, y la del segmento es:

  $$m_{AB} = \frac{1-(-3)}{7-(-5)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

  Cumplen que $m_r \cdot m_{AB} = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow AB \perp r$

b) Los puntos $X(x, y)$ son tales que:

$$dist\,(X, O) = 5 \rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} = 5 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y + 25 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y = 0$$

c) Son los puntos $X(x, y)$:

$$dist\,(X, r_1) = dist\,(X, r_2) \rightarrow \frac{|5x+y+3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x-2y+16|}{\sqrt{5}}$$

Se dan dos casos: $\sqrt{5}\,(5x+y+3) = \sqrt{26}\,(x-2y+16)$

$\sqrt{5}\,(5x+y+3) = -\sqrt{26}\,(x-2y+16)$

Son dos rectas: b_1: $(5\sqrt{5}-\sqrt{26})x + (\sqrt{5}+2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$

b_2: $(5\sqrt{5}+\sqrt{26})x + (\sqrt{5}-2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$

- Sus pendientes son:

  $$\left.\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{-(5\sqrt{5}-\sqrt{26})}{\sqrt{5}+2\sqrt{26}} \\ m_2 = \dfrac{-(5\sqrt{5}+\sqrt{26})}{\sqrt{5}-2\sqrt{26}} \end{array}\right\} \rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{25 \cdot 5 - 26}{5 - 4 \cdot 26} = \frac{99}{-99} = -1 \rightarrow b_1 \perp b_2$$

- Calculamos el punto de corte de las rectas iniciales y comprobamos que está también en ambas bisectrices:

  $$\left.\begin{array}{l} r_1: 5x+y+3=0 \rightarrow y=-5x-3 \\ r_2: x-2y+16=0 \end{array}\right\} \rightarrow x - 2(-5x-3) + 16 = 0 \rightarrow$$

  $$\rightarrow x + 10x + 6 + 16 = 0 \rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$$

  Luego: $y = -5(-2) - 3 = 7$

  El punto de corte es $(-2, 7)$, que se puede comprobar fácilmente que está en b_1 y b_2 sustituyendo en sus ecuaciones respectivas:

  $$b_1: (5\sqrt{5}-\sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5}+2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} =$$

  $$= -10\sqrt{5} + 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} + 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$$

  $$b_2: (5\sqrt{5}+\sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5}-2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} =$$

  $$= -10\sqrt{5} - 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} - 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$$

- Por tanto, b_1 y b_2 son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

2 Estudio de la circunferencia

Página 218

Hazlo tú 1. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 2) y radio 3.

$(x+5)^2+(y-2)^2=9 \;\rightarrow\; x^2+10x+y^2-4y+29=9 \;\rightarrow\; x^2+10x+y^2-4y+20=0$

Página 219

Hazlo tú 2. ¿Qué ecuaciones corresponden a circunferencias? Da su centro y su radio.

a) $2x^2+2y^2-8x=0$

b) $x^2-y^2+7x-2=0$

c) $x^2+y^2-3x+4xy-16=0$

d) $x^2+y^2+10x-2y+40=0$

a) $2x^2+2y^2-8x=0 \;\rightarrow\; x^2+y^2-4x=0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$r^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C=\left(\frac{-4}{2}\right)^2=2>0 \;\rightarrow$ Sí es circunferencia.

b) $x^2+y^2-7x-2=0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$r^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2+2=\frac{57}{4}>0 \;\rightarrow$ Sí es circunferencia.

c) $x^2+y^2-3x+4xy-16=0$

Hay término en $xy \;\rightarrow$ No es circunferencia.

d) $x^2+y^2+10x-2y+40=0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$r^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2+\left(\frac{-2}{2}\right)^2-40=-14<0 \;\rightarrow$ No es circunferencia.

Hazlo tú 3. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6, 0)$ y $N(-2, 0)$ es 3 (es decir, $\overline{PM}/\overline{PN}=3$)?

$X=(x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\frac{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}=3 \;\rightarrow\; \sqrt{(x-6)^2+y^2}=3\sqrt{(x+2)^2+y^2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; (x-6)^2+y^2=9[(x+2)^2+y^2] \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2-12x+y^2+36=9x^2+36x+9y^2+36 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 8x^2+8y^2+48x=0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2+y^2+6x=0 \;\rightarrow$$ Es una circunferencia de centro $(-3, 0)$ y radio $r=\sqrt{9}=3$.

1 Halla la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 12) y radio 13.

Comprueba que pasa por el punto (0, 0).

$(x+5)^2+(y-12)^2=169 \;\rightarrow\; x^2+y^2+10x-24y=0$

Si sustituimos $x=0$, $y=0$ en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por $(0, 0)$.

2 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los extremos del segmento AB, $A(-3, 0)$ y $B(5, 0)$, es 50.

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\left(\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)^2=50 \rightarrow (x+3)^2+y^2+(x-5)^2+y^2=50 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2+2y^2-4x-16=0 \rightarrow x^2+y^2-2x-8=0$$

Es una circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio $r=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$.

Página 220

Hazlo tú. Halla la posición relativa de las rectas

$r_1: y = x - 1$ $\quad$ $r_2: y = x + 1$ $\quad$ $r_3: y = 3$

respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x+2y+1=0 \\ y=x-1 \end{cases} \rightarrow x=4,\ y=3;\ \ x=0,\ \ y=-1$$

Hay dos soluciones, se cortan en dos puntos, luego son secantes.

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x+2y+1=0 \\ y=x+1 \end{cases} \rightarrow \text{No hay solución, luego son exteriores.}$$

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x+2y+1=0 \\ y=3 \end{cases} \rightarrow x=4,\ \ y=3$$

Hay una solución, se cortan en un punto, luego son tangentes.

3 Estudia la posición relativa de la circunferencia

$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

respecto de las rectas:

$s_1: 3x - 4y - 26 = 0$ $\quad$ **$s_2: 5x - 8y + 60 = 0$**

$s_3: 3x - 4y - 1 = 0$ $\quad$ **$s_4: x = 5$**

Halla los puntos de corte y de tangencia, si los hubiera.

- $$\left.\begin{array}{l} C: x^2+y^2-6x-4y-12=0 \\ s_1: 3x-4y-26=0 \end{array}\right\} \rightarrow 3x=4y+26 \rightarrow x=\frac{4}{3}y+\frac{26}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}y+\frac{26}{3}\right)^2+y^2-6\left(\frac{4}{3}y+\frac{26}{3}\right)-4y-12=0 \rightarrow$$

$$\frac{16}{9}y^2+\frac{676}{9}+\frac{208}{9}y+y^2-8y-52-4y-12=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2+676+208y+9y^2-72y-468-36y-108=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25y^2+100y+100=0 \rightarrow y^2+4y+4=0 \rightarrow (y+2)^2=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y=-2 \ \ \text{(solución única)}$$

$$x=\frac{4}{3}(-2)+\frac{26}{3} \rightarrow x=6$$

C y s_1 son tangentes en el punto $(6, -2)$.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2+y^2-6x-4y-12=0 \\ s_2: 5x-8y+60=0 \end{array}\right\} \to 5x=8y-60 \to x=\frac{8}{5}y-12$

$\left(\frac{8}{5}y-12\right)^2+y^2-6\left(\frac{8}{5}y-12\right)-4y-12=0 \to \frac{64}{25}y^2+144-\frac{192}{5}y+y^2-\frac{48}{5}+72-4y-12=0 \to$

$\to 64y^2+3\,600-960y+25y^2-240+1\,800-100y-300=0 \to$

$\to 89y^2-1\,060y+4\,860=0 \to$ No tiene solución.

s_2 es exterior a la circunferencia C.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2+y^2-6x-4y-12=0 \\ s_3: 3x-4y-1=0 \end{array}\right\} \to 3x=4y+1 \to x=\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}$

$\left(\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}\right)^2+y^2-6\left(\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}\right)-4y-12=0 \to \frac{16}{9}y^2+\frac{1}{9}+\frac{8}{9}y+y^2-8y-2-4y-12=0 \to$

$\to 16y^2+1+8y+9y^2-72y-18-36y-108=0 \to$

$\to 25y^2-100y-125=0 \to y^2-4y-5=0 \left\langle \begin{array}{l} y_1=5 \to x_1=7 \\ y_2=-1 \to x_2=-1 \end{array}\right.$

C y s_3 son secantes en los puntos (7, 5) y (–1, –1).

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2+y^2-6x-4y-12=0 \\ s_4: x=5 \end{array}\right\} \to 25+y^2-30-4y-12=0 \to y^2-4y-17=0$

$y=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot(-17)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{84}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{21}}{2}=2\pm\sqrt{21} \left\langle \begin{array}{l} y_1=2+\sqrt{21} \\ y_2=2-\sqrt{21} \end{array}\right.$

C y s_4 se cortan en los puntos $(5, 2+\sqrt{21})$ y $(5, 2-\sqrt{21})$.

4 ¿Para qué valores de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$?

La recta será tangente a la circunferencia si la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual al radio de la circunferencia.

$C:\ x^2+y^2=9 \to O=(0,0),\ R=3$

$r: y=x+b \to x-y+b=0$

$dist\,(O, r)=\frac{|0-0+b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{2}}=3 \to b=\pm3\sqrt{2}$

5 Halla la posición relativa de $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecto de las rectas:

$r_1: x + y = 10$ $r_2: 4x + 3y + 20 = 0$

$r_3: 3x - 4y = 0$ $r_4: y = -2$

$C: x^2+y^2-6x+8y=0 \to O=(3,-4),\ r=5$

- $dist\,(O, r_1)=\frac{|3-4-10|}{\sqrt{1+1}}=\frac{11}{\sqrt{2}}\approx7{,}78>5 \to r_1$ es exterior a C.
- $dist\,(O, r_2)=\frac{|4\cdot3+3(-4)+20|}{\sqrt{16+9}}=\frac{20}{5}=4<5 \to r_2$ y C se cortan en dos puntos.
- $dist\,(O, r_3)=\frac{|3\cdot3-4(-4)|}{\sqrt{9+16}}=\frac{25}{5}=5 \to r_3$ y C son tangentes.
- $dist\,(O, r_4)=\frac{|-4+2|}{\sqrt{0+1}}=\frac{2}{1}=2<5 \to r_4$ y C se cortan en dos puntos.

Página 221

6 **Halla la potencia de $P(-3, 8)$ a las siguientes circunferencias:**

$$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0$$

$$C_2: O(4, -3),\ r = 20$$

Di si P es interior o exterior a C_1 y a C_2.

$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0 \rightarrow O_1 = (7, 0),\ r_1 = \sqrt{49 - 20} = \sqrt{29}$

$C_2: O(4, -3),\ r = 20$

$P(-3, 8)$

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = (7 + 3)^2 + (0 - 8)^2 - (\sqrt{29})^2 = 100 + 64 - 29 = 135 > 0 \rightarrow P$ es exterior a C_1.

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = (4 + 3)^2 + (-3 - 8)^2 - (20)^2 = 49 + 121 - 400 = -230 < 0 \rightarrow P$ es interior a C_2.

7 **Halla el eje radical de estas circunferencias:**

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 6y = 0$$

Comprueba que es una recta perpendicular a la línea de sus centros.

Calculamos las potencias de un punto genérico $P(x, y)$ a C_1 y a C_2:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0 \\ \mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = x^2 + y^2 - 6y = 0 \end{array}\right\} \text{ Igualamos ambas expresiones:}$$

$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = x^2 + y^2 - 6y \rightarrow -4x + 18y - 11 = 0$

Ecuación del eje radical: $4x - 18y + 11 = 0 \rightarrow m = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Centro de } C_1 \rightarrow O_1 = (2, -6) \\ \text{Centro de } C_2 \rightarrow O_2 = (0, 3) \end{array}\right\} \overrightarrow{O_1 O_2} = (-2, 9) \rightarrow$$

$\rightarrow$ La pendiente de la recta que une O_1 y O_2 es $m' = -\dfrac{9}{2}$.

Como $m \cdot m' = \left(\dfrac{2}{9}\right) \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) = -1$, el eje radical y la recta que une O_1 y O_2 son perpendiculares.

3 Las cónicas como lugares geométricos

Página 223

Hazlo tú. Dados los puntos $F_1(-3, 0)$ y $F_2(1, -2)$ y la recta $r: x + 2y - 5 = 0$, obtén las ecuaciones de:

a) La elipse de focos F_1 y F_2 y constante 20.

b) La hipérbola de focos F_1 y F_2 y constante 2.

c) La parábola cuyo foco es F_1 y cuya directriz es r.

a) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 20$

b) $\left|\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right| = 2$

c) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \dfrac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{1+4}}$

1 Halla la ecuación de la elipse de focos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$ y cuya constante es 10.

Una vez puesta la ecuación inicial, pasa una raíz al segundo miembro, eleva al cuadrado (¡atención con el doble producto!), simplifica, aísla la raíz, vuelve a elevar al cuadrado y simplifica hasta llegar a la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$dist\,(P, F_1) + dist\,(P, F_2) = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado: $(x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Operamos: $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 + x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 16x + 100$

$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 4x + 25$

Elevamos al cuadrado: $25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 16x^2 + 200x + 625$

Simplificamos:

$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625 \;\rightarrow\; 9x^2 + 25y^2 = 225$

2 Halla la ecuación de la hipérbola de focos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y cuya constante es 6. Simplifica como en el ejercicio anterior hasta llegar a la expresión $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, entonces:

$|dist\,(P, F_1) - dist\,(P, F_2)| = 6$

$dist\,(P, F_1) - dist\,(P, F_2) = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 9$

Elevamos al cuadrado: $9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 25x^2 + 90x + 81$

$16x^2 - 9y^2 = 144$

3 **Halla la ecuación de la parábola de foco $F(-1, 0)$ y directriz r: $x = 1$. Simplifica hasta llegar a la expresión $y^2 = -4x$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$dist\,(P, F) = dist\,(P, r)$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x - 1|$

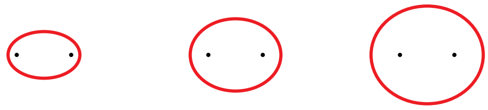
Elevamos al cuadrado: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$

Simplificamos: $y^2 = -4x$

4 Estudio de la elipse

Página 224

1 ¿Verdadero o falso? Si varias elipses tienen la misma distancia focal, cuanto más grande sea la constante $k = 2a$, mayor es la excentricidad.

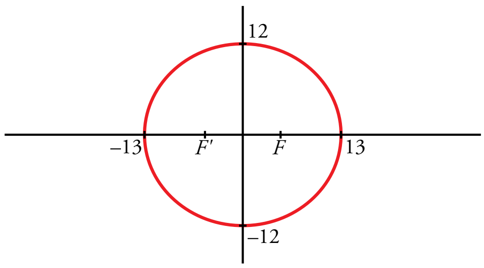


Falso. Al contrario; como $e = \frac{c}{a}$, si el numerador c es constante, cuanto mayor sea el denominador a, menor será el cociente, que es la excentricidad.

Página 225

2 Una elipse tiene sus focos en los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y su constante es $k = 26$.
Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

- Semieje mayor: $k = 26 \to 2a = 26 \to a = 13$
- Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 10 \to 2c = 10 \to c = 5$
- Semieje menor: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$
- Excentricidad: $\frac{c}{a} = \frac{5}{13} \approx 0,38 \to exc \approx 0,38$
- Ecuación reducida: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$



Página 226

3 Representa y di su excentricidad.

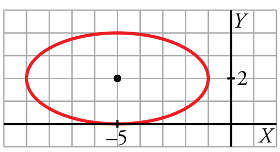
a) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

b) $9x^2 + 16y^2 = 144$

c) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$

d) $x^2 + 4(y-3)^2 = 4$

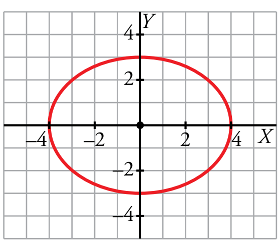
a)



$c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

$exc = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0,87$

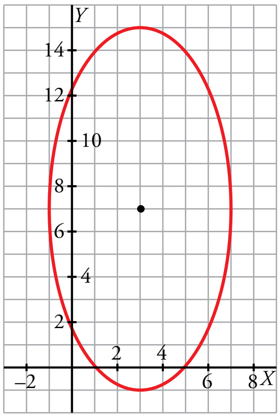
b)



$9x^2 + 16y^2 = 144 \to \frac{x^2}{\frac{144}{9}} + \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \to \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \to$

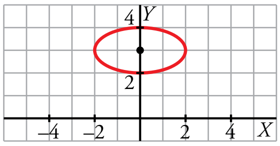
$\to 16 = a^2,\ 9 = b^2 \to c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$exc = \frac{\sqrt{7}}{4}$

c) 

$$c = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$$

$$exc = \frac{\sqrt{48}}{8} \approx 0,87$$

d) 

$$x^2 + 4(y-3)^2 = 4 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{4} + (y-3)^2 = 1 \;\rightarrow\; 4 = a^2,\;\; 1 = b^2$$

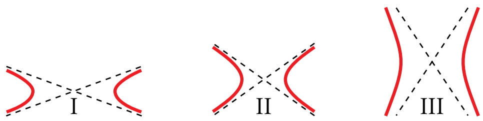
$$a = 2,\;\; b = 1;\;\; c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$exc = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5 Estudio de la hipérbola

Página 228

1 ¿Verdadero o falso?



a) La hipérbola III es la más excéntrica.

b) La hipérbola I es la menos excéntrica.

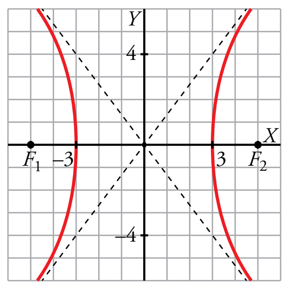
a) Verdadero, porque el valor absoluto de la pendiente de las asíntotas, $m = \left|\frac{b}{a}\right|$, es muy grande, luego la excentricidad, $e = \frac{c}{a}$, será más grande, puesto que $c > b$.

b) Verdadero, porque las asíntotas $y = \frac{b}{a}x$ tienen poca pendiente en valor absoluto, luego la excentricidad, $e = \frac{c}{a} < \left|\frac{b}{a}\right|$, será más pequeña.

2 Una hipérbola tiene sus focos en los puntos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y su constante es $k = 6$.

Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

- Semieje: $k = 2a = 6 \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \rightarrow c = 5$
- Cálculo de b: $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow b = 4$
- Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$
- Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$; $y = -\frac{4}{3}x$
- Ecuación reducida: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$



Página 229

3 Representa.

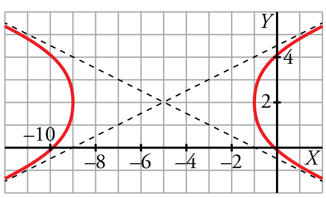
a) $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

b) $9x^2 - 16y^2 = 144$

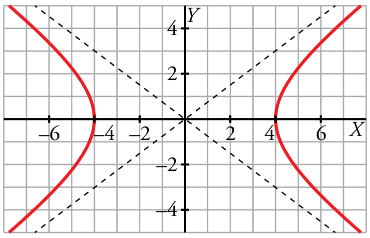
c) $\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

d) $x^2 - 4(y-3)^2 = 4$

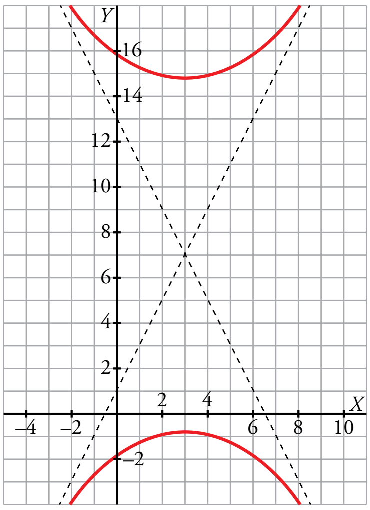
a)



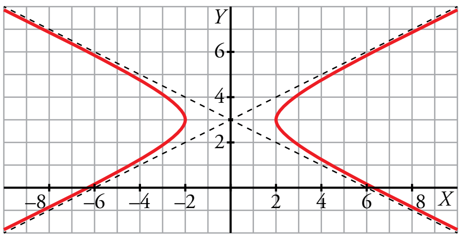
b) $9x^2 - 16y^2 = 144 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$



c)



d) $x^2 - 4(y-3)^2 = 4 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{1} = 1$



6 Estudio de la parábola

Página 230

1 Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(1,5;\ 0)$ y directriz $x = -1,5$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{(x-1,5)^2 + y^2} = |x + 1,5|$$

$$x^2 - 3x + 2,25 + y^2 = x^2 + 3x + 2,25 \ \rightarrow\ y^2 = 6x$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 3$

  Ecuación reducida: $y^2 = 6x$

2 Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(0, 2)$ y directriz $y = -2$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 2|$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \ \rightarrow\ x^2 = 8y$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 4$

  Ecuación reducida: $x^2 = 8y$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 232

1. Determinación de una circunferencia conocidos tres puntos por los que pasa

Hazlo tú. Obtén el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por $P(-1, -3)$, $Q(2, -2)$ y $R(3, 0)$.

r: mediatriz de PQ

$\overrightarrow{PQ} = (2, -2) - (-1, -3) = (3, 1)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (-1, 3)$ y pasa por $M_{PQ} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$r: \dfrac{x - \frac{1}{2}}{-1} = \dfrac{y + \frac{5}{2}}{3} \rightarrow 3x + y + 1 = 0$

s: mediatriz de PR

$\overrightarrow{PR} = (2, -2) - (3, 0) = (1, 2)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (-2, 1)$ y pasa por $M_{PR} = \left(\frac{5}{2}, -1\right)$

$r: \dfrac{x - \frac{5}{2}}{-2} = \dfrac{y + 1}{1} \rightarrow 2x + 4y - 1 = 0$

Centro $\rightarrow \begin{cases} 3x + \ \ y + 1 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} \rightarrow C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Radio $= |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

La ecuación de la circunferencia es: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

2. Identificación de un lugar geométrico

Hazlo tú. Resuelve este mismo ejercicio siendo $A(0, 2)$ y $r: y = -2$.

$X(x, y)$ es un punto genérico del lugar geométrico buscado.

$P = (x_0, -2) \in r$

$\overrightarrow{PX} = (x_0 - x, -2 - y)$ ha de ser perpendicular a la recta r; es decir, paralelo al eje Y o, lo que es lo mismo, su primera coordenada ha de valer 0. Por tanto, $x = x_0$.

Al ser X el centro de la circunferencia, debe equidistar de A y de P:

$$dist\,(X, A) = dist\,(X, P) \rightarrow \sqrt{(-x)^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{(-2 - y)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 8y$$

Se trata de una parábola cuyo foco es $A(0, 2)$ y cuya directriz es $r: y = -2$.

Página 233

3. Descripción de una cónica a partir de su ecuación

Hazlo tú. Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y dibújalas:

a) $x^2 - 2y + 2 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 9y^2 - 2x - 8 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

a) $x^2 - 2y + 2 = 0 \rightarrow$ Parábola con eje vertical.

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

$x^2 = 2y - 2 = 2(y - 1) \rightarrow p = 1$

Foco: $F = \left(0, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

Es una hipérbola porque los coeficientes de x^2 e y^2 tienen distinto signo.

Completamos cuadrados:

$(x^2 - 2x + 1) - 4y^2 - 3 - 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 - 4y^2 = 4 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$

Centro: $O = (1, 0)$. Focos en el eje X.

Semiejes: $a = 2$, $b = 1$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{5}$

Excentricidad: $exc = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm\frac{1}{2}(x - 1)$

c) $x^2 + 9y^2 = 2x - 8 = 0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos, pero del mismo signo; es una elipse.

Completamos cuadrados:

$(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 - 8 - 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + 9y^2 = 9 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$

Es una elipse de centro $O(1, 0)$ y eje mayor paralelo al eje X.

Semiejes: $a = 3$, $b = 1$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{8}$

Excentricidad: $exc = \frac{\sqrt{8}}{3}$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

Se trata de una circunferencia porque los coeficientes de x^2 e y^2 son 1 y no hay término en xy.

Completamos cuadrados:

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 9 - 4 - 9 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$

Circunferencia de centro $O(-2, -3)$ y radio $r = 2$.

Página 234

4. Determinación de la ecuación de una elipse no centrada en el origen

Hazlo tú. Obtén la ecuación de la elipse de focos $F'(3, -2)$ y $F(3, 6)$ y cuya excentricidad es $e = \frac{4}{5}$.

$O = M_{FF'} = (3, 2)$

$dist\,(F', F) = 8 = 2c \rightarrow c = 4$

$e = \frac{4}{5} = \frac{4}{a} \rightarrow a = 5$

$b = \sqrt{25 - 16} = 3$

La ecuación requerida es: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

5. Determinación de la ecuación de una hipérbola no centrada en el origen

Hazlo tú. Resuelve este mismo ejercicio si las asíntotas son $y = \pm 2(x - 1)$ y $|a - b| = 1/2$.

El centro es el punto de intersección de ambas asíntotas.

$$\begin{cases} y = 2(x-1) \\ y = -2(x-1) \end{cases} \rightarrow x = 1,\ y = 0 \rightarrow O = (1, 0)$$

Para calcular a y b resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ |a - b| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

que nos da los dos sistemas siguientes:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ a - b = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = 1$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ a - b = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{2},\ b = -1 \text{ No es válido el resultado.}$$

La ecuación buscada es:

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} = 1 \text{ o } \frac{y^2}{1} - \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1 \text{ dependiendo del eje en el que estén los focos.}$$

6. Determinación de la ecuación de una parábola no centrada en el origen

Hazlo tú. Halla la ecuación de una parábola de vértice $V(1, 1)$ y foco $F(1, 4)$.

$V = (1, 1)$ y F pertence a la recta $x = 1$, por lo que la directriz tiene la forma $d: y = k$.

$dist\,(V, F) = dist\,(V, d) = 3 \rightarrow d: y = -2$

Ecuación de la parábola:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \rightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (4-y)^2} = |y + 2| \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 - 2x - 12y + 13 = 0$$

$(x - 1)^2 = 12(y - 1)$

Página 235

7. Cálculo de la recta tangente a una elipse desde un punto exterior a la misma

Hazlo tú. **Halla las rectas que pasan por $P(0, 5)$ y son tangentes a la elipse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.**

Haz de rectas que pasan por $P = (0, 5)$:

$y = mx + 5$, $m \in \mathbb{R}$, más la recta vertical $x = 0$

$$\begin{cases} y = mx+5 \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \end{cases} \to \frac{x^2}{25}+\frac{(mx+5)^2}{16}=1 \to 16x^2+25(mx+5)^2=400 \to$$

$$\to 25m^2x^2+250mx+16x^2+625=400 \to (25m^2+16)x^2+250mx+225=0$$

Si las rectas son tangentes a la elipse, el discriminante de esta ecuación tiene que ser 0.

$$\Delta = (250m)^2 - 4 \cdot (25m^2+16) \cdot 225 = 0 \to m = -\frac{3}{5},\ m = \frac{3}{5}$$

Las rectas tangentes son:

$$r: y = -\frac{3}{5}x+5;\ r': y = \frac{3}{5}x+5$$

8. Cálculo de la recta tangente a una parábola en un punto

Hazlo tú. **Resuelve este ejercicio para la parábola $y^2 = -4x$ y el punto $A(-4, 4)$.**

Haz de rectas que pasan por $A = (-4, 4)$:

$y = m(x+4)+4$, $m \in \mathbb{R}$, más la recta vertical $x = -4$

$$y^2=-4x \begin{cases} y = m(x+4)+4 \\ y^2=-4x \end{cases} \to y = m\left(\frac{y^2}{-4}+4\right)+4 \to 4y = -my^2+16m+16$$

$$my^2+4y-16m-16=0$$

Si las rectas son tangentes a la parábola, el discriminante de esta ecuación tiene que ser 0.

$$\Delta = 16 - 4 \cdot m \cdot (-16m-16) = 0 \to m = -\frac{1}{2}$$

La recta tangente es:

$$y = -\frac{1}{2}(x+4)+4$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 236

1. Comprobación de que $y = 1/x$ es una hipérbola

Comprobar que la curva $y = \frac{1}{x}$, conocida de cursos anteriores, es una hipérbola de constante $k = 2\sqrt{2}$ y focos $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $F'(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

a) $|dist\,(P, F') - dist\,(P, F)| = 2\sqrt{2}$

$$\left|\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2 + (\sqrt{2}-y)^2} - \sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2 + (-\sqrt{2}-y)^2}\right| = 2\sqrt{2}$$

b) $\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2 + (\sqrt{2}-y)^2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2 + (-\sqrt{2}-y)^2}$

$$\left(\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2 + (\sqrt{2}-y)^2}\right)^2 = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2 + (-\sqrt{2}-y)^2}\right)^2$$

$$(\sqrt{2}-x)^2 + (\sqrt{2}-y)^2 = 4\sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4} + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + x^2 + y^2 + 12$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2 - 2\sqrt{2}y + 4 = 4\sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4} + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + x^2 + y^2 + 12$$

$$-4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y - 8 = 4\sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4}$$

$$-4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y - 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4}$$

$$-x - y - \sqrt{2} = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4}$$

$$(-x - y - \sqrt{2})^2 = \left(\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4}\right)^2$$

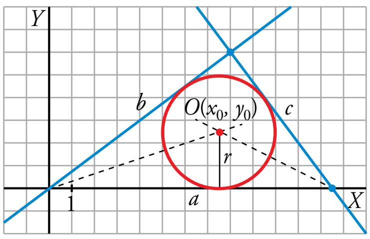
$$x^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 + 2\sqrt{2}y + 4$$

$$2xy = 2 \to xy = 1 \to y = \frac{1}{x}$$

2. Circunferencia inscrita en un triángulo

Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados a, b y c, siendo:

a: $y = 0$
b: $3x - 4y = 0$
c: $4x + 3y - 50 = 0$



- $dist\,(P, a) = dist\,(P, b) \to \left|\frac{y}{1}\right| = \left|\frac{3x - 4y}{5}\right|$

  $5y = 3x - 4y$

  $-5y = 3x - 4y \to$ No vale porque la bisectriz del ángulo tiene pendiente positiva.

- $dist\,(P, a) = dist\,(P, b) \to \left|\frac{y}{1}\right| = \left|\frac{4x + 3y - 50}{5}\right|$

  $5y = 4x + 3y - 50 \to$ No vale porque la bisectriz del ángulo tiene pendiente negativa.

  $-5y = 4x + 3y - 50$

- Incentro:

$$\begin{cases} 5y = 3x - 4y \\ -5y = 4x + 3y - 50 \end{cases} \to x = \frac{15}{2},\ y = \frac{5}{2} \to O = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

- $r = dist\,(O, a) = \left|\dfrac{\frac{5}{2}}{1}\right| = \dfrac{5}{2}$
- Ecuación de la circunferencia inscrita:

$$\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 15x + y^2 - 5y + \frac{125}{2} = \frac{25}{4} \;\to\; 4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$$

3. Rectas tangente y normal a una circunferencia en un punto

Sean r y s, respectivamente, las rectas tangente y normal a una circunferencia en un punto P.

$$r: x + y - 7 = 0 \qquad s: x - y - 9 = 0$$

Calcular la ecuación de la circunferencia sabiendo que su radio es $r = 2\sqrt{2}$.

Punto de tangencia:

$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y - 9 = 0 \end{cases} \to x = 8,\; y = -1 \to P = (8, -1)$$

Centro de la circunferencia:

$$\begin{cases} x - y - 9 = 0 \\ \sqrt{(8-x)^2 + (1-y)^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \to \begin{cases} x - y - 9 = 0 \\ (8-x)^2 + (-1-y)^2 = 8 \end{cases} \to$$

$$\to \left.\begin{cases} x - y - 9 = 0 \\ x^2 - 16x + y^2 + 2y + 65 = 8 \end{cases}\right\} \begin{array}{l} \to x = 9 + y \\ \to (9+y)^2 - 16(9+y) + y^2 + 2y + 65 = 8 \to y = 1,\; y = -3 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = 1 \to x = 10 \\ y = -3 \to x = 6 \end{cases} \to \begin{cases} O = (10, 1) \\ O = (6, -3) \end{cases}$$

Hay dos circunferencias:

$$(x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 8$$

$$(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 8$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 237

Para practicar

Lugares geométricos

1 Halla, en cada caso, la mediatriz del segmento AB.

a) $A(5, -1)$ $B(-3, 1)$

b) $A(3, 6)$ $B(-1, 6)$

Comprueba que es una recta perpendicular a AB.

$X = (x, y)$ punto genérico de la mediatriz.

a) $dist\,(X, A) = dist\,(X, B)$

$$\sqrt{(5-x)^2+(-1-y)^2}=\sqrt{(-3-x)^2+(1-y)^2} \to x^2-10x+y^2+2y+26=x^2+6x+y^2-2y+10$$

Mediatriz: $-16x + 4y + 16 = 0 \to \vec{d} = (-4, -16)$

$\overrightarrow{AB} = (-8, 2)$

$(-8, 2) \cdot (-4, -16) = 0$, luego las rectas son perpendiculares.

b) $dist\,(X, A) = dist\,(X, B)$

$$\sqrt{(3-x)^2+(6-y)^2}=\sqrt{(-1-x)^2+(6-y)^2} \to x^2-6x+y^2-12y+45=x^2+2x+y^2-12y+37$$

Mediatriz: $-8x + 8 = 0 \to \vec{d} = (0, 8)$

$\overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

$(0, 8) \cdot (-4, 0) = 0$, luego las rectas son perpendiculares.

2 Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos $A(0, 0)$ y $B(6, 3)$ es 15. ¿Qué figura obtienes?

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

$|x^2 + y^2 - ((6-x)^2 + (3-y)^2)| = 15$

$|12x + 6y - 45| = 15$

$$\begin{cases} 12x+6y-45=15 \\ 12x+6y-45=-15 \end{cases} \to \begin{cases} 12x+6y-60=0 \\ 12x+6y-30=0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas.

3 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $4x - 3y + 11 = 0$ es 6.

$$P(x, y) \text{ cumple que } dist\,(P, r) = 6 \to \frac{|4x-3y+11|}{\sqrt{16+9}}=6 \to$$

$$\to |4x-3y+11| = 30 \to \begin{cases} 4x-3y+11=30 \\ 4x-3y+11=-30 \end{cases} \to \begin{cases} r_1: 4x-3y-19=0 \\ r_2: 4x-3y+41=0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas entre sí y paralelas, a su vez, a la recta dada.

4 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s. Interpreta el resultado.**

$$r: 3x - 5y + 11 = 0 \qquad s: 3x - 5y + 3 = 0$$

$P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s) \rightarrow \dfrac{|3x-5y+11|}{\sqrt{34}} = \dfrac{|3x-5y+3|}{\sqrt{34}} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x-5y+11 = 3x-5y+3 \rightarrow 11 = 3 \text{ ¡¡Imposible!!} \\ 3x-5y+11 = -3x+5y-3 \rightarrow 6x-10y+14 = 0 \rightarrow r: 3x-5y+7 = 0 \end{cases}$$

Es una recta paralela a las dos rectas dadas que, a su vez, son paralelas entre sí, como puede verse por sus coeficientes, pues:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1 \neq \frac{C}{C'} = \frac{11}{3}$$

5 **Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y s:**

$$r: 4x - 3y + 8 = 0 \qquad s: 12x + 5y - 7 = 0$$

Son todos los puntos $P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s)$:

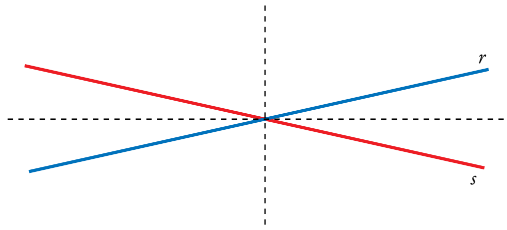
$$\frac{|4x-3y+8|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x+5y-7|}{\sqrt{169}} = \frac{|4x-3y+8|}{5} = \frac{|12x+5y-7|}{13} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 13(4x-3y+8) = 5(12x+5y-7) \\ 13(4x-3y+8) = -5(12x+5y-7) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 52x-39y+104 = 60x+25y-35 \\ 52x-39y+104 = -60x-25y+35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x+64y-139 = 0 \\ 112x-14y+69 = 0 \end{cases}$$

Luego hay dos soluciones, bisectrices de los ángulos cóncavo y convexo que forman las rectas r y s.

Ambas bisectrices se cortan en el punto de corte de las rectas r y s, y son perpendiculares.



Circunferencias

6 **Halla, en cada caso, el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto A es d.**

a) $A(0, 5)$ y $d = 2$

b) $A(0, 0)$ y $d = 1$

c) $A(-2, 0)$ y $d = \frac{1}{2}$

d) $A(-1, -5)$ y $d = \frac{3}{5}$

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

a) $dist(X, A) = d$

$\sqrt{x^2 + (y-5)^2} = 2 \rightarrow x^2 + (y-5)^2 = 4 \rightarrow$ Circunferencia de centro $A = (0, 5)$ y radio $d = 2$.

b) $dist(X, A) = d$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ Circunferencia de centro $A = (0, 0)$ y radio $d = 1$.

c) $dist\,(X, A) = d$

$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \dfrac{1}{2} \to (x+2)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4} \to$ Circunferencia de centro $A = (-2, 0)$ y radio $d = \dfrac{1}{2}$.

d) $dist\,(X, A) = d$

$\sqrt{(x+1) + (y+5)^2} = \dfrac{3}{5} \to (x+1)^2 + (y+5)^2 = \dfrac{9}{25} \to$ Circunferencia de centro $A = (-1, -5)$ y radio $d = \dfrac{3}{5}$.

7 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de distancias a los puntos $A(0, 6)$ y $B(0, 3)$ es 2, es decir:**

$$\frac{dist(P, A)}{dist(P, B)} = 2$$

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

$$\frac{dist\,(P, A)}{dist\,(P, B)} = \frac{\sqrt{x^2 + (y-6)^2}}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} = 2$$

$x^2 + (y-6)^2 = 2(x^2 + (y-3)^2) \to x^2 + y^2 - 12y + 36 = 2x^2 + 2y^2 - 12y + 18 \to x^2 + y^2 = 18$

Circunferencia de centro $A = (0, 0)$ y radio $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

8 **Da, en cada caso, la ecuación de la circunferencia que tiene centro C y radio r.**

a) $C(0, 0)$ **y** $r = 1$ **b)** $C(2, -3)$ **y** $r = 2$ **c)** $C(-1, 0)$ **y** $r = \dfrac{2}{3}$ **d)** $C(0, 3)$ **y** $r = \dfrac{5}{4}$

$X = (x, y)$ punto genérico.

a) $dist\,(X, A) = r$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \to x^2 + y^2 = 1$

b) $dist\,(X, A) = r$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = 2 \to (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

c) $dist\,(X, A) = r$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \dfrac{2}{3} \to (x+1)^2 + y^2 = \dfrac{4}{9}$

d) $dist\,(X, A) = r$

$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \dfrac{5}{4} \to x^2 + (y-3)^2 = \dfrac{25}{16}$

9 **Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:**

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 1 - 10 = 7 > 0$$

Es una circunferencia de centro $(4, -1)$ y radio $\sqrt{7}$.

b) Los coeficientes de x^2 e y^2 no son iguales. No es una circunferencia.

c) Hay un término xy. No es una circunferencia.

d) Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y no tiene término en xy. Dividimos entre 2 la igualdad: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro (4, 0) y radio $\sqrt{4} = 2$.

10 Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y tiene centro en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

$X = (x, y)$ punto genérico.

$dist\,(X, A) = r$

$r = dist\,(P, Q)$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{13}{36} = \frac{1}{4} \rightarrow 36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y + 4 = 0 \rightarrow 9x^2 - 9x + 9y^2 - 6y + 1 = 0$$

11 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -5)$ y cuyo diámetro es igual a 10.

$X = (x, y)$ punto genérico.

$dist\,(X, C) = r$

$r = 5$

$$\sqrt{(x)^2 + (y+5)^2} = 5 \rightarrow x^2 + (y + 5)^2 = 25$$

12 Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(1, -2)$ y por $B(2, -1)$ y tiene radio 1.

El centro de la circunferencia está en la mediatriz de AB y $dist\,(O, A) = 1$.

Mediatriz:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1); \; M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$m: \frac{x - \frac{3}{2}}{-1} = \frac{y + \frac{3}{2}}{1} \rightarrow 2x - 3 = -2y - 3 \rightarrow x = -y$$

$$dist\,(O, A) = 1 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 1$$

O es solución de:

$$\begin{cases} x = -y \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1, \; y = -1; \; x = 2, \; y = -2$$

Hay dos circunferencia que verifican las condiciones:

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ y $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$

13 Uno de los diámetros de una circunferencia tiene por extremos $A(3, -2)$ y $B(7, 0)$. Halla la ecuación de la circunferencia.

El centro es: $M_{AB} = (5, -1)$

$$r = dist\,(O, A) = \sqrt{(5-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{5}$$

Ecuación: $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$

14 **Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(2, -4)$, $B(8, -10)$ y $C(4, -8)$.**

* ***Mira el ejercicio resuelto 1.***

r: mediatriz de AB

$\overrightarrow{AB} = (2, -4) - (8, -10) = (6, -6) = 6(1, -1)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $M_{AB} = (5, -7)$

$r: \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+7}{1} \rightarrow x - y - 12 = 0$

s: Mediatriz de PR

$\overrightarrow{AC} = (2, -4) - (4, -8) = (-2, 4) = 2(-1, 2)$

s: tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, 1)$ y pasa por $M_{AC} = (3, -6)$

$s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+6}{1} \rightarrow x - 2y - 15 = 0$

$$\text{Centro} \rightarrow \begin{cases} x - y - 12 = 0 \\ x - 2y - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 9,\ y = -3 \rightarrow C = (9, -3)$$

$\text{Radio} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-9)^2 + (-4+3)^2} = 5\sqrt{2}$

La ecuación de la circunferencia es $(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 50$

15 **Da la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $(2, -5)$ y es tangente al eje de abscisas.**

$r = dist\,(O, \text{eje } OX) = 5$

La ecuación de la circunferencia es $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$

16 **Obtén la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el punto $(3, -4)$ y que es tangente al eje de ordenadas.**

$r = dist\,(O, \text{eje } OY) = 3$

La ecuación de la circunferencia es $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

17 **Determina la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y es tangente a la recta $x + y - 3 = 0$.**

$r = dist\,(O, s) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{2}$.

18 **Determina las rectas tangente y normal a la circunferencia $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 13$ en el punto $A(-2, 1)$.**

$A \in$ circunferencia.

La normal es la recta que une A con el centro de la circunferencia C.

$C = (-4, -2)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 1) - (-4, -2) = (2, 3)$

$n: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{3} \rightarrow 3x - 2y + 8 = 0$

La tangente es perpendicular a la normal y pasa por A.

$t: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} \rightarrow 2x + 3y + 1 = 0$

Posiciones relativas de rectas y circunferencias

19 **Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta r: $2x - y + 3 = 0$. ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 1)$ y su radio es $R = \sqrt{2}$ La distancia de C a r es:

$$dist\,(C, r) = \frac{|-1+3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89 < \sqrt{2} \approx 1,41$$

Luego la circunferencia y la recta son secantes.

20 **Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ respecto de cada una de las siguientes rectas:**

$$r_1: x + y - 1 = 0 \qquad r_2: 3x - 4y + 9 = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y cada una de las rectas.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

No hay solución $\to$ Son exteriores.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ 3x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \to x = \frac{9}{5},\ y = \frac{18}{5}$$

Hay una solución única, luego son tangentes.

21 **Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ respecto a cada una de las siguientes rectas:**

$$r_1: x - 2 = 0 \qquad r_2: y = 0 \qquad r_3: y = 2x + 1$$

Utiliza, en cada caso, los dos métodos siguientes:

a) Resolviendo los sistemas de ecuaciones formados por la circunferencia y cada recta.

b) Comparando la medida del radio con la distancia de cada recta al centro de la circunferencia.

- $r_1: x - 2 = 0$

  a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

  $$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$ No hay solución, luego son exteriores.

  b) $C = (-1, 2)$

  $$\left.\begin{array}{l} dist(C, r_1) = \left|\dfrac{-1-2}{1}\right| = 3 \\ r = 2 \end{array}\right\} dist\,(C, r_1) > r$$

  Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es mayor que el radio, son exteriores.

- $r_2: y = 0$

  a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

  $$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \to x = -1,\ y = 0$$

  Hay una única solución, luego son tangentes.

b) $C = (-1, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r_2) = \left|\dfrac{-2}{1}\right| = 2 \\ r = 2 \end{array}\right\} \ dist\,(C, r_2) = r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual que el radio, son tangentes.

- r_3: $y = 2x + 1$

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \to x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{11} + \frac{1}{5},\ y_1 = \frac{2}{5}\sqrt{11} + \frac{7}{5};\ x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{11},\ y_2 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{11}$$

Hay dos soluciones, luego son secantes.

b) $C = (0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r_3) = \left|\dfrac{-2-2+1}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{3}{5}\sqrt{5} = 1{,}3416 \\ r = 2 \end{array}\right\} \ dist\,(C, r_3) < r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es menor que el radio, son secantes.

22 Estudia la posición relativa de la recta $y = x + b$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en función del parámetro b.

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y su radio es $r = 1$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$: $d = dist\,(C, s) = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = r$, es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \to |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

23 Determina la posición relativa de la recta $y = 2x - 3$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = a$ en función del valor del parámetro a.

$C = (0, 0)$ es el centro de la circunferencia y $R = \sqrt{a}$, su radio.

Llamamos r: $y = 2x - 3$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r) = \left|\dfrac{-3}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{3}{5}\sqrt{5} \\ R = \sqrt{a} \end{array}\right\} \ \frac{3}{5}\sqrt{5} = \sqrt{a} \to a = \frac{9}{5}$$

- Si $a < \dfrac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son exteriores.
- Si $a = \dfrac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son tangentes.
- Si $a > \dfrac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son secantes.

Página 238

Potencia de un punto a una circunferencia

24 **Calcula la potencia de los puntos $P(5, 2)$, $Q(2, 1)$ y $R(-1, 0)$ a la circunferencia:**

$$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

Utilízalo para estudiar la posición relativa de P, Q y R respecto de C.

$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \rightarrow O(3, 2),\ r = 2$

$P(5, 2) \rightarrow \mathcal{P} = (5-3)^2 + (2-2)^2 - 4 = 0 = 0$; por tanto, P pertenece a C.

$Q(2, 1) \rightarrow \mathcal{P} = (2-3)^2 + (1-2)^2 - 4 = -2 < 0$; por tanto, P es un punto interior a C.

$R(-1, 0) \rightarrow \mathcal{P} = (-1-3)^2 + (0-2)^2 - 4 = 16 > 0$; por tanto, P es un punto exterior a C.

25 **Halla y representa el eje radical de los siguientes pares de circunferencias:**

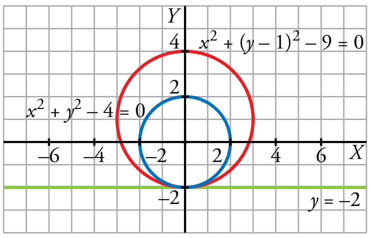
a) $x^2 + y^2 = 4$ **y** $x^2 + (y-1)^2 = 9$

b) $(x-3)^2 + y^2 = 5$ **y** $(x-7)^2 + y^2 = 9$

c) $x^2 + (y-3)^2 = 2$ **y** $(x-5)^2 + y^2 = 1$

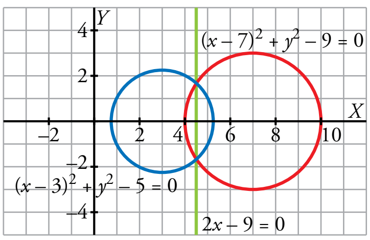
a) $x^2 + y^2 - 4 = x^2 + (y-1)^2 - 9$

$x^2 + y^2 - 4 = x^2 + y^2 - 2y - 8 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2$



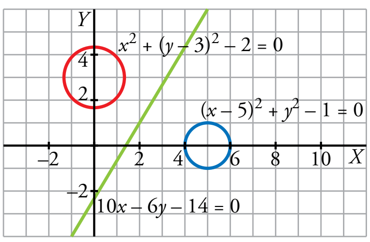
b) $(x-3)^2 + y^2 - 5 = (x-7)^2 + y^2 - 9$

$x^2 - 6x + y^2 + 4 = x^2 - 14x + y^2 + 40 \rightarrow 8y - 36 = 0 \rightarrow 2x - 9 = 0$



c) $x^2 + (y-3)^2 - 2 = (x-5)^2 + y^2 - 1$

$x^2 + y^2 - 6y + 7 = x^2 - 10x + y^2 + 24 \rightarrow 10x - 6y - 14 = 0$



26 **Considera las circunferencias C_1: $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ y C_2: $(x-3)^2+(y+3)^2=10$.**

a) Comprueba que ambas circunferencias son secantes y calcula sus puntos de corte, A y B.

b) Halla las potencias de los puntos A y B a las circunferencias C_1 y C_2.

c) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿qué podrías decir del eje radical de ambas circunferencias?

d) ¿Puedes generalizar este resultado para un par cualquiera de circunferencias secantes?

a) Calculamos los puntos de corte resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=2\\(x-3)^2+(y+3)^2=10\end{cases} \to \begin{cases}x^2-2x+y^2+2y+2=2\\x^2-6x+y^2+18=10\end{cases} \to x_1=0,\ y_1=-2;\ x_2=2,\ y_2=0$$

Puntos de corte: $A=(0,-2)$, $B=(2,0)$, luego son secantes.

b) $A \in C_1 \cap C_2 \to A$ verifica las ecuaciones de C_1 y $C_2 \to \mathcal{P}(A, C_1)=\mathcal{P}(A, C_2)=0$

$B \in C_1 \cap C_2 \to B$ verifica las ecuaciones de C_1 y $C_2 \to \mathcal{P}(B, C_1)=\mathcal{P}(B, C_2)=0$

c) El eje radical es la recta que pasa por A y por B.

d) Sí, pues el razonamiento del apartado b) muestra que los puntos de corte siempre tienen potencia igual a cero respecto a las dos circunferencias. Luego el eje radical siempre pasa por ellos.

Elipses

27 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.**

Es una elipse de focos $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$, y constante $k=10$, es decir, $2a=10$ y $c=4$.

Así: $a=5$; $b^2=a^2-c^2=25-16=9$

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

28 **De una elipse conocemos sus focos $F(0, 1)$ y $F'(0, -1)$ y su constante $k=4$. Determina su ecuación.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$dist\,(P, F)+dist\,(P, F')=2a$, es decir:

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4 \to$

$\to x^2+(y-1)^2=16+x^2+(y+1)^2-8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \to$

$\to x^2+y^2-2y+1=16+x^2+y^2+2y+1-8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \to$

$\to -4y-16=-8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \to (4y+16)^2=64[x^2+(y+1)^2] \to$

$\to 16y^2+256+128y=64x^2+64y^2+64+128y \to$

$\to 192=64x^2+48y^2 \to \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

• De otra forma:

El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une F con F', es decir: $(0, 0)$.

Por otra parte:

$2c=dist\,(F, F')=|\overrightarrow{F'F}|=|(0, 2)|=2 \to c=1$

$2a=4 \to a=2 \to a^2=4$

$b^2=a^2-c^2=4-1=3$

Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

29 **Halla la ecuación de la elipse de focos (–2, 0) y (2, 0) sabiendo que la longitud de su eje mayor es 10.**

$c = 2;\ \ 2a = 10 \ \to\ a = 5;\ \ b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$

30 **Escribe la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y cuya excentricidad es igual a 0,5.**

$c = 3;\ \ exc = \dfrac{c}{a} = 0,5 \ \to\ a = \dfrac{c}{0,5} = \dfrac{3}{0,5} = 6$

$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$

31 **Da la ecuación de la elipse que pasa por (3, 1) y tiene por focos (4, 0) y (–4, 0).**

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

- Como pasa por (3, 1) $\to$ $\dfrac{9}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$
- Como $a^2 = b^2 + c^2$ y sabemos que $c = 4 \ \to\ a^2 = b^2 + 16$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores:

$$\frac{9}{b^2+16} + \frac{1}{b^2} = 1 \ \to\ 9b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2 \ \to\ b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} \begin{cases} b^2 = 2 \\ b^2 = -8 \ \text{(No vale)} \end{cases}$$

Así: $a^2 = 2 + 16 = 18$

Por tanto, la ecuación de la elipse será: $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

32 **De una elipse, centrada en (0, 0), se sabe que su eje mayor, que es igual a 10, está sobre el eje X. Además, pasa por el punto (3, 3). Obtén su ecuación.**

$A = (3, 3)$

Eje mayor = 10 $\to$ $a = 5$

Eje mayor = OX $\to$ El centro es $O = (0, 0)$

La ecuación de la elipse será: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$(3, 3) \in$ elipse $\to$ $\dfrac{3^2}{25} + \dfrac{3^2}{b^2} = 1 \ \to\ \dfrac{9}{25} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \ \to\ b = -\dfrac{15}{4},\ b = \dfrac{15}{4}$

Como b es positivo $\to$ $b = \dfrac{15}{4}$

La ecuación queda:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{225}{16}} = 1 \ \to\ \frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{225} = 1$$

33 **Determina, en cada caso, la ecuación de la elipse, centrada en (0, 0), que tiene estas características:**

a) Su excentricidad es 1/2 y su eje mayor está sobre el eje Y y es igual a 2.

b) Sus vértices son: (–2, 0), (2, 0), (0, –4) y (0, 4).

a) Eje mayor = 2 $\to$ $b = 1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{1}=1;\; e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2} \to \frac{c}{1}=\frac{1}{2} \to c=\frac{1}{2}$$

$$a^2=b^2-c^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

La ecuación queda:

$$\frac{x^2}{\frac{3}{4}}+\frac{y^2}{1}=1 \to \frac{4x^2}{3}+y^2=1$$

b) Eje mayor = OY

Eje mayor = 8 $\to$ $b = 4$

$a = 2$

La ecuación queda: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$

34 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las siguientes elipses dadas por sus ecuaciones. Represéntalas:**

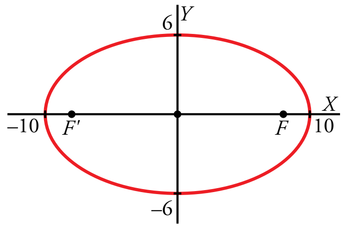
a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1$ **c)** $9x^2+25y^2=25$ **d)** $9x^2+4y^2=3$

a) Vértices: (10, 0); (–10, 0); (0, 6) y (0, –6)

Focos: $c=\sqrt{100-36}=8$

$F(8, 0)$ y $F'(-8, 0)$

Excentricidad: $exc=\dfrac{8}{10}=0,8$

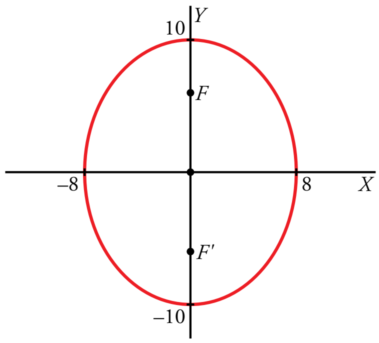


b) Vértices: (8, 0); (–8, 0); (0, 10) y (0, –10)

Focos: $c=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$

$F(0, 6)$ y $F'(0, -6)$

Excentricidad: $exc=\dfrac{6}{10}=0,6$



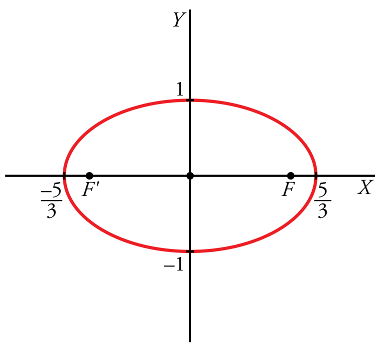
c) $9x^2+25y^2=25 \to \dfrac{x^2}{25/9}+\dfrac{y^2}{1}=1$

Vértices: $\left(\frac{5}{3},0\right)$; $\left(-\frac{5}{3},0\right)$; $(0,1)$ y $(0,-1)$

Focos: $c=\sqrt{\dfrac{25}{9}-1}=\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}$

$F=\left(\frac{4}{3},0\right)$ y $F'\left(-\frac{4}{3},0\right)$

Excentricidad: $exc=\dfrac{4/3}{5/3}=\dfrac{4}{5}=0,8$



d) $9x^2 + 4y^2 = 3 \rightarrow \dfrac{x^2}{3/9} + \dfrac{y^2}{3/4} = 1$

La elipse tiene eje mayor = OY y centro $O = (0, 0)$.

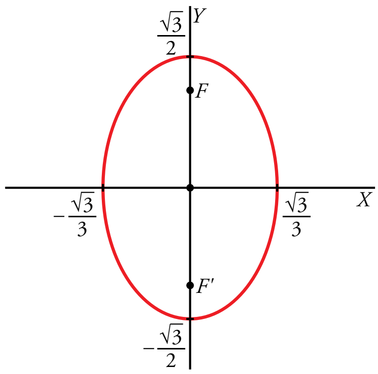
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{9} = \dfrac{5}{12} \rightarrow c = \sqrt{\dfrac{5}{12}}$

Vértices: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right); \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right); \left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Focos: $F = \left(0, \sqrt{\dfrac{5}{12}}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{\dfrac{5}{12}}\right)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{12}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{5}$



35 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las siguientes elipses no centradas en el origen de coordenadas. Represéntalas:**

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$ **b)** $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

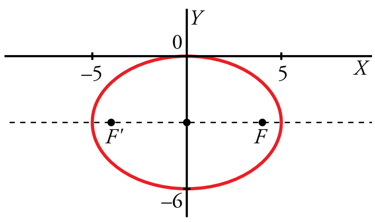
a) Centro: $O = (0, -3)$

$c = \sqrt{25 - 9} = 4$

$e = \dfrac{4}{5}$

Vértices: $(5, -3); (-5, -3); (0, 0), (0, -6)$

Focos: $F = (4, -3),\ F' = (-4, -3)$



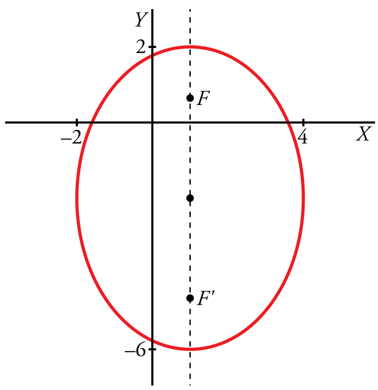
b) Centro: $O = (1, -2)$

$c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Vértices: $(-2, -2); (4, -2); (1, 2); (1, -6)$

Focos: $F = (1, -2 + \sqrt{7}),\ F' = (1, -2 - \sqrt{7})$



Hipérbolas

36 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$ es 6.**

Es una hipérbola de focos F y F' y constante $2a = 6$.

Por tanto, $a = 3,\ c = 4,\ b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$

37 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos (–4, 0) y (4, 0) y distancia entre vértices, 4.**

$c = 4;\ 2a = 4 \to a = 2;\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

38 **Obtén la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $y = \pm\dfrac{1}{5}x$ y uno de sus vértices es (2, 0).**

$a = 2;\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{5} \to \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{5} \to b = \dfrac{2}{5}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4/25} = 1$, o bien, $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{25y^2}{4} = 1$

39 **Determina la hipérbola que pasa por el punto (2, 1) y tiene por asíntotas $y = \pm 3x$.**

$\dfrac{b}{a} = 3 \to b = 3a \to \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{9a^2} = 1$

Como pasa por (2, 1) $\to \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{1}{9a^2} = 1 \to 36 - 1 = 9a^2$

$35 = 9a^2 \to a^2 = \dfrac{35}{9} \to b^2 = 9a^2 = 35$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{35/9} - \dfrac{y^2}{35} = 1$, o bien, $\dfrac{9x^2}{35} - \dfrac{y^2}{35} = 1$

40 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos (–3, 0) y (3, 0) que tiene excentricidad igual a 3.**

$c = 3,\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{a} = 3 \to a = 1$

$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 1 = 8$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

41 **De una hipérbola sabemos que pasa por el punto $\left(8, 5\sqrt{3}\right)$ y sus focos son (–3, 0) y (3, 0). Calcula su ecuación.**

- Hallamos la constante de la hiperbola: $|dist\,(P, F) - dist\,(P, F')| = 2a$

  $\left|\,|\overrightarrow{FP}| - |\overrightarrow{F'P}|\,\right| = 2a \to \left|\,|(11, 5\sqrt{3})| - |(5, 5\sqrt{3})|\,\right| = 2a$

  $\sqrt{121+75} - \sqrt{25+75} = 2a \to 14 - 10 = 2a \to 4 = 2a \to a = 2$

- Como $a = 2$ y $c = 3$, entonces $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$
- La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

42 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos (–3, 0) y (3, 0) y asíntotas $y = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$.**

$c = 3$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \to b = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2 = \dfrac{9}{5}a^2 \to 9 = \dfrac{9}{5}a^2 \to a = \sqrt{5} \to b = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{5} = 2$

La ecuación pedida es: $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

43 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas de las hipérbolas dadas por las siguientes ecuaciones. Dibújalas:**

a) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ **b)** $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1$ **c)** $x^2 - 4y^2 = 1$ **d)** $x^2 - 4y^2 = 4$

e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$ **f)** $y^2 - 16x^2 = 16$ **g)** $9x^2 - 4y^2 = 36$ **h)** $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

a) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

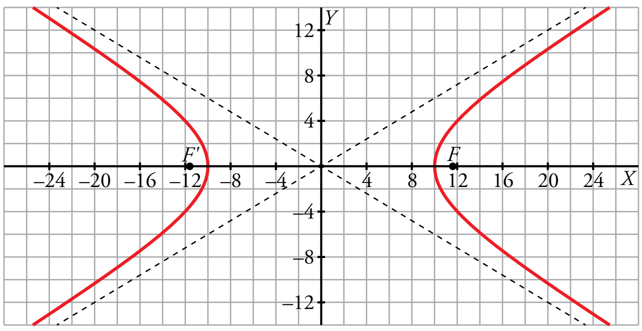
$a = 10, \; b = 6, \; c = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136}$

Vértices: (10, 0); (–10, 0)

Focos: $F = (\sqrt{136}, 0), \; F' = (-\sqrt{136}, 0)$

$e = \dfrac{\sqrt{136}}{10}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{5}x$



b) $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

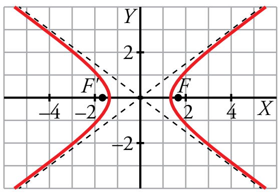
$a = \dfrac{4}{3}, \; b = 1, \; c = \sqrt{\dfrac{16}{9} + 1} = \dfrac{5}{3}$

Vértices: $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right); \left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Focos: $F = \left(\dfrac{5}{3}, 0\right), \; F' = \left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$

$e = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{5}{4}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{4}x$



c) $x^2 - 4y^2 = 1$

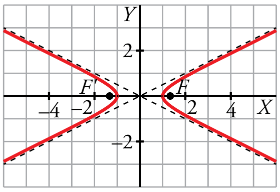
$a = 1,\ \ b = \dfrac{1}{2},\ \ c = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Vértices: $(1, 0)$; $(-1, 0)$

Focos: $F = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$; $F' = \left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$

$e = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$



d) $x^2 - 4y^2 = 4 \ \to\ \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

$a = 2,\ \ b = 1,\ \ c = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

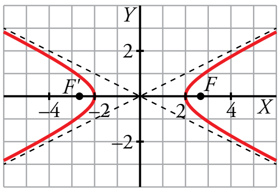
Vértices: $(2, 0)$; $(-2, 0)$

Focos: $F = (\sqrt{5}, 0)$

$F' = (-\sqrt{5}, 0)$

$e = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$



e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

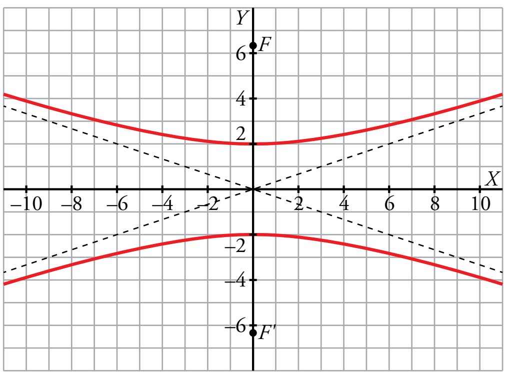
$a = 2,\ \ b = 6,\ \ c = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

Vértices: $(0, 2)$; $(0, -2)$

Focos: $F = (0, \sqrt{40})$; $F' = (0, -\sqrt{40})$

$e = \dfrac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{3}x$



f) $y^2 - 16x^2 = 16 \rightarrow \dfrac{y^2}{16} - x^2 = 1$

$a = 4, \ \ b = 1, \ \ c = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

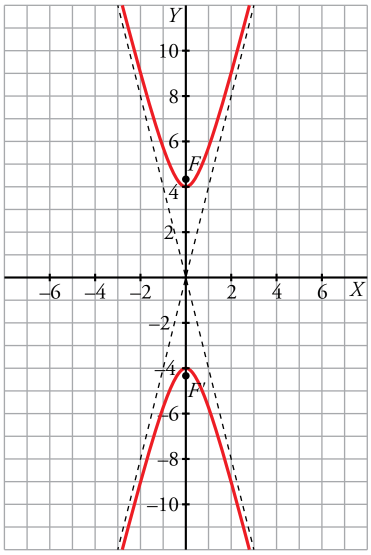
Vértices: $(0, 4); (0, -4)$

Focos: $F = (0, \sqrt{17})$

$F' = (0, -\sqrt{17})$

$e = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$

Asíntotas: $y = \pm\, 4x$



g) $9x^2 - 4y^2 = 36 \rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

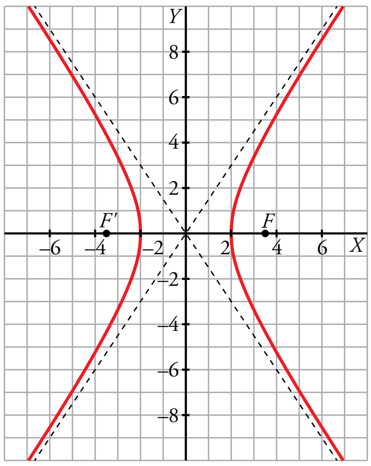
$a = 2, \ \ b = 3, \ \ c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Vértices: $(2, 0); (-2, 0)$

Focos: $F = (\sqrt{13}, 0); \ \ F' = (-\sqrt{13}, 0)$

$e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm\, \dfrac{3}{2}x$



h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0 \rightarrow y^2 - 4x^2 = 16 \rightarrow \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

$a = 4, \ \ b = 2, \ \ c = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

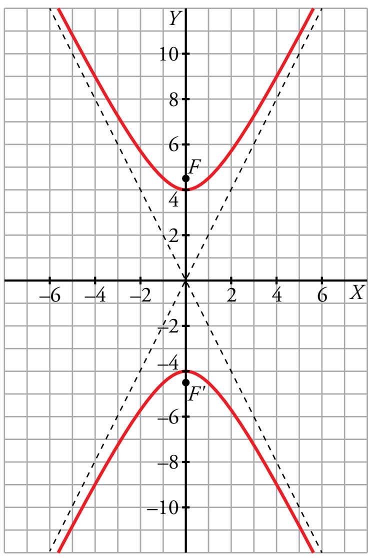
Vértices: $(0, 4); (0, -4)$

Focos: $F = (0, \sqrt{20})$

$F' = (0, -\sqrt{20})$

$e = \dfrac{\sqrt{20}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm\, 2x$



44 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas de las siguientes hipérbolas no centradas en el origen de coordenadas. Dibújalas:**

a) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{64} = 1$ **b)** $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1$

a) Centro: $O = (0, 1)$

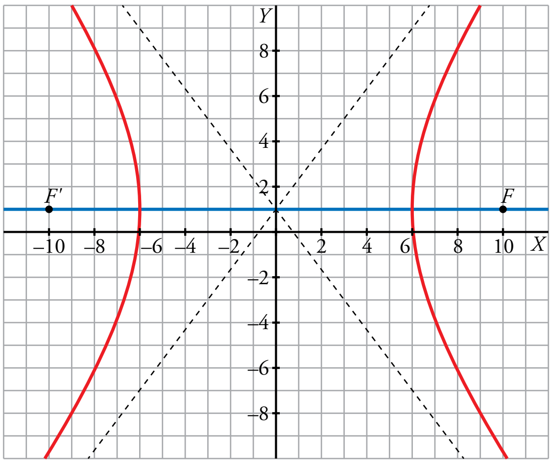
$a = 6,\ \ b = 8,\ \ c = \sqrt{36+64} = 10$

Vértices: (6, 1); (–6, 1)

Focos: $F = (10, 1);\ \ F' = (-10, 1)$

$e = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

Asíntotas: $y - 1 = \pm\dfrac{8}{6}x$



b) Centro: $O = (1, 1)$

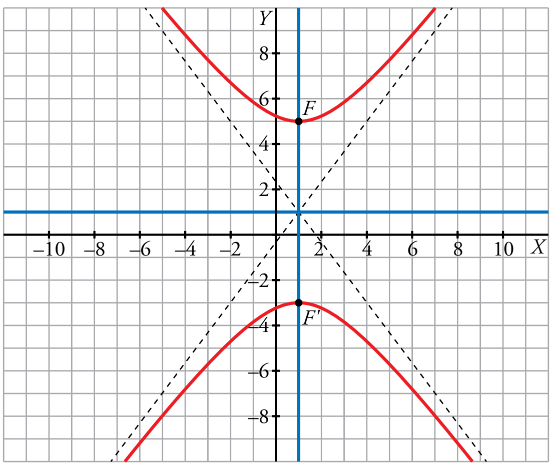
$a = 4,\ \ b = 3,\ \ c = \sqrt{16+9} = 5$

Vértices: (1, 3); (1, –1)

Focos: $F = (1, 5);\ \ F' = (1, -3)$

$e = \dfrac{5}{4}$

Asíntotas: $y - 1 = \pm\dfrac{4}{3}(x-1)$



Página 239

Parábolas

45 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto (3, 0) y de la recta $y = -3$.**

Es una parábola cuyo foco es $F(3, 0)$ y cuya directriz es $d: y + 3 = 0$. Si $P(x, y)$ es un punto de la prábola, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |y + 3| \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = y^2 + 6y + 9 \rightarrow y = \frac{x^2}{6} - x$$

O bien: $(x-3)^2 = 6\left(y + \frac{3}{2}\right)$

46 **Halla, en cada caso, la ecuación de la parábola de foco F y directriz d.**

a) $F(5, 0)$; $d: x = -5$

b) $F(-3, 0)$; $d: x = 3$

c) $F(0; 2{,}5)$; $d: y = -2{,}5$

d) $F(0, -4)$; $d: y = 4$

a) $\frac{p}{2} = 5 \rightarrow p = 10 \rightarrow 2p = 20$. Ecuación: $y^2 = 20x$

b) $dist\,(F, d) = 6 = p$

$F \in OX$

$y^2 = -12x$

c) $dist\,(F, d) = 5 = p$

$F \in OY$

$y^2 = 10x$

d) $dist\,(F, d) = 8 = p$

$F \in OY$

$y^2 = -16x$

47 **Determina la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen de coordenadas y cuya directriz es $y = 3$.**

El foco será $F(0, -3)$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola y $d: y - 3 = 0$ es la directriz, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \rightarrow \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = |y - 3| \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9 \rightarrow x^2 = -12y$$

48 **Halla las ecuaciones de las parábolas que pasando por el punto (2, 3) tienen su vértice en el origen de coordenadas.**

Hay dos posibilidades:

- *Eje horizontal*: $y^2 = 2px$. Como pasa por (2, 3), entonces:

  $9 = 4p \rightarrow p = \frac{9}{4} \rightarrow y^2 = \frac{9}{2}x$

- *Eje vertical*: $x^2 = 2py$. Como pasa por (2, 3), entonces:

  $4 = 6p \rightarrow p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow x^2 = \frac{4}{3}y$

49 **Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas. Represéntalas:**

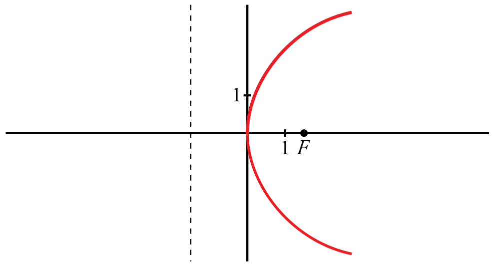
a) $y^2 = 6x$ **b)** $y^2 = -6x$ **c)** $y = x^2$ **d)** $y = \frac{x^2}{4}$

a) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y^2 = 6x \end{array}\right\} \; 2p = 6 \;\to\; p = 3 \;\to\; \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$

Vértice: $(0, 0)$

Foco: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

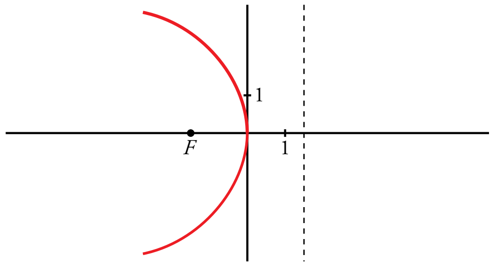
Directriz: $x = -\frac{3}{2}$



b) Vértice: $(0, 0)$

Foco: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

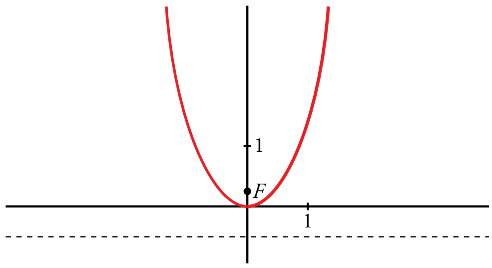
Directriz: $x = \frac{3}{2}$



c) Vértice: $(0, 0)$

Foco: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

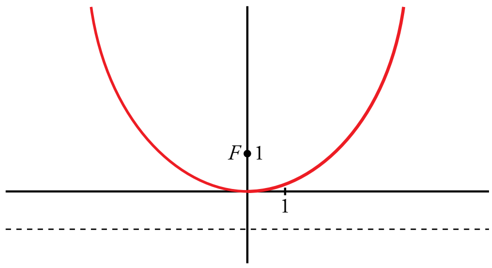
Directriz: $y = -\frac{1}{4}$



d) Vértice: $(0, 0)$

Foco: $(0, 1)$

Directriz: $y = -1$



Para resolver

50 **Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

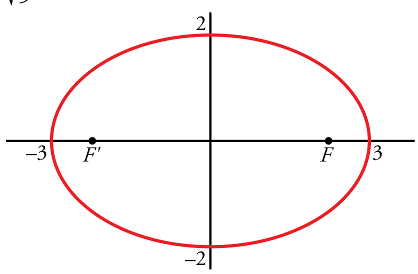
a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ **b)** $16x^2 - 9y^2 = 144$ **c)** $9x^2 + 9y^2 = 25$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$ **e)** $y^2 = 14x$ **f)** $25x^2 + 144y^2 = 900$

a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \;\to\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

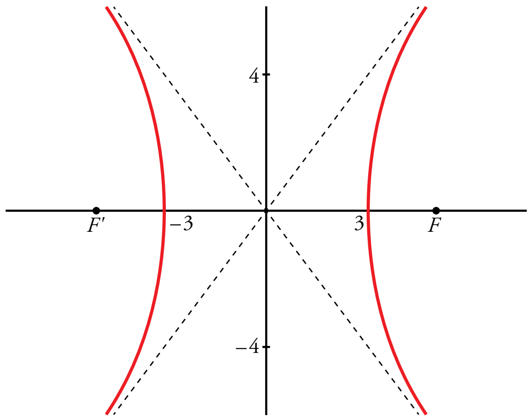
Es una elipse $\to$ $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$

$exc = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$



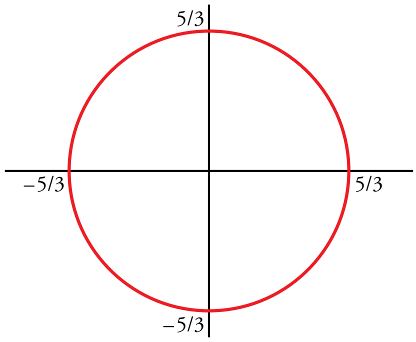
b) $16x^2 - 9y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 3,\ b = 4,\ c = 5;\ exc = \dfrac{5}{3} \approx 1,67 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{4}{3}x;\ y = -\dfrac{4}{3}x \end{cases}$



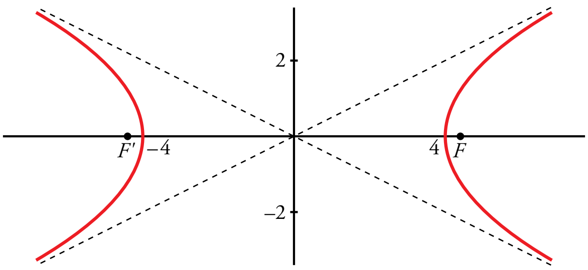
c) $9x^2 + 9y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{25}{9}$

Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\dfrac{5}{3}$.



d) $x^2 - 4y^2 = 16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 4,\ b = 2,\ c = 2\sqrt{5};\ exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{1}{2}x;\ y = -\dfrac{1}{2}x \end{cases}$

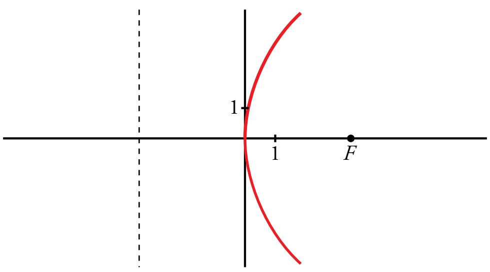


e) Es una parábola.

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$

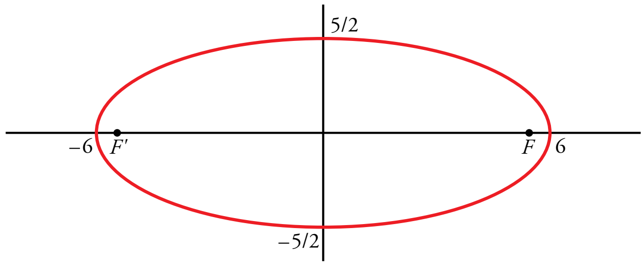
Directriz: $x = -\dfrac{7}{2}$



f) $25x^2 + 144y^2 = 900 \rightarrow \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25/4} = 1$

Es una elipse $\rightarrow a = 6, \ b = \dfrac{5}{2}, \ c = \dfrac{\sqrt{119}}{2}$

$exc = \dfrac{\sqrt{119}}{12} \approx 0{,}91$



51 **Describe las siguientes cónicas no centradas en el origen. Obtén sus elementos y dibújalas.**

a) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{25} = 1$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

c) $(x+2)^2 = 4(y+5)$

d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -4$

a) Es una elipse de centro $O = (1, 4)$

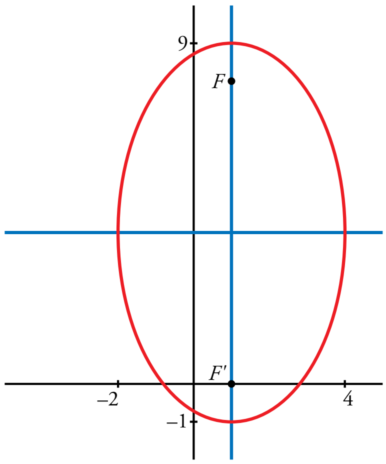
Eje mayor: OY

$a = 3, \ b = 5, \ c = \sqrt{25-9} = 4$

Vértices: (4, 4); (–2, 4); (1, 9); (1, –1)

Focos: $F = (1, 8)$; $F' = (1, 0)$

$exc = \dfrac{4}{5}$



b) Es una hipérbola de centro $O = (1, -1)$

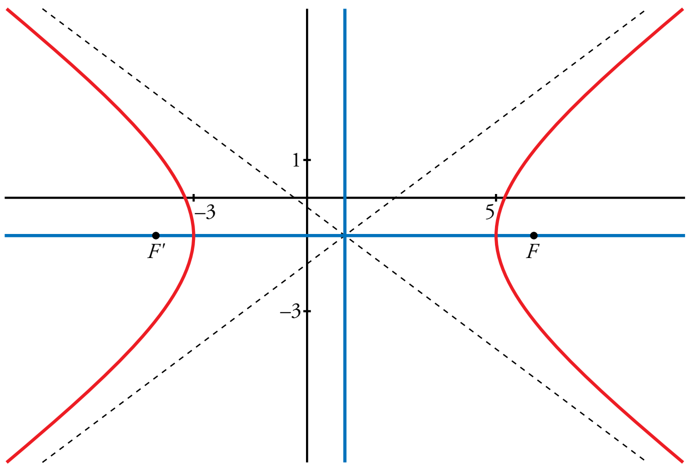
$a = 4, \ b = 3, \ c = \sqrt{16+9} = 5$

Vértices: (5, –1); (–3, –1)

Focos: $F = (6, -1)$; $F' = (-4, -1)$

$exc = \dfrac{5}{4}$

Asíntotas: $y + 1 = \pm\dfrac{3}{4}(x-1)$



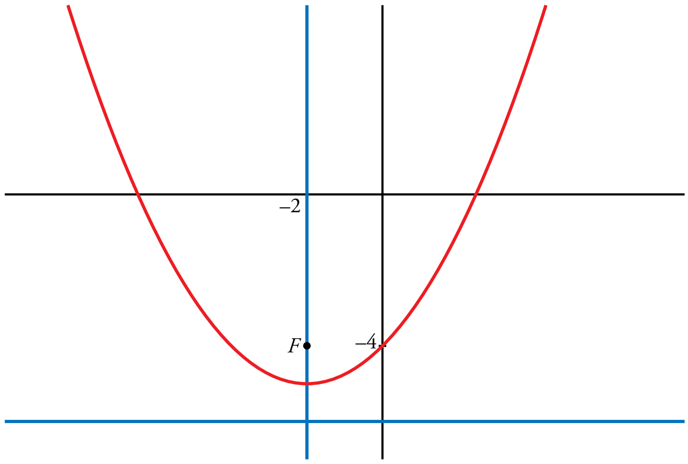
c) Es una parábola.

Vértice: $(-2, -5)$

$2p = 4 \rightarrow dist\,(F, d) = 2 \rightarrow dist\,(F, V) = 1$ y $dist\,(V, d) = 1$

d: $y = -6$

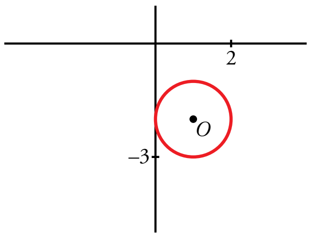
Foco: $F = (-2, -4)$



d) $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -4 + 1 + 4 \rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

Es una circunferencia de centro $O = (1, -2)$.

Radio: $r = 1$



52 **a) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-1, 1)$ y es tangente a la recta $3x - 4y - 3 = 0$.**

b) De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encuentra las que sean tangentes a la circunferencia hallada en el apartado anterior.

a) El radio, r, de la circunferencia es la distancia del centro $C(-1, 1)$ a la recta s: $3x - 4y - 3 = 0$; es decir:

$$r = dist\,(C, s) = \frac{|-3-4-3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

La ecuación será: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, o bien, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante son de la forma $y = x + k$, es decir, t: $x - y + k = 0$. La recta t es tangente a la circunferencia cuando la distancia del centro de la circunferencia, $C(-1, 1)$, a la recta es igual al radio, 2. Es decir:

$$dist\,(C, t) = \frac{|-1-1+k|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow \frac{|k-2|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow |k-2| = 2\sqrt{2} \left\langle \begin{array}{l} k-2 = 2\sqrt{2} \rightarrow k = 2+2\sqrt{2} \\ k-2 = -2\sqrt{2} \rightarrow k = 2-2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Hay dos rectas: $\begin{cases} y = x + 2 + 2\sqrt{2} \\ y = x + 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

53 **Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por (–3, 2) y (4, 1) y es tangente al eje *X*.**

El centro está en la mediatriz del segmento AB.

$A = (-3, 2)$, $B = (4, 1)$

$\overrightarrow{AB} = (7, -1) \rightarrow \vec{d} = (1, 7)$

$M_{AB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$m: \frac{x-(1/2)}{1} = \frac{y-(3/2)}{7} \rightarrow 7x - \frac{7}{2} = y - \frac{3}{2} \rightarrow y = 7x + 2$

$dist\,(O, A) = dist\,(O, OX) = r$

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = y$

Las coordenadas del centro son la solución del siguiente sistema:

$\begin{cases} y = 7x - 2 \\ \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 1 \end{cases} \rightarrow x_1 = 21,\ y_1 = 145;\ x_2 = 1,\ y_2 = 5$

Hay dos circunferencias que cumplen la condición:

$C: (x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$

$C': (x-21)^2 + (y-145)^2 = 145^2 = 21\,025$

54 **De la circunferencia *C* se sabe que tiene su centro en la recta $x - 3y = 0$ y pasa por los puntos (–1, 4) y (3, 6). Obtén la ecuación de *C*.**

Si el centro está sobre la recta $x - 3y = 0$, es de la forma $C(3y, y)$.

El centro está a igual distancia de $A(-1, 4)$ que de $B(3, 6)$. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$r = dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{(3y+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3y-3)^2 + (y-6)^2}$

$9y^2 + 1 + 6y + y^2 + 16 - 8y = 9y^2 + 9 - 18y + y^2 + 36 - 12y$

$28y = 28 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3y = 3$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en $O(3, 1)$, y su radio es:

$r = |\overrightarrow{AO}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

La ecuación es: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.

55 **Determina la ecuación de la circunferencia de radio 10 que, en el punto (7, 2), es tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$.**

Las coordenadas del centro son la solución del siguiente sistema:

$\begin{cases} 3x - 4y - 13 = 0 \\ \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 10 \end{cases} \rightarrow x_1 = 15,\ y_1 = 8;\ x_2 = -1,\ y_2 = -4$

Hay dos circunferencias que cumplen la condición:

$C: (x-15)^2 + (y-8)^2 = 100$

$C': (x+1)^2 + (y+4)^2 = 100$

56 **Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de vértices $A(3, 2)$, $B\left(1-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ y $C\left(5+\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.**

$A = (3, 2)$, $B = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $C = (5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$\overrightarrow{AB} = (1-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (-\sqrt{2}-2, -\sqrt{2}-2) = (-\sqrt{2}-2)(1, 1)$

Lado AB: $x - 3 = y - 2 \to x - y - 1 = 0$

$\overrightarrow{AC} = (5+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (\sqrt{2}+2, -\sqrt{2}-2) = (\sqrt{2}+2)(1, -1)$

Lado AC: $x - 3 = -y + 2 \to x + y - 5 = 0$

$\overrightarrow{BC} = (1-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (5+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2}-4, 0) = (-2\sqrt{2}-4)(1, 0)$

Lado BC: $y = -\sqrt{2} \to y + \sqrt{2} = 0$

Bisectriz de $\hat{A}$:

$$|x - y - 1| = |x + y - 5| \to y = 2,\ x = 3$$

Tomamos $x = 3$, que es la recta interior al triángulo.

Bisectriz de $\hat{C}$:

$$\left|\frac{x+y-5}{\sqrt{2}}\right| = \left|y+\sqrt{2}\right| \to \begin{cases} \dfrac{x+y-5}{\sqrt{2}} = y+\sqrt{2} \\[2ex] \dfrac{x+y-5}{\sqrt{2}} = -(y+\sqrt{2}) \end{cases} \to \begin{cases} x+y-5 = \sqrt{2}y+2 \\ x+y-5 = -\sqrt{2}y-2 \end{cases} \to \begin{cases} x+(1-\sqrt{2})y-7=0 \\ x+(1+\sqrt{2})y-3=0 \end{cases}$$

Tomamos $x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0$, que es la recta interior al triángulo.

El incentro es la intersección de las bisectrices:

$$\begin{cases} x = 3 \\ x+(1+\sqrt{2})y-3=0 \end{cases} \to x = 3,\ y = 0 \to P = (3, 0)$$

radio $= dist\,(P, \text{lado } BC) = \sqrt{2}$

Circunferencia inscrita: $C: (x - 3)^2 + y^2 = 2$

57 **Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por la recta $y = -x + 4$ y los ejes de coordenadas. Calcula la ecuación de la recta tangente a esta circunferencia en (0, 0).**

Vértices del triángulo:

$$A \to \begin{cases} y = -x+4 \\ x = 0 \end{cases} \to A = (0, 4) \qquad B \to \begin{cases} y = -x+4 \\ y = 0 \end{cases} \to B = (4, 0) \qquad C = (0, 0)$$

$\overrightarrow{AB} = (4, -4) = 4(1, -1)$, $M_{AB} = (2, 2)$

m_c: $x - 2 = -(y - 2)$

$\overrightarrow{AC} = (0, -4) = 4(0, -1)$, $M_{AC} = (0, 2)$

m_b: $x - 2 = 0$

El circuncentro es la intersección de las mediatrices:

$$\begin{cases} x-2 = -(y-2) \\ x = 2 \end{cases} \to x = 2,\ y = 2 \to P = (2, 2)$$

radio $= dist\,(P, C) = \sqrt{8}$

Circunferencia circunscrita, $C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

58 **Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el cuadrado de vértices $A(-3, 3)$, $B(-1, 3)$, $C(-1, 1)$ y $D(-3, 1)$.**

$A = (-3, 3)$, $B = (-1, 3)$, $C = (-1, 1)$, $D = (-3, 1)$

Diagonal AC: $y = -x$

Diagonal BD: $y = x + 4$

Centro: $\begin{cases} y = -x \\ y = x + 4 \end{cases} \rightarrow x = -2,\ y = 2 \rightarrow P = (-2, 2)$

Lado AB: $y = 3$

radio = $dist\,(P, \text{lado } AB) = 1$

Circunferencia inscrita, C: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$

59 **Estudia la posición relativa del punto $P(0, 3)$ respecto a la circunferencia $(x - m)^2 + y^2 = 25$ en función de los valores del parámetro m.**

$(x - m)^2 + y^2 = 25$

Centro: $O = (m, 0)$

Radio: $r = 5$

$dist\,(P, O) = \sqrt{m^2 + 9} = 5 \rightarrow m = -4,\ m = 4$

$\sqrt{m^2 + 9} < 5 \rightarrow m \in (-4, 4)$

$\sqrt{m^2 + 9} > 5 \rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

Si $m \in (-4, 4) \rightarrow P$ es interior a la circunferencia C.

Si $m = -4$ o $m = 4 \rightarrow P \in C$

Si $m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty) \rightarrow P$ es exterior a C.

60 **Estudia en función de k la posición relativa de la rectas: $4x + 3y + k = 0$ respecto a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.**

Depende del número de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y + k = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3y - k}{4} \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{-3y - k}{4}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{-3y - k}{4}\right) - 6y + 6 = 0$$

$k^2 + 6ky + 8k + 25y^2 - 72y + 96 = 0 \rightarrow 25y^2 + (6k - 72)y + 96 + 8k + k^2 = 0$

El número de soluciones depende del signo del discriminante.

$\Delta = (6k - 72)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (96 + 8k + k^2) = -64k^2 - 1\,664k - 4\,416$

- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 = 0 \rightarrow k = -3,\ k = -23 \rightarrow$ Solución única $\rightarrow$ Son tangentes.
- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 < 0 \rightarrow k \in (-\infty, -23) \cup (-3, \infty) \rightarrow$ No hay solución $\rightarrow$ Son exteriores.
- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 > 0 \rightarrow k \in (-23, -3) \rightarrow$ Dos soluciones $\rightarrow$ Son secantes.

61 **Dos circunferencias se cortan en los puntos (0, 0) y (0, 8). ¿Cuál es su eje radical? Justifica tu respuesta.**

El eje radical es la recta que pasa por A y por B, pues los puntos de corte siempre tienen potencia cero respecto a las dos circunferencias. Luego el eje radical siempre pasa por ellos.

Eje radical: $x = 0$

62 **Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa:**

a) $\begin{cases} x^2+y^2-6x-16=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y+9=0 \\ x^2+y^2-6x+2y+9=0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-6x-16=0 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4-6x-16=0 \;\rightarrow\; -6x=12 \;\rightarrow\; x=-2 \\ 4+y^2=4 \;\rightarrow\; y^2=0 \;\rightarrow\; y=0 \end{array}$

Las circunferencias se cortan en el punto (–2, 0).

La primera circunferencia tiene centro en (3, 0) y radio 5; la segunda tiene centro en (0, 0) y radio 2. La distancia entre sus centros es $d=3$. Como la diferencia entre sus radios es $5-2=3=d$, las circunferencias son tangentes interiores.

b) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-6x-4y+9=0 \\ x^2+y^2-6x+2y+9=0 \end{array}\right\}$ Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª:

$6y=0 \;\rightarrow\; y=0$

$x^2-6x+9=0 \;\rightarrow\; (x-3)^2=0 \;\rightarrow\; x=3$

Las circunferencias se cortan en el punto (3, 0).

La primera circunferencia tiene su centro en (3, 2) y radio 2; la segunda tiene su centro en (3, –1) y radio 1. La distancia entre sus centros es $d=3$, igual que la suma de sus radios. Por tanto, las circunferencias son tangentes exteriores.

63 **Escribe la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(8, -3)$ y que su eje mayor es igual al doble del menor.**

El eje mayor es igual al doble del menor, es decir: $a=2b$. Además, pasa por el punto $P(8, -3)$. Luego:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\rightarrow\; \frac{64}{4b^2}+\frac{9}{b^2}=1 \;\rightarrow\; \frac{16}{b^2}+\frac{9}{b^2}=1 \;\rightarrow\; \frac{25}{b^2}=1 \;\rightarrow\; 25=b^2;\; a^2=4b^2=100$$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$

64 **La parábola $y^2-4y-6x-5=0$ tiene por foco el punto (0, 2). Encuentra su directriz.**

$y^2-4y-6x-5=0 \;\rightarrow\; y^2-4y+4-6x-5-4=0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; (y-2)^2-6x-9=0 \;\rightarrow\; (y-2)^2-6\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$$

Vértice: $V=\left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$

Foco: $F=(0, 2)$

Eje de la parábola: $y=2$

$dist\,(V, d)=dist\,(V, F)=\dfrac{3}{2}$

Directriz: $x=k \;\rightarrow\; x-k=0$

$$dist\,(V, d)=\left|-\frac{3}{2}-k\right|=\frac{3}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} -\dfrac{3}{2}-k=\dfrac{3}{2} \;\rightarrow\; k=-3 \\ -\dfrac{3}{2}-k=-\dfrac{3}{2} \;\rightarrow\; k=0 \end{cases}$$

Como el foco está a la derecha del vértice, la directriz es $x=-3$.

65 **Halla la ecuación de la parábola de vértice en el punto (2, 3) y que pasa por el punto (4, 5).**

** Mira el ejercicio resuelto 6.*

$X = (x, y)$ punto genérico.

$(y-3)^2 - 2p(x-2) = 0$

$(4, 5) \in$ Parábola $\rightarrow (5-3)^2 - 2p(4-2) = 0 \rightarrow 4 - 4p = 0 \rightarrow p = 1$

Parábola: $(y-3)^2 - 2(x-2) = 0$

66 **Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:**

a) Foco (0, 0); directriz $y = -2$.

b) Foco (2, 0); directriz $x = -1$.

c) Foco (2, 1); directriz $y + 3 = 0$.

d) Foco (1, 1); vértice $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

a) $dist\,(F, d) = 2 = p$

Vértice: $V = (0, -1)$

Parábola hacia arriba.

$x^2 = 4(y+1)$

b) $dist\,(F, d) = 3 = p$

Vértice: $V = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Parábola hacia la derecha.

$y^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c) $dist\,(F, d) = 4 = p$

Vértice: $V = (2, -1)$

Parábola hacia arriba.

$(x-2)^2 = 8(y+1)$

d) $dist\,(F, d) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = p$

Vértice: $V = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Directriz paralela al eje *OX*.

Parábola hacia arriba.

$(x-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$

67 **Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas de vértices distintos al origen de coordenadas. Represéntalas:**

a) $y^2 = 4(x-1)$ **b) $(y-2)^2 = 8x$** **c) $(x-1)^2 = -8(y+1)$** **d) $(y+2)^2 = -4(x-1)$**

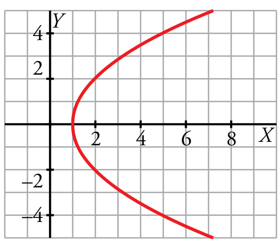
a) $y^2 = 4(x-1)$

Parábola hacia la derecha.

Vértice: $V = (1, 0)$

$p = 2dist\,(F, V) = 1 \rightarrow F = (2, 0)$

Directriz paralela al eje *OY*: $x = 0$



b) $(y - 2)^2 = 8x$

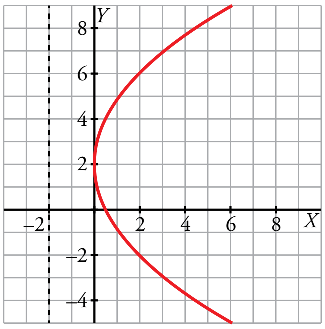
Parábola hacia la derecha.

Vértice: $V = (0, 2)$

$p = 4$

dist $(F, V) = 2 \rightarrow F = (2, 2)$

Directriz paralela al eje OY: $x = -2$



c) $(x - 1)^2 = -8(y + 1)$

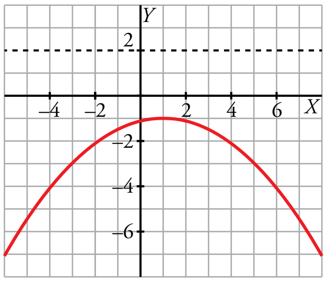
Parábola hacia abajo.

Vértice: $V = (1, -1)$

$p = 4$

dist $(F, V) = 2 \rightarrow F = (1, -3)$

Directriz paralela al eje OX: $y = 2$



d) $(y + 2)^2 = -4(x - 1)$

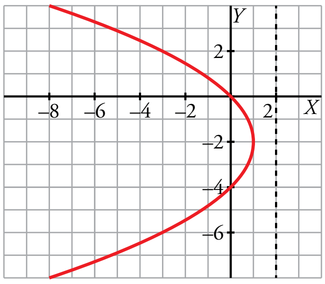
Parábola hacia la izquierda.

Vértice: $V = (1, -2)$

$p = 2$

dist $(F, V) = 1 \rightarrow F = (0, -2)$

Direcriz paralela al eje OY: $x = 2$



68 **Halla la ecuación de la hipérbola centrada en (4, 5), cuyos focos son $F(2, 5)$ y $F'(6, 5)$ y cuyo semieje menor es $b = 1$.**

Centro = (4, 5)

Eje paralelo a OX

$c = dist\,(C, F) = 2$

$a^2 = 4 - 1 = 3$

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x-4)^2}{3} - \dfrac{(y-5)^2}{1} = 1$

Página 240

69 **Halla la ecuación de la siguiente hipérbola:**

- **Tiene el centro en el origen de coordenadas.**
- **Tiene los focos en el eje de abscisas.**
- **Pasa por el punto $P\left(\sqrt{5/2}, 1\right)$.**
- **Una de sus asíntotas es la recta $y = 2x$.**

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\dfrac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$

Pasa por $P = \left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}, 1\right)$

$$\frac{5/2}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = 1 \rightarrow \frac{10-1}{4a^2} = 1 \rightarrow 4a^2 = 9 \rightarrow a^2 = \frac{9}{4}$$

La ecuación pedida es: $\dfrac{x^2}{9/4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

70 **Se llama hipérbola equilátera a aquella en la que $a = b$. Halla la ecuación de la hipérbola equilátera cuyos focos son (5, 0) y (–5, 0).**

Centro = (0, 0)

$$c = 5 = \sqrt{2a^2} \rightarrow a = \frac{5}{2}\sqrt{2} \rightarrow a^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

La ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{\frac{25}{2}} = \frac{y^2}{\frac{25}{2}} = 1$$

71 **Halla la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que su distancia al punto (4, 0) es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.**

Comprueba que es una cónica y halla sus focos.

$X = (x, y)$ punto cualquiera del lugar geométrico.

$P = (4, 0)$

$r: x = 1$

$dist\,(X, P) = 2dist\,(X, r)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\,|x-1| \rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4\,(x-1)^2$$

$$x^2 - 8x + y^2 + 16 = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow -3x^2 + y^2 + 12 = 0$$

Es una hipérbola de eje OX:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$$

Centro: $C = (0, 0)$

Focos: $F = (-4, 0)$, $F' = (4, 0)$

72 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (4, 0) es igual a la mitad de la distancia a la recta $r: x - 16 = 0$. Representa la curva que obtienes.**

Sea $P(x, y)$ uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de P a (4, 0) ha de ser igual a la mitad de la distancia de P a la recta $x - 16 = 0$; es decir:

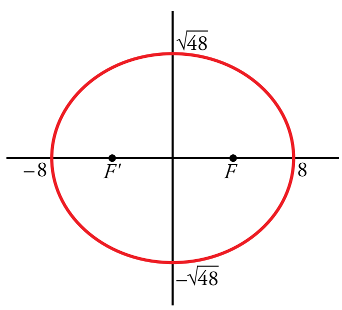
$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\,|x-16|$$

$$(x-4)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\,(x-16)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{1}{4}\,(x^2 - 32x + 256)$$

$$4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 = x^2 - 32x + 256$$

$$3x^2 + 4y^2 = 192 \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$



Es una elipse en la que $a = 8$ y $b = \sqrt{48} \approx 6{,}93$.

Los focos están en $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

73 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos $A(-2, 1)$ y $B(2, -1)$ sea igual a 1.**

¿Qué figura obtienes? Represéntala.

- La pendiente de la recta que une P con A es: $\dfrac{y-1}{x+2}$
- La pendiente de la recta que une P con B es: $\dfrac{y+1}{x-2}$
- El producto de las pendientes ha de ser igual a 1, es decir:

$$\left(\frac{y-1}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{y+1}{x-2}\right)=1 \rightarrow \frac{y^2-1}{x^2-4}=1 \rightarrow y^2-1=x^2-4$$

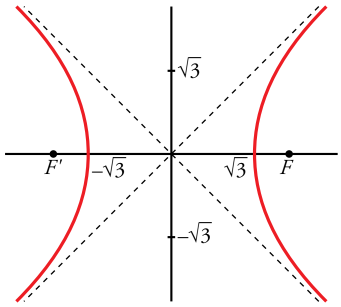
$$x^2-y^2=3 \rightarrow \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$$

Es una hipérbola en la que $a = b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{6}$.

Los focos son $F(\sqrt{6}, 0)$ y $F'(-\sqrt{6}, 0)$.

Las asíntotas son: $y = x$ e $y = -x$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}\approx 1,41$



74 **Halla las rectas tangentes a la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ que pasan por $A(5, 0)$.**

Haz de rectas que pasan por A más la recta $x = 5$.

La recta que buscamos tiene solo un punto en común con la elipse, por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=m(x-5)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{(m(x-5))^2}{4}=1 \rightarrow 4x^2+9(m(x-5))^2-36=0$$

$$9m^2x^2-90m^2x+225m^2+4x^2-36=0 \rightarrow (9m^2+4)x^2-90m^2x-36+225m^2=0$$

Debe tener solución única; es decir, el discriminante debe ser igual a cero.

$$\Delta=(90m^2)^2-4\cdot(9m^2+4)\cdot(-36+225m^2)=576-2\,304m^2=0 \rightarrow m=-\frac{1}{2},\ m=\frac{1}{2}$$

Las rectas pedidas son:

$$r: y=-\frac{1}{2}(x-5),\quad r': \frac{1}{2}(x-5)$$

75 **Halla la ecuación de la tangente a la elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$ en el punto $P(2, 3)$. Usa que la tangente es la bisectriz exterior de los segmentos PF y PF', donde F y F' son los focos.**

$3x^2 + 4y^2 = 48 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

$p = (2,3)$

$c = \sqrt{4} = 2$

$F = (2, 0),\ F' = (-2, 0)$

$\overrightarrow{PF} = (0, -3);\ \overrightarrow{PF'} = (-4, -3)$

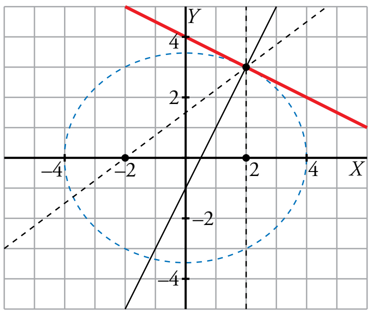
Recta PF: $x = 2$

Recta PF': $\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{-3} \rightarrow -3x + 4y - 6 = 0$

Bisectrices:

$$|x-2| = \left|\frac{-3x+4y-6}{5}\right| \rightarrow \begin{cases} x - 2 = \frac{-3x+4y-6}{5} \\ x - 2 = -\frac{-3x+4y-6}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 10 = -3x + 4y - 6 \\ 5x - 10 = 3x - 4y + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x - 4y - 4 = 0 \\ 2x + 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

La recta pedida es: $8x - 4y - 4 = 0$



76 **Halla la ecuación de la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto P, de abscisa $x = 5$. Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz de los segmentos PF y PF', donde F y F' son los focos de la hipérbola (elige la bisectriz adecuada).**

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\frac{25}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y = -\frac{9}{4},\ y = \frac{9}{4}$

Hay dos puntos en la hipérbola con abscisa 5.

Hallamos la tangente en $P = \left(5, \frac{9}{4}\right)$, la tangente en $P = \left(5, -\frac{9}{4}\right)$ es la simétrica respecto del eje OX.

$P = \left(5, \frac{9}{4}\right)$

$c = 5$

$PF = (5, 0);\ F' = (-5, 0)$

$\overrightarrow{PF} = \left(0, -\frac{9}{4}\right);\ \overrightarrow{PF'} = \left(-10, -\frac{9}{4}\right) = (40, 9)$

Recta PF: $x = 5$

Recta PF': $\frac{x+5}{40} = \frac{y}{-9} \rightarrow -9x + 40y - 45 = 0$

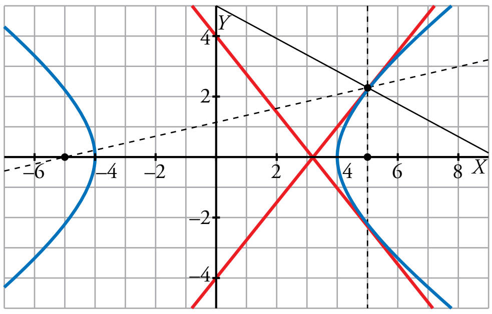
Bisectrices:

$$|x-5| = \left|\frac{-9x+40y-45}{\sqrt{81+1\,600}}\right| \to \begin{cases} x-5 = \dfrac{-9x+40y-45}{41} \\ x-5 = -\dfrac{-9x+40y-45}{41} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} 41x-205 = -9x+40y-45 \\ -41x+205 = -9x+40y-45 \end{cases} \to \begin{cases} 5x-4y-16=0 \\ 32x-40y-250=0 \end{cases}$$

La recta pedida es: $5x-4y-16=0$

La tangente en $P = \left(5, -\dfrac{9}{4}\right)$ es $y + \dfrac{9}{4} = -\dfrac{5}{4}(x-5)$



77 **Halla la tangente a la parábola $y^2 = 12x$ en el punto $P(3, 6)$. Usa el hecho de que la tangente es la bisectriz del ángulo formado por PF, donde F es el foco, y la recta perpendicular por P a la directriz.**

$y^2 = 12x$

$V = (0, 0)$

$p = 6$

Parábola hacia la derecha.

$F = (3, 0)$

$d: x = -3$

$P = (3, 6)$

$\overrightarrow{PF} = (0, -6) = -6(0, 1)$

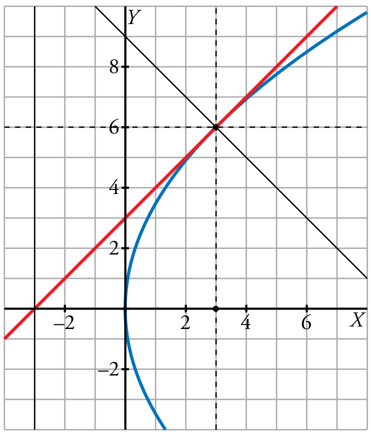
Recta PF: $x = 3$

Recta perpendicular a d que pasa por P: $y = 6$

Bisectrices:

$$|x-3| = |y-6| \to \begin{cases} x-3 = y-6 \\ x-3 = -y+6 \end{cases} \to \begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-9=0 \end{cases}$$

La recta pedida es $x - y + 3 = 0$



78 **El cometa Halley describe una órbita elíptica, estando el Sol en uno de sus focos, de excentricidad 0,96657. Si su distancia mínima al Sol (perihelio) es de 0,6 UA, calcula cuál es la máxima (afelio). Recuerda que 1 UA (unidad astronómica) es la distancia media entre la Tierra y el Sol.**

Focos: *Sol*, *F*

$dist\,(Halley, Sol) + dist\,(Halley, F) = 2a$

$e = \frac{c}{a} = 0{,}96657 \ \to \ c = 0{,}96657a$

Luego la distancia mínima se alcanza cuando el cometa está en el vértice correspondiente al foco del Sol y es:

$a - c = 0{,}6$

$\begin{cases} a - c = 0{,}6 \\ c = 0{,}96657a \end{cases} \to \ a = 17{,}946, \ \ c = 17{,}348$

La distancia máxima se alcanza cuando la Tierra está en el vértice opuesto al foco del Sol y es:

$2a - 0{,}6 = 2 \cdot 17{,}948 - 0{,}6 = 35{,}296$ UA

79 **La Tierra describe una órbita elíptica, estando el Sol en uno de sus focos. En esta trayectoria, la distancia mínima Tierra-Sol es de 147 095 248 km, y la máxima es de 152 100 492 km. Calcula la excentricidad de la órbita e interpreta el resultado obtenido.**

Focos: *Sol*, *F*

$dist\ mínima + dist\ máxima = 2a$

$dist\,(Tierra, Sol) + dist\,(Tierra, F) = 2a$

$147\,095\,248 + 152\,100\,492 = 2a \ \to \ a = 1{,}4960 \cdot 10^8$

La distancia mínima se alcanza cuando la Tierra está en el vértice correspondiente al foco del Sol y es:

$a - c = 147\,095\,248$

$1{,}4960 \cdot 10^8 - c = 147\,095\,248 \ \to \ c = 2{,}5048 \cdot 10^6$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2{,}5048 \cdot 10^6}{1{,}4960 \cdot 10^8} = 1{,}6743 \cdot 10^{-2} = 0{,}0167$

Como la excentricidad es muy pequeña, la órbita es casi una circunferencia.

80 **Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que están a continuación:**

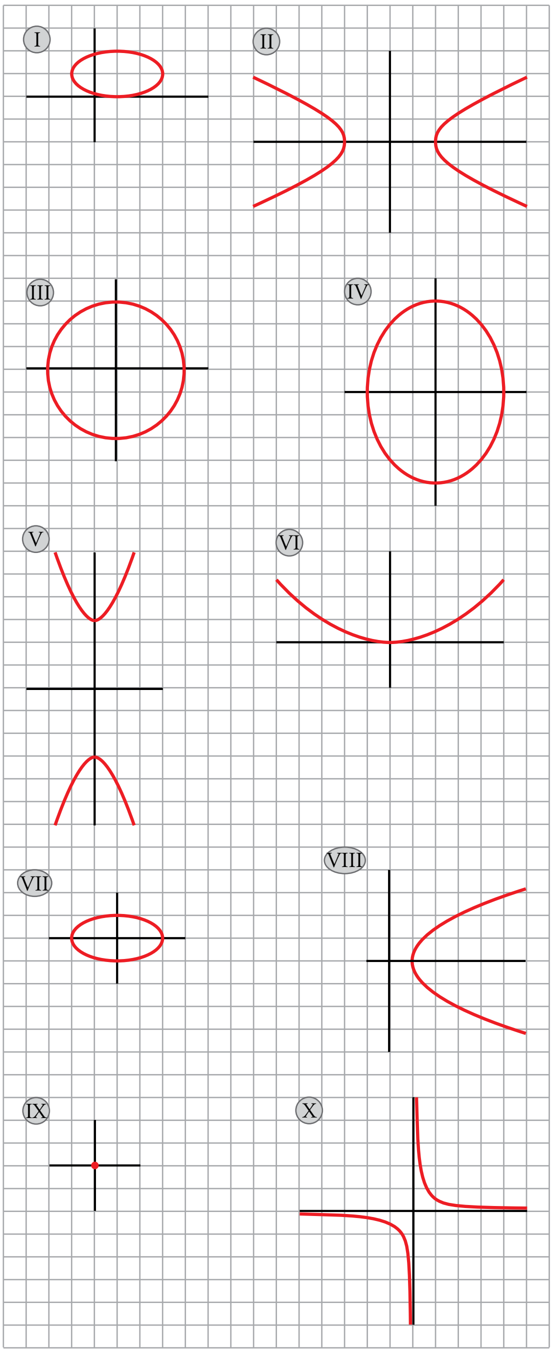
a) $x^2 + 4y^2 = 4$ b) $x^2 + y^2 = 9$

c) $y^2 - 9x^2 = 9$ d) $2xy = 1$

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ f) $\frac{x^2}{9} - y = 0$

g) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ h) $y^2 = 2(x - 1)$

i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$ j) $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$



a) VII

b) III

c) V

d) X

e) IV

f) VI

g) II

h) VIII

i) IX

j) I

Página 241

Cuestiones teóricas

81 **¿Qué tienen en común todas estas circunferencias?:**

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$

$(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$

Todas son tangentes a los ejes de coordenadas porque las coordenadas de O son iguales en valor absoluto y su valor absoluto coincide con el valor del radio:

$dist\,(O, OX) = dist\,(O, OY) = r$

82 **Determina si las siguientes ecuaciones corresponden a cónicas. Si es así, indica qué cónica es:**

a) $-\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} + 1$ **b)** $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} - 1$ **c)** $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$ **d)** $y^2 + 2y = x$

a) No es ninguna curva porque $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -1$ no es posible. La suma de dos números positivos no puede dar un resultado negativo.

b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$. Hipérbola con focos en el eje OY.

c) Si es alguna cónica, es una circunferencia, pero

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

es imposible porque un radio no puede ser negativo, luego no es ninguna curva.

d) Es una parábola $(y + 1)^2 = x + 1$

83 **Las siguientes parábolas tienen su vértice en el origen de coordenadas. ¿En qué cuadrantes tienen sus ramas?:**

a) $y^2 = -2x$ **b)** $y^2 = 2x$ **c)** $x^2 = -2y$ **d)** $x^2 = 2y$

a) Parábola hacia la izquierda. Está en el 2.º y 3.^{er} cuadrantes.

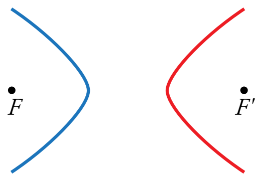
b) Parábola hacia la derecha. Está en el 1.^{er} y 4.º cuadrantes.

c) Parábola hacia abajo. Está en el 3.^{er} y 4.º cuadrantes.

d) Parábola hacia arriba. Está en el 1.^{er} y 2.º cuadrantes.

84 **Sabemos que en esta hipérbola** $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4$.

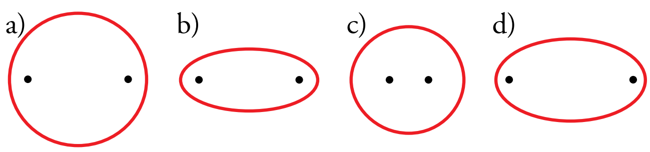
¿Qué rama corresponde a $\overline{PF} - \overline{PF'} = 4$ **y cuál corresponde a** $\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$**?**



$\overline{PF} - \overline{PF'} = 4 \rightarrow$ Los puntos están más lejos de F, luego es la rama roja.

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4 \rightarrow$ Los puntos están más lejos de F', luego es la rama azul.

85 **Teniendo en cuenta la definición de elipse y tomando sobre el dibujo algunas medidas, di cuáles de estas elipses con sus focos están mal dibujadas:**



a) Está mal dibujada porque a y b son casi iguales, luego c tiene que ser muy pequeño y, sin embargo, los focos están muy separados, siendo c la distancia al centro del foco.

b) Mal, a es la hipotenusa del triángulo que une el centro, un foco y un vértice del eje OY, y no mide igual que el semieje mayor.

c) Bien. Dibujamos el triángulo rectángulo de vértices el centro de la elipse, el vértice superior de la elipse y un foco. La medida de la hipotenusa de ese triángulo es similar a la medida del semieje horizontal.

d) Bien. Dibujamos el triángulo rectángulo de vértices el centro de la elipse, el vértice superior de la elipse y un foco. La medida de la hipotenusa de ese triángulo es similiar a la medida del semieje horizontal.

Para profundizar

86 **a) Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-3, 0)$ y $B(3, 0)$ es 68. Puedes comprobar que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. ¿Cuál es su radio?**

b) Generaliza: Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a $A(-a, 0)$ y $B(a, 0)$ es k (constante), y comprueba que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. Di el valor de su radio en función de a y de k. ¿Qué relación deben cumplir a y k para que realmente sea una circunferencia?

a) $P = (x, y)$

$(dist\ (P, A))^2 = (x+3)^2 + y^2$

$(dist\ (P, B))^2 = (x-3)^2 + y^2$

$(x+3)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 18 = 68 \ \rightarrow\ 2x^2 + 2y^2 = 50 \ \rightarrow\ x^2 + y^2 = 25$

Circunferencia de centro $O = (0, 0)$ y radio $r = 5$

b) $(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = k \ \rightarrow\ 2a^2 + 2x^2 + 2y^2 = k \ \rightarrow\ x^2 + y^2 = \dfrac{k}{2} - a^2$

Circunferencia de centro $O = (0, 0)$ y radio $r = \sqrt{\dfrac{k}{2} - a^2}$

Para que sea una circunferencia, $\dfrac{k}{2} > a^2 \ \rightarrow\ k > 2a^2$

87 **a) Considera la circunferencia C: $(x-1)^2 + y^2 = 25$ y el punto $P(9, 6)$. Sea r la recta que une P con el centro de la circunferencia. Halla A y B, puntos de corte de r y C. Comprueba que la potencia de P respecto a C coincide con $d(P, A) \cdot d(P, B)$.**

b) Demuestra que el apartado anterior es cierto si sustituimos r por cualquier recta secante a C que pase por P.

* ***Haz un dibujo y llama A' y B' a los puntos de corte de C y la nueva recta. Aplica semejanza a los triángulos $AB'P$ y $A'PB$.***

a) $(x-1)^2 + y^2 = 25$

$O = (1, 0)$

$\overrightarrow{PO} = (8, 6) = 2(4, 3)$

Recta PO: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{3} \ \rightarrow\ 3x - 4y - 3 = 0$

Puntos de intersección:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \rightarrow\ x_1 = -3,\ y_1 = -3;\ x_2 = 5, y_2 = 3 \ \rightarrow\ A = (-3, -3),\ B = (5, 3)$$

$\mathcal{P}(P, C) = (9-1)^2 + 6^2 - 25 = 75$

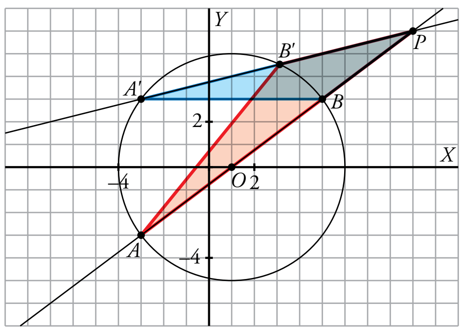
$d(P, A) \cdot d(P, B) = \sqrt{144 + 81} \cdot \sqrt{16 + 9} = 15 \cdot 5 = 75$

b) Sean dos rectas que pasan por P y son secantes a C.

Los triángulos PAB' y $PA'B$ son semejantes porque tienen un ángulo común y un ángulo inscrito con arco común, luego los lados son proporcionales:

$\dfrac{PA}{PA'} = \dfrac{PB'}{PB} \ \rightarrow\ PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Luego el resultado no depende de la recta secante elegida.



88 **Demuestra que el lugar geométrico de los puntos *P* cuyo cociente de distancias a un punto fijo *F* y a una recta fija *d* es igual a *k*, es una cónica de excentricidad *k*.**

* ***Toma F(c, 0), d: x = a^2/c y k = c/a y estudia los casos k < 1, k > 1 y k = 1. ¿Qué cónica se obtiene en cada caso?***

$P = (x, y)$

$F = (c, 0)$

$d: x = l$

$d(P, F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; $d(P, d) = |x - l|$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-l|} = k \;\to\; (x-c)^2 + y^2 = k^2(x-l)^2$$

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = k^2l^2 - k^2\,2lx + k^2x^2 \;\to\; (1-k^2)x^2 + (k^2\,2l - 2c)x + y^2 + c^2 = 0$$

Es una cónica por ser una ecuación de segundo grado.

Si $k = \dfrac{c}{a}$ y $l = \dfrac{a^2}{c}$:

$$\left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right)x^2 + \left(2\left(\frac{c}{a}\right)^2\frac{a^2}{c} - 2c\right)x + y^2 + c^2 = 0 \;\to\; \left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right)x^2 + y^2 + c^2 = 0$$

Para que sea una cónica, $\left(1 - \left(\dfrac{c}{a}\right)^2\right) < 0$ pues en otro caso, la suma de tres números positivos daría 0, que es imposible.

Si $\left(1 - \left(\dfrac{c}{a}\right)^2\right) < 0 \;\to\; k > 1 \;\to$ Es una hipérbola.

Si $\left(1 - \left(\dfrac{c}{a}\right)^2\right) \geq 0 \;\to\; k \leq 1 \;\to$ No es la ecuación de ninguna cónica.

Autoevaluación

Página 241

1 **Halla la ecuación de la bisectriz de los ángulos formados por las siguientes rectas:**

r_1**:** $x = 3$

r_2**:** $3x - 4y + 1 = 0$

Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir: $dist\,(X, r_1) = dist\,(X, r_2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist\,(X, r_1) = |\,x - 3\,| \\ dist\,(X, r_2) = \dfrac{|\,3x - 4y + 1\,|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \end{array}\right\} |\,x - 3\,| = \frac{|\,3x - 4y + 1\,|}{5}$$

Eliminando los valores absolutos obtenemos dos ecuaciones, las que corresponden a las dos bisectrices, perpendiculares entre sí:

$5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 2x + 4y - 16 = 0 \rightarrow x + 2y - 8 = 0$

$-5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 8x - 4y - 14 = 0 \rightarrow 4x - 2y - 7 = 0$

2 **Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(1, -3)$ y pasa por el punto $A(5, 0)$.**

La ecuación de la circunferencia es de la forma $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = r^2$. Para determinar r^2, sustituimos $A(5, 0)$ en la ecuación:

$(5 - 1)^2 + 3^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 25$

La ecuación de la circunferencia es, por tanto, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$. O, en su forma simplificada:

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

3 **Consideramos la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$ y la recta $r: 3x - 4y + k = 0$. Calcula los valores que debe tomar k para que r sea interior, tangente o exterior a la circunferencia.**

Hallamos primero el centro, O_C, y el radio, R, de la circunferencia:

$x^2 + y^2 - 2x = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow O_C = (1, 0)$ y $R = 1$

Calculamos la distancia del centro de la circunferencia, O_C, a la recta $r: 3x - 4y + k = 0$:

$$d = dist\,(O_C, r) = \frac{|\,3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + k\,|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|\,3 + k\,|}{5}$$

- Para que r sea interior a la circunferencia, ha de ser $d < R = 1$.

$$\frac{|\,3 + k\,|}{5} < 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3 + k}{5} < 1 \rightarrow k < 2 \\ -\dfrac{3 + k}{5} < 1 \rightarrow \dfrac{3 + k}{5} > -1 \rightarrow k > -8 \end{array}\right\} \text{ Es decir, } k \in (-8, 2).$$

- Para que r sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = R = 1$.

$$\frac{|\,3 + k\,|}{5} = 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3 + k}{5} = 1 \rightarrow k = 2 \\ -\dfrac{3 + k}{5} = 1 \rightarrow k = -8 \end{array}\right.$$

- Para que r sea exterior a la circunferencia, ha de ser $d > R = 1$.

$$\frac{|\,3 + k\,|}{5} > 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3 + k}{5} > 1 \rightarrow k > 2 \\ -\dfrac{3 + k}{5} > 1 \rightarrow \dfrac{3 + k}{5} < -1 \rightarrow k < -8 \end{array}\right\} \text{ Es decir, } k \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty).$$

4 **Dados los puntos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y la recta $r: x + y - 1 = 0$, obtén las ecuaciones de:**

a) La elipse de focos F y F' cuya constante es 6.

b) La hipérbola de focos F y F' cuya constante es 2.

c) La parábola de foco F y directriz r.

No es necesario que simplifiques la expresión de las ecuaciones.

a) Elipse de focos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y constante $k = 6$.

- Semieje mayor, a: $k = 6 = 2a \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal, $c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = \dfrac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$
- Semieje menor, b: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

b) Hipérbola de focos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y constante $k = 2$.

- Semieje a: $k = 2 = 2a \rightarrow a = 1$
- Semidistancia focal, $c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = \sqrt{5}$
- $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5 - 1 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

c) Parábola de foco $F(3, 2)$ y recta directriz $r: x + y - 1 = 0$.

En una parábola de ecuación $y^2 = 2px$, $p = dist\,(F, r)$:

$$p = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = 4\sqrt{2}x$.

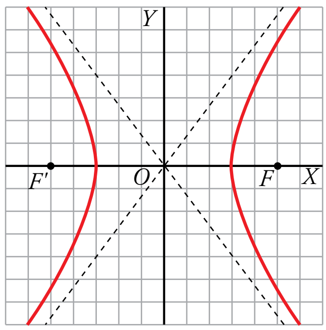
5 **Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas:**

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **b)** $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola en la que:

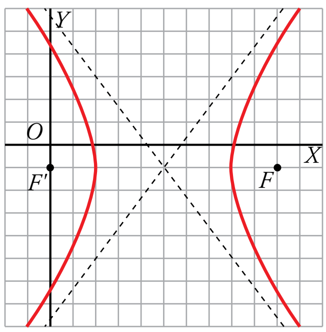
- $a = 3$, $b = 4$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$, $y = -\dfrac{4}{3}x$
- Semidistancia focal: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$
- Focos: $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$
- Vértices: $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$



b) $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

Es una hipérbola igual a la del apartado anterior pero centrada en el punto $(5, -1)$.

- $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{23}{3}$; $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{17}{3}$
- Focos: $F(10, -1)$, $F'(0, -1)$
- Vértices: $V(8, -1)$, $V'(2, -1)$



6 **Obtén la ecuación de la elipse de focos $F(-4, 0)$ y $F'(4, 0)$ y excentricidad 0,8.**

$F(-4, 0)$ $F'(4, 0)$ $exc = 0{,}8$

$c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = 4$

$exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{a} = 0{,}8 \;\to\; a = 5$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \;\to\; b = 3$

La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

7 **Halla los focos, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola que tiene por ecuación: $9y^2 - 16x^2 = 144$. Dibújala.**

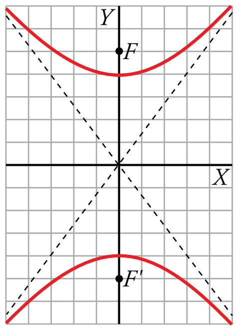
$9y^2 - 16x^2 = 144 \;\to\; \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

$a^2 = 16 \;\to\; a = 4;\; b^2 = 9 \;\to\; b = 3;\; c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$

Los focos son $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$.

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$

Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$ e $y = -\dfrac{4}{3}x$



8 **Escribe la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x = 3$, y como vértice, el origen de coordenadas.**

d: $x = 3$

En una parábola $y^2 = 2px$, la recta directriz es $x = -\dfrac{p}{2}$.

Por tanto, $3 = -\dfrac{p}{2} \;\to\; p = -6$

La ecuación de la parábola es $y^2 = -12x$

9 **Halla el eje radical de estas circunferencias:**

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \qquad C_2: x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0$$

Representa las circunferencias y su eje radical.

Sea $P(x, y)$ un punto del eje radical de ambas circunferencias. Como las potencias de P a C_1 y de P a C_2 deben coincidir:

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 \;\to\; 16y = 20 \;\to\; y = \dfrac{5}{4}$

El eje radical de las circunferencias es $y = \dfrac{5}{4}$.

Para hacer la representación, calculamos el centro y el radio de cada circunferencia:

$$C_1 \begin{cases} A = -4 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &O_{C_1} = (2, 1) \\ &r = \sqrt{4 + 1 - 1} = 2 \end{aligned}$$

$$C_2 \begin{cases} A = -4 \\ B = -18 \\ C = 21 \end{cases} \quad \begin{aligned} &O_{C_2} = (2, 9) \\ &r' = \sqrt{4 + 81 - 21} = 8 \end{aligned}$$