2 SUCESIONES

Página 50

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

¿Cuántas parejas de conejos?

¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando con una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?

Razonando del modo que se propone, llegamos a que el número de parejas, mes a mes, es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Así, el número total de parejas al final del año es de 144 (la que había al principio y otras 143 nuevas).

La sucesión de Fibonacci y el número Φ

Si dividimos cada dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, obtenemos:

1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**
	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$
	1	**2**	**1,5**	**1,66**	**1,6**	**1,625**	**1,619**

Comprueba, calculando nuevos cocientes, que el número al que se aproximan es el número áureo.

$$\frac{55}{34} = 1{,}61764\ldots; \quad \frac{89}{55} = 1{,}61818\ldots; \quad \frac{144}{89} = 1{,}61797\ldots$$

Se aproximan al número áureo $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$

Página 51

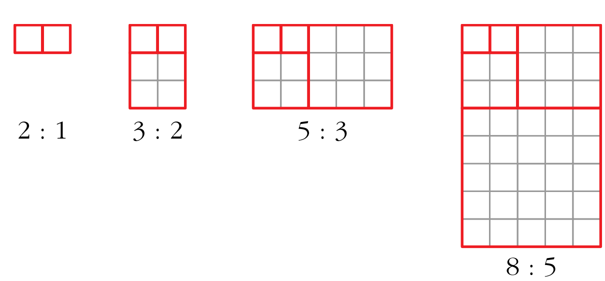
Una representación gráfica

¿Cuál es el lado del 8º? ¿Y del 9º?

Observa también los rectángulos que se forman sucesivamente:

Compruébalo para los cuatro siguientes rectángulos:

13 : 8, 21 : 13, 34 : 21, 55 : 34



El lado del 8º cuadrado es 21 y el lado del 9º cuadrado es 34.

$$\frac{13}{8} = 1{,}625;\ \frac{21}{13} = 1{,}615;\ \frac{34}{21} = 1{,}619\ldots;\ \frac{55}{34} = 1{,}617\ldots$$

Se aproximan al número áureo $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$

Página 52

1. Di el criterio por el que se forman las sucesiones siguientes y añade dos términos a cada una:

a) 3, 8, 13, 18, 23, …

b) 1, 8, 27, 64, 125, …

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, …

d) 8; 4; 2; 1; 0,5; …

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …

f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, …

g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, …

h) 20, 13, 6, –1, –8, …

a) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole 5 al anterior: $a_6 = 28$, $a_7 = 33$.

b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa: $b_6 = 216$, $b_7 = 343$.

c) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por 10 el anterior: $c_6 = 100\,000$, $c_7 = 1\,000\,000$.

d) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ (dividiendo entre 2) el anterior: $d_6 = 0{,}25$, $d_7 = 0{,}125$.

e) Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores: $e_7 = 29$, $e_8 = 47$.

f) Cada término, a partir del tercero, se obtiene restando los dos anteriores: $f_7 = 16$, $f_8 = -25$.

g) Cada término es el número del lugar que ocupa, con signo positivo si es impar, y negativo si es par: $g_7 = 7$, $g_8 = -8$.

h) Cada término, a partir del segundo, se obtiene restándole 7 al anterior: $h_6 = -15$, $h_7 = -22$.

Página 53

2. Forma una sucesión recurrente, a_n, con estos datos:

$a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

3. Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen como término general:

$a_n = 3 + 5(n-1)$

$b_n = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$c_n = (-1)^n\, 2^n$

$d_n = (n-1)(n-2)$

$e_n = n^2 + (-1)^n\, n^2$

$a_1 = 3,\ a_2 = 8,\ a_3 = 13,\ a_4 = 18$

$b_1 = 3,\ b_2 = \frac{3}{2},\ b_3 = \frac{3}{4},\ b_4 = \frac{3}{8}$

$c_1 = -2,\ c_2 = 4,\ c_3 = -8,\ c_4 = 16$

$d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = 2,\ d_4 = 6$

$e_1 = 0,\ e_2 = 8,\ e_3 = 0,\ e_4 = 32$

4. Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$.

Si tomamos, por ejemplo, $a_1 = 1$, entonces quedaría: $a_2 = 1 + 2 = 3$, $a_3 = 3 + 3 = 6$, $a_4 = 6 + 4 = 10$, $a_5 = 10 + 5 = 15$, $a_6 = 15 + 6 = 21$, $a_7 = 21 + 7 = 28$, …

5. Da el término general de las sucesiones siguientes que no sean recurrentes:

a) 3, 8, 13, 18, 23, …

b) 1, 8, 27, 64, 125, …

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, …

d) 8, 4, 2, 1, …

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …

f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, …

g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, …

h) 20, 13, 6, –1, –8, …

a) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 5$

b) $b_n = n^3$

c) $c_n = 10^{n-1}$

d) $d_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) Es recurrente

f) Es recurrente

g) $g_n = (-1)^{n-1} \cdot n$

h) $h_n = 20 - 7 \cdot (n - 1)$

Página 54

1. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son *progresiones aritméticas*? En cada una de ellas di su diferencia y añade dos términos más:

a) 3, 7, 11, 15, 19, …

b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

d) 10, 7, 4, 1, –2, …

e) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; 11; …

f) –18; –3,1; 11,8; 26,7; 41,6; …

a) Es una progresión aritmética con $d = 4$; $a_6 = 23$, $a_7 = 27$.

b) No es una progresión aritmética.

c) No es una progresión aritmética.

d) Es una progresión aritmética con $d = -3$; $d_6 = -5$, $d_7 = -8$.

e) Es una progresión aritmética con $d = 1,6$; $e_6 = 9,4$; $e_7 = 7,8$.

f) Es una progresión aritmética con $d = 14,9$; $f_6 = 56,5$; $f_7 = 71,4$.

2. **En la sucesión 1a), halla el término a_{20} y la suma de los 20 primeros términos.**

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 3 + 19 \cdot 4 = 3 + 76 = 79$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820$$

3. **En la sucesión 1d), halla el término d_{40} y la suma de los 40 primeros términos.**

$$d_{40} = d_1 + 39 \cdot (-3) = 10 - 117 = -107$$

$$S_{40} = \frac{(d_1 + d_{40}) \cdot 40}{2} = \frac{(10 - 107) \cdot 40}{2} = -1\,940$$

4. **En la sucesión 1e), halla el término e_{100} y la suma de los 100 primeros términos.**

$$e_{100} = e_1 + 99 \cdot (-1{,}6) = 17{,}4 - 158{,}4 = -141$$

$$S_{100} = \frac{(e_1 + e_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(17{,}4 - 141) \cdot 100}{2} = -6\,180$$

5. **En la sucesión 1f), halla los términos f_8, f_{17} y la suma $f_8 + f_9 + \dots + f_{16} + f_{17}$.**

$$f_8 = f_1 + 7 \cdot 14{,}9 = -18 + 104{,}3 = 86{,}3$$

$$f_{17} = f_1 + 16 \cdot 14{,}9 = -18 + 238{,}4 = 220{,}4$$

En la suma pedida hay 10 sumandos.

$$S = \frac{(f_1 + f_{17}) \cdot 10}{2} = \frac{(86{,}3 + 220{,}4) \cdot 10}{2} = 1\,533{,}5$$

Página 55

6. **¿Cuáles de las siguientes sucesiones son *progresiones geométricas*? En cada una de ellas di su razón y añade dos términos más:**

a) 1, 3, 9, 27, 81, …

b) 100; 50; 25; 12,5; …

c) 12, 12, 12, 12, 12, …

d) 5, –5, 5, –5, 5, –5, …

e) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, …

a) Es una progresión geométrica con $r = 3$; $a_6 = 243$, $a_7 = 729$.

b) Es una progresión geométrica con $r = \frac{1}{2}$; $b_5 = 6{,}25$, $b_6 = 3{,}125$.

c) Es una progresión geométrica con $r = 1$; $c_6 = 12$, $c_7 = 12$.

d) Es una progresión geométrica con $r = -1$; $d_7 = 5$, $d_8 = -5$.

e) Es una progresión geométrica con $r = -\frac{1}{3}$; $e_6 = -\frac{10}{27}$, $e_7 = \frac{10}{81}$.

7. **Calcula la suma de los 10 primeros términos de cada una de las progresiones geométricas del ejercicio anterior.**

a) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 1 \cdot 3^9 = 19\,683$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{19\,683 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 29\,524$$

b) $b_{10} = b_1 \cdot r^9 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{100}{512} = \frac{25}{128}$

$$S_{10} = \frac{b_{10} \cdot r - b_1}{r - 1} = \frac{\frac{25}{128} \cdot \frac{1}{2} - 100}{\frac{1}{2} - 1} \simeq 199{,}805$$

c) $c_{10} = 12$; $S_{10} = 12 \cdot 10 = 120$

d) $d_{10} = -5$

$S_{10} = 0$

e) $e_{10} = e_1 \cdot r^9 = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{-90}{19\,683} = \frac{-10}{2\,187}$

$$S_{10} = \frac{e_{10} \cdot r - e_1}{r - 1} = \frac{\frac{10}{6\,561} - 90}{-\frac{1}{3} - 1} \simeq 67{,}499$$

8. **¿En cuáles de las progresiones geométricas del ejercicio anterior puedes calcular la suma de sus infinitos términos? Hállala.**

Podemos calcular la suma de sus infinitos términos en las progresiones geométricas con $|r| < 1$:

b) $S_\infty = \dfrac{b_1}{1 - r} = \dfrac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{100}{\frac{1}{2}} = 200$

e) $S_\infty = \dfrac{e_1}{1 - r} = \dfrac{90}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{90}{\frac{4}{3}} = 67{,}5$

Página 56

9. **Calcula: $1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2$**

$$\frac{30 \cdot (30 + 1) \cdot (60 + 1)}{6} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} = 9\,455$$

10. **Calcula: $50^2 + 51^2 + \ldots + 60^2$**

$$(1^2 + \ldots + 60^2) - (1^2 + \ldots + 49^2) = \frac{60 \cdot 61 \cdot 121}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} =$$

$$= 73\,810 - 40\,425 = 33\,385$$

11. **Calcula: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3$**

$$\frac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 14\,400$$

12. **Calcula: $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3$**

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3 = (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \ldots + (2 \cdot 10)^3 =$$

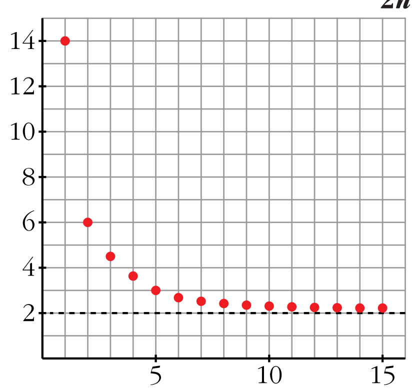
$$= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 3^3 + \ldots + 2^3 \cdot 10^3 =$$

$$= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3) =$$

$$= 8 \cdot \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 8 \cdot 3\,025 = 24\,200$$

Página 57

1. **Representa la sucesión $a_n = \dfrac{4n + 10}{2n - 1}$ y asígnale un valor a su límite.**



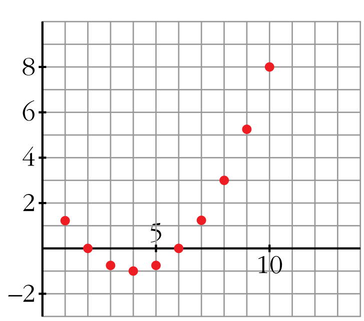
$a_1 = 14$, $a_2 = 6$, $a_3 = 4{,}4$; $a_4 \simeq 3{,}71$;

$a_5 \simeq 3{,}33$, …, $a_{10} \simeq 2{,}63$, …;

$a_{100} \simeq 2{,}06$; …; $a_{1\,000} \simeq 2{,}006$, …

$\text{lím } a_n = 2$

2. **Representa la sucesión $b_n = \dfrac{n^2}{4} - 2n + 3$ y asigna un valor a su límite.**



$b_1 = 1{,}25$; $b_2 = 0$; $b_3 = -0{,}75$; $b_4 = -1$; $b_5 = -0{,}75$;

$b_6 = 0$; $b_7 = 1{,}25$; $b_8 = 3$; $b_9 = 5{,}25$; $b_{10} = 8$, …,

$b_{100} = 2\,303$, …

$\text{lím } b_n = +\infty$

Página 59

3. Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica sus límites:

a) $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$ **b)** $b_n = \dfrac{2n-3}{n+5}$ **c)** $c_n = 3 - 2^n$ **d)** $d_n = 5 - \dfrac{1}{n^3}$

a) $a_{10} \simeq 2{,}83$; $a_{100} \simeq 32{,}83$; $a_{1\,000} \simeq 332{,}83$, … $\text{lím } a_n = +\infty$

b) $b_{10} \simeq 1{,}133$; $b_{100} \simeq 1{,}876$; $b_{1\,000} \simeq 1{,}987$, … $\text{lím } b_n = 2$

c) $c_{10} = -1\,021$; $c_{100} \simeq -1{,}27 \cdot 10^3$, … $\text{lím } c_n = -\infty$

d) $d_{10} = 4{,}999$; $d_{100} = 4{,}999999$, … $\text{lím } d_n = 5$

4. Di, razonadamente, cuáles de las siguientes sucesiones tienen límite:

a) $a_n = -\dfrac{2}{n^2}$ **b)** $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+4}$ **c)** $c_n = (-1)^n\, n$ **d)** $d_n = (-1)^n \dfrac{2}{n^2}$

a) $a_{10} = -0{,}02$; $a_{100} = -0{,}0002$; $a_{1\,000} = -0{,}000002$, … $\text{lím } a_n = 0$.

b) $b_{10} \simeq 0{,}714$; $b_{11} \simeq -0{,}733$; $b_{100} \simeq 0{,}962$; $b_{101} \simeq -0{,}962$, …

Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a –1. La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -3$, … $c_{1\,000} = 1\,000$, $c_{1\,001} = -1\,001$, …

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$; los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$. La sucesión no tiene límite.

d) $d_1 = -2$; $d_2 = 0{,}5$; …; $d_{100} = 0{,}0002$; $d_{101} = -0{,}000196$, … $\text{lím } d_n = 0$.

Página 61

1. Obtén los ocho primeros valores de a_n (términos de la sucesión) y de S_n (sumas parciales) en cada una de las progresiones siguientes. Calcula en cada una el *lím* S_n:

a) 125, 50, 20, … **b) 125, –50, 20, …** **c) 17, –17, 17, …**

d) 17, 17, 17, … **e) 10; 12; 14,4; …** **f) 10; –12; 14,4; …**

a) $a_1 = 125$, $a_2 = 50$, $a_3 = 20$, $a_4 = 8$, $a_5 = \dfrac{16}{5} = 3{,}2$; $a_6 = \dfrac{32}{25} = 1{,}28$; $a_7 = \dfrac{64}{125} = 0{,}512$;

$a_8 = \dfrac{128}{625} = 0{,}2048$.

$S_1 = 125$; $S_2 = 175$; $S_3 = 195$; $S_4 = 203$; $S_5 = 206{,}2$; $S_6 = 207{,}48$; $S_7 = 207{,}992$;

$S_8 = 208{,}1968$.

Como $r = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 < 1$; $\text{lím } S_n = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{125}{1-\dfrac{2}{5}} = \dfrac{625}{3} = 208{,}\hat{3}$

b) $b_1 = 125$; $b_2 = -50$; $b_3 = 20$; $b_4 = -8$; $b_5 = 3{,}2$; $b_6 = -1{,}28$; $b_7 = 0{,}512$; $b_8 = -0{,}2048$.

$S_1 = 125$; $S_2 = 75$; $S_3 = 95$; $S_4 = 87$; $S_5 = 90{,}2$; $S_6 = 88{,}92$; $S_7 = 89{,}432$; $S_8 = 89{,}2272$.

Como $r = -\frac{2}{5} = -0{,}4 < 1$; $\text{lím } S_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{125}{1+\frac{2}{5}} = \frac{625}{7} \simeq 89{,}286$

c) $c_1 = 17$; $c_2 = -17$; $c_3 = 17$; $c_4 = -17$; $c_5 = 17$; $c_6 = -17$; $c_7 = 17$; $c_8 = -17$.

$S_1 = 17$; $S_2 = 0$; $S_3 = 17$; $S_4 = 0$; $S_5 = 17$; $S_6 = 0$; $S_7 = 17$; $S_8 = 0$.

S_n no tiene límite.

d) $d_1 = 17$; $d_2 = 17$; $d_3 = 17$; $d_4 = 17$; $d_5 = 17$; $d_6 = 17$; $d_7 = 17$; $d_8 = 17$.

$S_1 = 17$; $S_2 = 34$; $S_3 = 51$; $S_4 = 68$; $S_5 = 85$; $S_6 = 102$; $S_7 = 119$; $S_8 = 136$.

$\text{lím } S_n = +\infty$.

e) $e_1 = 10$; $e_2 = 12$; $e_3 = 14{,}4$; $e_4 = 17{,}28$; $e_5 = 20{,}736$; $e_6 = 24{,}8832$; $e_7 = 29{,}85984$; $e_8 = 35{,}831808$.

$S_1 = 10$; $S_2 = 22$; $S_3 = 36{,}4$; $S_4 = 53{,}68$; $S_5 = 74{,}416$; $S_6 = 99{,}2992$; $S_7 = 129{,}15904$; $S_8 = 164{,}99084$.

Como $r = 1{,}2 > 1$; $\text{lím } S_n = +\infty$.

f) $f_1 = 10$; $f_2 = -12$; $f_3 = 14{,}4$; $f_4 = -17{,}28$; $f_5 = 20{,}736$; $f_6 = -24{,}8832$; $f_7 = 29{,}85984$; $f_8 = -35{,}831808$.

$S_1 = 10$; $S_2 = -2$; $S_3 = 12{,}4$; $S_4 = -4{,}88$; $S_5 = 15{,}856$; $S_6 = -9{,}0272$; $S_7 = 20{,}83264$; $S_8 = -14{,}999168$.

S_n no tiene límite.

Página 64

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Describe el criterio con el que se forman estas sucesiones y añade tres términos a cada una:**

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \ldots$

c) 2, 5, 10, 17, 26, …

d) 0, 3, 8, 15, 24, …

e) 1, 3, 6, 10, 15, …

a) Cada término lo obtenemos dividiendo 1 entre el lugar que ocupa el término:

$$a_6 = \frac{1}{6},\ a_7 = \frac{1}{7},\ a_8 = \frac{1}{8}$$

b) Cada término es la raíz cuadrada del lugar que ocupa: $a_6 = \sqrt{6}$, $a_7 = \sqrt{7}$, $a_8 = \sqrt{8}$

c) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa más 1 unidad: $a_6 = 37$, $a_7 = 50$, $a_8 = 65$

d) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa menos 1 unidad: $a_6 = 35$, $a_7 = 48$, $a_8 = 63$

e) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole al lugar que ocupa el término anterior: $a_6 = 21$, $a_7 = 28$, $a_8 = 36$

2 Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:

a) $a_n = 3 + \dfrac{2}{10^n}$ **b)** $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$ **c)** $c_n = \dfrac{3n - 1}{n + 1}$

d) $d_n = 2^{-n}$ **e)** $e_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ **f)** $f_n = \dfrac{(-1)^n n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2$; $a_2 = 3{,}02$; $a_3 = 3{,}002$; $a_4 = 3{,}0002$; $a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0$; $b_2 = \frac{3}{2}$; $b_3 = \frac{8}{3}$; $b_4 = \frac{15}{4}$; $b_5 = \frac{24}{5}$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = \frac{5}{3}$; $c_3=2$; $c_4 = \frac{11}{5}$; $c_5 = \frac{7}{3}$

d) $d_1 = \frac{1}{2}$; $d_2 = \frac{1}{4}$; $d_3 = \frac{1}{8}$; $d_4 = \frac{1}{16}$; $d_5 = \frac{1}{32}$

e) $e_1 = 1$; $e_2 = 2$; $e_3 = 6$; $e_4 = 24$; $e_5 = 120$

f) $f_1 = -1$; $f_2 = 0$; $f_3 = -3$; $f_4 = 0$; $f_5 = -5$

3 Escribe el término general de estas sucesiones:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ **b)** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

c) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \ldots$ **d) 5,1; 5,01; 5,001; 5,0001; …**

a) $a_n = \dfrac{n}{n - 1}$ b) $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ c) $c_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ d) $d_n = 5 + \dfrac{1}{10^n}$

4 Construye dos sucesiones cuyas leyes de recurrencias sean las siguientes:

a) $a_1 = 0$ $a_2 = 2$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

b) $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \frac{43}{32},$

b) $1, 2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{128}, \dots$

5 **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

a) $4, 7, 3, -4, -7, \dots$

b) $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

a) $a_1 = 4,\ a_2 = 7,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

6 **De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:**

a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; …

b) 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; …

c) 1, 2, 4, 7, 11, …

d) 14, 13, 11, 8, 4, …

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1{,}2$ y $d = 1{,}2$.

$a_n = 1{,}2 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 1{,}2n.$

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0{,}4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0{,}4) = -0{,}4n + 5{,}4.$

c) y d) no son progresiones aritméticas.

7 **De las sucesiones siguientes, indica cuáles son progresiones aritméticas:**

a) $a_n = 3n$

b) $b_n = 5n - 4$

c) $c_n = \dfrac{1}{n}$

d) $d_n = \dfrac{8-3n}{4}$

e) $e_n = 5 + \dfrac{n}{2}$

f) $f_n = n^2 - 1$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{3},\ c_4 = \frac{1}{4}, \dots$

$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}.$ No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \frac{8 - 3n}{4} - \frac{8 - 3(n - 1)}{4} = \frac{8 - 3n - 8 + 3n - 3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n - 1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0, f_2 = 3, f_3 = 8, f_4 = 15, \ldots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

8 **Calcula los términos a_{10} y a_{100} de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) –4, –2, 0, 2, 4, … **b) 2, –3, –8, –13, –18, …** **c) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$**

a) $a_{10} = a_1 + 9d = -4 + 9 \cdot 2 = -4 + 18 = 14$

$a_{100} = a_1 + 99d = -4 + 99 \cdot 2 = -4 + 198 = 194$

b) $a_{10} = a_1 + 9d = 2 - 9 \cdot 5 = 2 - 45 = -43$

$a_{100} = a_1 + 99d = 2 - 99 \cdot 5 = 2 - 495 = -493$

c) $a_{10} = a_1 + 9d = \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$a_{100} = a_1 + 99d = \frac{3}{4} + 99 \cdot \frac{1}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$

9 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) 3, 6, 9, 12, 15, … **b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …**

c) $c_n = 4n - 2$ **d) $d_n = \frac{1 - 2n}{2}$**

a) $a_1 = 3;\ a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3 + 75) \cdot 25}{2} = 975$

b) $b_1 = 5;\ b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}6$

$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 2{,}6) \cdot 25}{2} = 95$

c) $c_1 = 2;\ c_{25} = 98$

$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 25}{2} = 1\,250$

d) $d_1 = \frac{-1}{2}$; $d_{25} = \frac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312{,}5$$

10 **De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y también su término general.**

a) 32, 16, 8, 4, 2, … **b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …**

c) 1, 4, 9, 16, 25, … **d) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$, …**

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ a_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = \frac{1}{4};\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36$, $b_7 = 49$, $b_8 = 64$, $b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0{,}1$.

$$c_6 = 0{,}00001;\ c_7 = 0{,}000001;\ c_8 = 0{,}0000001;\ c_n = 1 \cdot 0{,}1^{n-1} = 0{,}1^{n-1}$$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$$d_6 = 8;\ d_7 = 8\sqrt{2};\ d_8 = 16;\ d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n.$$

11 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:**

a) $a_1 = 32$, $r = \frac{1}{2}$ **b) $a_1 = 10$, $r = \frac{1}{10}$** **c) $a_1 = 2^{-10}$, $r = 2$**

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r-1}$$

a) $$S_{25} = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63{,}99999809 \simeq 64 \qquad S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{32}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{32}{\frac{1}{2}} = 64$$

b) $$S_{25} = \frac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{10} - 1} = 11{,}1 = \frac{100}{9} \qquad S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11{,}1$$

c) $$S_{25} = \frac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2-1} = 32\,767{,}99902 \simeq 32\,768$$

$$S_\infty = +\infty$$

12 **Calcula los términos a_{10}, a_{100} y $a_{1\,000}$, en cada sucesión e indica cuál es su límite:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n-1}$ **b)** $a_n = 1 + \dfrac{10}{n^2}$ **c)** $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$

d) $a_n = \dfrac{n^2-10}{2}$ **e)** $a_n = \dfrac{5}{n} - 1$ **f)** $a_n = 3 - 7n$

a) $a_{10} = 0,\widehat{1}$; $a_{100} = 0,\widehat{01}$; $a_{1\,000} = 0,\widehat{001}$

$\text{lím } a_n = 0$

b) $a_{10} = 1,1$; $a_{100} = 1,001$; $a_{1\,000} = 1,00001$

$\text{lím } a_n = 1$

c) $a_{10} = 2,5$; $a_{100} = 2,05$; $a_{1\,000} = 2,005$

$\text{lím } a_n = 2$

d) $a_{10} = 45$; $a_{100} = 4\,995$; $a_{1\,000} = 499\,995$

$\text{lím } a_n = +\infty$

e) $a_{10} = -0,5$; $a_{100} = -0,95$; $a_{1\,000} = -0,995$

$\text{lím } a_n = -1$

f) $a_{10} = -6,7$; $a_{100} = -697$; $a_{1\,000} = -6\,997$

$\text{lím } a_n = -\infty$

Página 65

13 **Halla algunos términos muy avanzados de las siguientes sucesiones e indica cuál es su límite:**

a) $a_n = 5n - 10$ **b)** $b_n = 100 - n$

c) $c_n = \dfrac{n-3}{n+1}$ **d)** $d_n = \dfrac{n}{2n+1}$

a) $a_{10} = 40$; $a_{100} = 490$; $a_{1\,000} = 4\,990$

$\text{lím } a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 90$; $b_{100} = 0$; $b_{1\,000} = -900$

$\text{lím } b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 0,63$; $c_{100} \simeq 0,9603$; $c_{1\,000} \simeq 0,996$

$\text{lím } c_n = 1$

d) $d_{10} \simeq 0,476$; $d_{100} \simeq 0,498$; $d_{1\,000} \simeq 0,4998$

$\text{lím } d_n = 0,5 = \dfrac{1}{2}$

PARA RESOLVER

14 **Calcula el 15º término en la siguiente progresión: 3; 2,7; 2,4; 2,1; …**

Es una progresión aritmética con $a_1 = 3$ y $d = -0,3$.

Por tanto, $a_{15} = a_1 + 14d = 3 - 0,3 \cdot 14 = 3 - 4,2 = -1,2$.

15 **Halla el cuarto término de una progresión aritmética en la que $d = 3$ y $a_{20} = 100$.**

$$a_{20} = a_4 + 16d \;\rightarrow\; a_4 = a_{20} - 16d = 100 - 16 \cdot 3 = 52$$

16 **Calcula la suma de todos los números impares de tres cifras.**

Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101 + 999) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

17 **¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?**

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $d = 7$.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35\,350$$

18 **En una progresión aritmética sabemos que $d = 3$, $a_n = 34$ y $S_n = 133$. Calcula n y a_1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \;\rightarrow\; 34 = a_1 + (n-1) \cdot 3 \\ S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \;\rightarrow\; 133 = \dfrac{(a_1 + 34) \cdot n}{2} \end{array}\right\}$$

$$34 = a_1 + 3n - 3 \;\rightarrow\; a_1 = 37 - 3n$$

$$133 = \frac{(37 - 3n + 34) \cdot n}{2} \;\rightarrow\; 266 = (71 - 3n)n$$

$$266 = 71n - 3n^2 \;\rightarrow\; 3n^2 - 71n + 266 = 0$$

$$n = \frac{71 \pm \sqrt{5\,041 - 3\,192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1\,849}}{6} =$$

$$= \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} n = 14/3 \text{ (no vale)} \\ n = 19 \end{cases}$$

$$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \;\rightarrow\; a_1 = -20$$

19 **Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que el perímetro vale 48 cm.**

Llamamos a los lados a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

Sabemos que $a_6 = 13$ cm y que $S_6 = 48$. Por tanto:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \;\to\; 13 = a_1 + 5d \;\to\; a_1 = 13 - 5d \\ S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} \;\to\; 48 = (13 - 5d + 13) \cdot 3 \;\to\; 48 = (26 - 5d) \cdot 3 \end{cases}$$

$$48 = 78 - 15d \;\to\; 15d = 30 \;\to\; d = \frac{30}{15} = 2 \;\to\; d = 2$$

$$a_1 = 13 - 5 \cdot 2 = 13 - 10 = 3 \;\to\; a_1 = 3$$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

20 **En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?**

$$a_7 = 16 \;\to\; a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \;\to\; d = 1{,}2$$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos n para que $a_n = 28$ m:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 8{,}8 + (n - 1) \cdot 1{,}2 = 28 \;\to\; 8{,}8 + 1{,}2n - 1{,}2 = 28$$

$$1{,}2n = 20{,}4 \;\to\; n = 17$$

La fila 17 está a 28 metros.

21 **Escribe los términos intermedios de una progresión aritmética de la que conocemos $a_1 = -3$ y $a_{10} = 18$.**

$$a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 9d = 18 \;\to\; d = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

Los términos son: $a_1 = -3,\ a_2 = -\dfrac{2}{3},\ a_3 = \dfrac{5}{3},\ a_4 = 4,\ a_5 = \dfrac{19}{3},\ a_6 = \dfrac{26}{3},\ a_7 = 11,$

$$a_8 = \frac{40}{3},\ a_9 = \frac{47}{3},\ a_{10} = 18.$$

22 **Halla los dos términos centrales de una progresión aritmética de 8 términos sabiendo que $S_8 = 100$ y que $a_1 + 2a_8 = 48$.**

Tenemos que calcular a_4 y a_5. Sabemos que:

$$\begin{cases} S_8 = \dfrac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = (a_1 + a_8) \cdot 4 = 100 \;\to\; a_1 + a_8 = 25 \\ a_1 + 2a_8 = 48 \end{cases}$$

Restando a la 2ª ecuación la 1ª, queda:

$$a_8 = 23 \;\to\; a_1 = 25 - a_8 = 25 - 23 = 2 \;\to\; a_1 = 2$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 2 + 7d = 23 \;\to\; d = 3$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = a_1 + 3d = 2 + 9 = 11 \\ a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_4 = 11 \\ a_5 = 14 \end{array}$$

23 **En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $a_3 = 0{,}5$. Calcula a_5 y la expresión de a_n.**

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 8r^2 = 0{,}5 \quad \to \quad r^2 = 0{,}0625 \quad \to \quad r = \pm\, 0{,}25 = \pm\, \frac{1}{4}$$

1^er^ caso: $r = 0{,}25 = \frac{1}{4}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2^3}{2^{2n-2}} = \frac{1}{2^{2n-5}}$$

2º caso: $r = -0{,}25 = -\frac{1}{4}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

24 **En una progresión geométrica de razón $r = 3$ conocemos $S_6 = 1\,456$. Calcula a_1 y a_4.**

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728a_1}{2} =$$

$$= 364a_1 = 1\,456 \quad \to \quad a_1 = 4$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

25 **La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula a_1 y la razón.**

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot r = 1 \quad \to \quad a_1 = \dfrac{1}{r} \\[2ex] S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{1/r}{1-r} = \dfrac{1}{r-r^2} = 4 \quad \to \quad 1 = 4r - 4r^2 \end{array}\right.$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \to \quad r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \to \quad r = \frac{1}{2} \quad \to \quad a_1 = 2$$

26 **La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20% de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?**

– Al cabo de 1 año valdrá $\to$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8$ €

– Al cabo de 2 años valdrá $\to$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^2$ €

…

– Al cabo de 10 años valdrá $\to$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^{10} \simeq 429\,496{,}73$ €

27 **El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6% con pago mensual de intereses. ¿Cuál será el valor de nuestro dinero un año después?**

Un 6% anual corresponde a $\frac{6}{1\,200}$ mensual. Cada mes el dinero se multiplica por 1,005.

– Al cabo de 1 mes tendremos $\rightarrow$ $5\,000 \cdot 1{,}005$ €

– Al cabo de 2 meses tendremos $\rightarrow$ $5\,000 \cdot 1{,}005^2$ €

…

– Al cabo de 12 meses tendremos $\rightarrow$ $5\,000 \cdot 1{,}005^{12} \simeq 5\,308{,}39$ €

28 **Durante 5 años depositamos en un banco 2 000 € al 4% con pago anual de intereses.**

a) ¿En cuánto se convierte cada depósito al final del quinto año?

b) ¿Qué cantidad de dinero hemos acumulado durante esos 5 años?

a) Al final del 5º año:

– Los primeros 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^5$ € $\simeq 2\,433{,}31$ €

– Los segundos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^4$ € $\simeq 2\,339{,}72$ €

– Los terceros 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^3$ € $\simeq 2\,249{,}73$ €

– Los cuartos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^2$ € $= 2\,163{,}2$ €

– Los quintos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04$ € $= 2\,080$ €

b) Sumamos las cantidades anteriores:

$$2\,000 \cdot 1{,}04^5 + 2\,000 \cdot 1{,}04^4 + 2\,000 \cdot 1{,}04^3 + 2\,000 \cdot 1{,}04^2 + 2\,000 \cdot 1{,}04 =$$

$$= 2\,000(1{,}04^5 + 1{,}04^4 + 1{,}04^3 + 1{,}04^2 + 1{,}04) \overset{(*)}{=}$$

$$= 2\,000 \cdot \frac{1{,}04^6 - 1{,}04}{1{,}04 - 1} = 11\,265{,}95 \text{ €}$$

(*) Suma de una progresión geométrica con $a_1 = 1{,}04$ y $r = 1{,}04$.

29 **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:**

a) $a_n = 3n^2 - 10$ **b)** $b_n = 3n - n^2$ **c)** $c_n = 10 - 5n + n^2$

d) $d_n = (1 - 2n)^2$ **e)** $e_n = (4 - n)^3$ **f)** $f_n = 1 - (n + 2)^2$

a) $a_{10} = 290$; $a_{100} = 29\,990$; $a_{1\,000} = 2\,999\,990$

$\text{lím } a_n = +\infty$

b) $b_{10} = -70$; $b_{100} = -9\,700$; $b_{1\,000} = -997\,000$

$\text{lím } b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 60$; $c_{100} = 9\,510$; $c_{1\,000} = 995\,010$

$\lim c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 361$; $d_{100} = 39\,601$; $d_{1\,000} = 3\,996\,001$

$\lim d_n = +\infty$

e) $e_{10} = -216$; $e_{100} = -884\,736$; $e_{1\,000} = -988\,047\,936$

$\lim e_n = -\infty$

f) $f_{10} = -143$; $f_{100} = -10\,403$; $f_{1\,000} = -1\,004\,003$

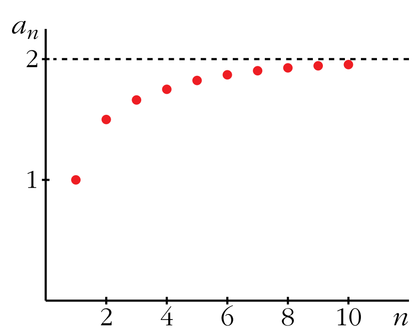
$\lim f_n = -\infty$

30 **Representa gráficamente los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones, comprueba que tienden a un número y di cuál es:**

a) $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$ **b)** $b_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ **c)** $c_n = \dfrac{1}{n^2} - 2$ **d)** $d_n = \dfrac{n+1}{2n^2}$

a)

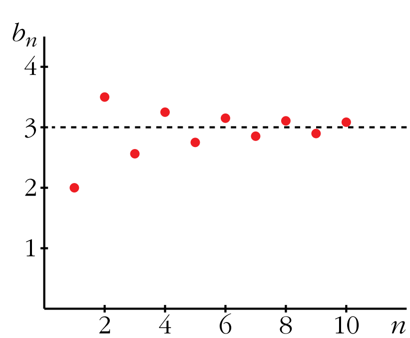
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1,5	$1,\widehat{6}$	1,75	1,8	$1,8\widehat{3}$	1,86	1,875	$1,\widehat{8}$	1,9



$\lim a_n = 2$

b)

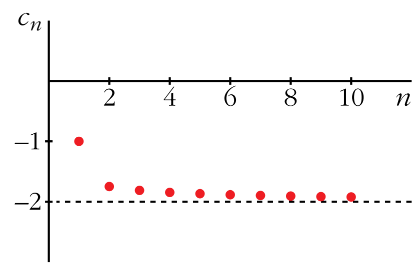
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	2	3,5	$2,\widehat{6}$	3,25	2,8	$3,1\widehat{6}$	2,86	3,125	$2,\widehat{8}$	3,1



$\lim b_n = 3$

c)

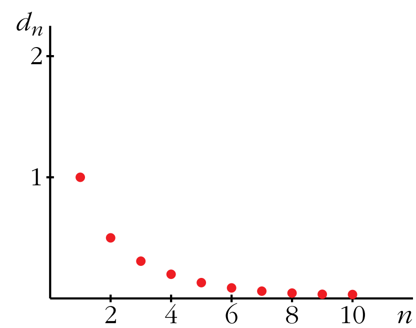
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	–1	–1,75	$-1,\widehat{8}$	–1,94	–1,96	–1,97	–1,98	–1,98	–1,99	–1,99



lím $c_n = -2$

d)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_n	1	0,5	0,22	0,16	0,12	0,10	0,08	0,07	0,06	0,06



lím $d_n = 0$

31 **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:**

a) $a_n = \dfrac{5}{3n + 2}$ **b)** $b_n = \dfrac{3n}{n^2 + 1}$ **c)** $c_n = \dfrac{-100}{n^2}$ **d)** $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n + 1}$

a) $a_{10} = 0{,}15625$; $a_{100} = 0{,}01656$; $a_{1\,000} = 0{,}00167$

lím $a_n = 0$

b) $b_{10} = 0{,}297$; $b_{100} = 0{,}029997$; $b_{1\,000} = 0{,}002999997$

lím $b_n = 0$

c) $c_{10} = -1$; $c_{100} = -0{,}01$; $c_{1\,000} = -0{,}0001$

lím $c_n = 0$

d) $d_{10} = 0{,}0909$; $d_{100} = 0{,}0099$; $d_{1\,000} = 0{,}000999$; $d_{1\,001} = -0{,}000999$

lím $d_n = 0$

Página 66

32 **Comprueba, dando a n valores grandes, que las siguientes sucesiones tienden a un número y di cuál es ese número:**

a) $a_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$ **b)** $b_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+1}$

c) $c_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$ **d)** $d_n = \dfrac{2n^2-5}{n^3}$

a) $a_{10} = 2{,}238$; $a_{100} = 2{,}473$; $a_{1\,000} = 2{,}497$

$\text{lím } a_n = 2{,}5 = \dfrac{5}{2}$

b) $b_{10} = -1{,}970$; $b_{100} = -1{,}9997$; $b_{1\,000} = -1{,}999997$

$\text{lím } b_n = -2$

c) $c_{10} = 1{,}000977$; $c_{20} = 1{,}000000954$

$\text{lím } c_n = 1$

d) $d_{10} = 0{,}195$; $d_{100} = 0{,}019995$; $d_{1\,000} = 0{,}001999995$

$\text{lím } d_n = 0$

33 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{n^2+3}$ **b)** $b_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$ **c)** $c_n = \dfrac{3n+1}{\sqrt{n}}$

d) $d_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+2}}$ **e)** $e_n = \dfrac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$ **f)** $f_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

a) $a_{10} = 0{,}7864$; $a_{100} = 0{,}9798$; $a_{1\,000} = 0{,}9980$

$\text{lím } a_n = 1$

b) $b_{10} = 0{,}5025$; $b_{100} = 0{,}500025$; $b_{1\,000} = 0{,}50000025$

$\text{lím } b_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

c) $c_{10} = 9{,}80$; $c_{100} = 30{,}1$; $c_{1\,000} = 94{,}90$

$\text{lím } c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 1{,}756$; $d_{100} = 1{,}973$; $d_{1\,000} = 1{,}997$

$\text{lím } d_n = 2$

e) $e_{10} = 20{,}797$; $e_{100} = 107{,}278$; $e_{1\,000} = 1\,007{,}027$

$\text{lím } e_n = +\infty$

f) $f_{10} = 0{,}760$; $f_{100} = 0{,}909$; $f_{1\,000} = 0{,}969$

$\text{lím } f_n = 1$

34 **Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{n}$ **b)** $b_n = 1 + (-1)^n$

c) $c_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ **d)** $d_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$

a) $a_{100} = 2{,}01$; $a_{101} = -2{,}0099$; $a_{1\,000} = 2{,}001$; $a_{1\,001} = -2{,}000999$

Los términos pares tienden a 2 y los impares a –2.

a_n no tiene límite.

b) $b_1 = 0$; $b_2 = 2$; $b_3 = 0$; $b_4 = 2$, …

Los términos impares son 0 y los pares son 2.

b_n no tiene límite.

c) $c_1 = 0$; $c_2 = 1$; $c_3 = 0$; $c_4 = 0{,}5$; …; $c_{100} = 0{,}02$

Los términos impares son cero y los pares tienden a cero.

lím $c_n = 0$.

d) $d_1 = 0$; $d_2 = 1{,}5$; $d_3 = 0{,}67$; $d_4 = 1{,}25$; …; $d_{100} = 1{,}01$; $d_{101} = 0{,}99$

lím $d_n = 1$.

35 **Dadas las sucesiones** $a_n = n^2$ **y** $b_n = \dfrac{1}{n^2+1}$**, estudia el límite de:**

a) $a_n + b_n$ **b)** $a_n \cdot b_n$ **c)** $\dfrac{a_n}{b_n}$

a) $A_n = a_n + b_n = n^2 + \dfrac{1}{n^2+1}$

$A_{10} = 100{,}0099$; $A_{100} = 10\,000{,}0001$

lím $(a_n + b_n) = +\infty$

b) $B_n = a_n \cdot b_n = n^2 \cdot \dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

$B_{10} = 0{,}9901$; $B_{100} = 0{,}9999$

lím $(a_n \cdot b_n) = 1$

c) $C_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^2}{1(n^2+1)} = n^2(n^2+1) = n^4 + n^2$

$C_{10} = 10\,100$; $C_{100} = 100\,010\,000$

lím $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$

36 **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:**

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$ **b)** $b_n = \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+3}$ **c)** $c_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ **d)** $d_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$

a) $a_{10} = 2{,}6533$; $a_{100} = 2{,}7115$; $a_{1\,000} = 2{,}7176$; $a_{1\,000\,000} = 2{,}71828$; …; $\text{lím } a_n = e$

b) $b_{10} = 2{,}6206$; $b_{100} = 2{,}7052$; $b_{1\,000} = 2{,}7169$; $b_{1\,000\,000} = 2{,}71828$; …; $\text{lím } b_n = e$

c) $c_{10} = 2{,}7048$; $c_{100} = 2{,}7181$; $c_{1\,000} = 2{,}71828$; …; $\text{lím } c_n = e$

d) $d_{10} = 2{,}8680$; $d_{100} = 2{,}7320$; $d_{1\,000} = 2{,}7196$; $d_{1\,000\,000} = 2{,}71828$; …; $\text{lím } d_n = e$

37 **Determina, dando valores grandes a** n**, cuál es el límite de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ **b)** $b_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^{n}$ **c)** $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **d)** $d_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}$

a) $a_{10} = 1\,667{,}988$; $a_{100} = 2{,}987 \cdot 10^{30}$

$\text{lím } a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 0{,}00605$; $b_{100} = 5{,}72 \cdot 10^{-30}$

$\text{lím } b_n = 0$

c) $c_{10} = 13\,780{,}61$; $c_{100} = 1{,}64 \cdot 10^{43}$

$\text{lím } c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 1{,}1046$; $d_{100} = 1{,}01005$; $d_{1\,000} = 1{,}0010005$

$\text{lím } d_n = 1$

38 **Halla el término general de la sucesión: 2,** $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$, **… y estudia su límite.**

$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$

$a_1 = 2$; $a_2 = \sqrt{2} \simeq 1{,}4142$; $a_3 = \sqrt[3]{2} \simeq 1{,}2599$; $a_4 = \sqrt[4]{2} \simeq 1{,}1892$; …; $a_{10} \simeq 1{,}0718$

$a_{100} \simeq 1{,}00696$; $\text{lím } a_n = 1$

39 **Dadas las sucesiones** $a_n = n + 3$ **y** $b_n = 2 - n$**, calcula los siguientes límites:**

a) $\text{lím } (a_n + b_n)$ **b)** $\text{lím } (a_n - b_n)$ **c)** $\text{lím } (a_n \cdot b_n)$ **d)** $\text{lím } \frac{a_n}{b_n}$

a) $A_n = a_n + b_n = n + 3 + 2 - n = 5$

$\text{lím } (a_n + b_n) = 5$

b) $B_n = a_n - b_n = n + 3 - (2 - n) = n + 3 - 2 + n = 2n + 1$

$B_{10} = 21$; $B_{100} = 201$; $B_{1\,000} = 2\,001$

$\text{lím } (a_n - b_n) = +\infty$

c) $C_n = a_n \cdot b_n = (n + 3)\,(2 - n) = 2n - n^2 + 6 - 3n = -n^2 - n + 6$

$C_{10} = -104;\ C_{100} = -10\,094;\ C_{1\,000} = -1\,000\,994$

$lím\ (a_n \cdot b_n) = -\infty$

d) $D_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n+3}{2-n}$

$D_{10} = -1{,}625;\ D_{100} = -1{,}051;\ D_{1\,000} = -1{,}005$

$lím\ \dfrac{a_n}{b_n} = -1$

CUESTIONES TEÓRICAS

40 **Sea a_n una progresión aritmética con $d > 0$. ¿Cuál es su límite?**

Si $d > 0$, la sucesión se va haciendo cada vez mayor. Por tanto, $lím\ a_n = +\infty$.

41 **La sucesión 3, 3, 3, 3, …, ¿es una progresión aritmética? ¿Y geométrica?**

– Es una progresión aritmética con $d = 0$.

– También es una progresión geométrica con $r = 1$.

42 **Si a_n es una progresión geométrica con $r = \dfrac{1}{3}$, ¿cuál es su límite?**

Al ir multiplicando por $\dfrac{1}{3}$ sucesivamente, los términos se van aproximando a cero. Es decir, $lím\ a_n = 0$.

43 **En una progresión geométrica cualquiera, $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$, comprueba que: $a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$. ¿Se verifica también $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$? Enuncia una propiedad que exprese los resultados anteriores.**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_6 = a \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^5 \\ a_2 \cdot a_5 = (a \cdot r) \cdot (a \cdot r^4) = a^2 \cdot r^5 \\ a_3 \cdot a_4 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^3) = a^2 \cdot r^5 \end{array}\right\} \text{Son iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 \cdot a_7 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^6) = a^2 \cdot r^8 \\ a_4 \cdot a_6 = (a \cdot r^3) \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^8 \end{array}\right\} \text{Son iguales}$$

Propiedad: Si a_n es una progresión geométrica, se verifica que $a_p \cdot a_q = a_m \cdot a_n$ siempre que $p + q = m + n$.

44 **El número $3{,}\widehat{9}$ podemos considerarlo como la suma de los infinitos términos de la sucesión: $3, \dfrac{9}{10}, \dfrac{9}{100}, \dfrac{9}{1\,000}, \dots$**

Calcula la suma y halla su límite.

$$3 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \dots = 3 + 0{,}9 + 0{,}99 + 0{,}999 + \dots = 3{,}\widehat{9}$$

Si consideramos la progresión geométrica $\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1\,000}, \ldots$ y sumamos todos sus términos, queda:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Por tanto: $3 + \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \ldots\right) = 3 + 1 = 4$

45 **Inventa dos sucesiones cuyo límite sea infinito y que al dividirlas, la sucesión que resulte tienda a 2.**

Por ejemplo: $a_n = 2n;\ b_n = n + 1$

$$lím\ a_n = +\infty;\ lím\ b_n = +\infty$$

$$lím\ \frac{a_n}{b_n} = lím\ \frac{2n}{n + 1} = 2$$

46 **Inventa dos sucesiones cuyo límite sea 0 y que al dividirlas, la sucesión que obtengas no tienda a 0.**

Por ejemplo: $a_n = \frac{1}{n};\ b_n = \frac{2}{n}$

$$lím\ a_n = 0;\ lím\ b_n = 0$$

$$lím\ \frac{a_n}{b_n} = lím\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

PARA PROFUNDIZAR

47 **El término central de una progresión aritmética de 17 términos es igual a 11. Calcula la suma de los 17 términos.**

El término central es a_9. Como $a_1 + a_{17} = a_2 + a_{16} = a_3 + a_{15} = \ldots = a_9 + a_9$, entonces:

$$S_{17} = \frac{(a_1 + a_{17}) \cdot 17}{2} = \frac{(a_9 + a_9) \cdot 17}{2} = \frac{(11 + 11) \cdot 17}{2} = \frac{22 \cdot 17}{2} = 187$$

48 **La sucesión $x^2 - x + 1;\ x^2 + 1;\ x^2 + x + 1$, ¿es una progresión aritmética?**

Si lo fuese, calcula el quinto término y la suma de los cinco primeros términos.

Llamamos $a_1 = x^2 - x + 1;\ a_2 = x^2 + 1;\ a_3 = x^2 + x + 1$.

Veamos si la diferencia entre cada dos términos consecutivos es la misma:

$$a_2 - a_1 = x^2 + 1 - (x^2 - x + 1) = x^2 + 1 - x^2 + x - 1 = x$$

$$a_3 - a_2 = x^2 + x + 1 - (x^2 + 1) = x^2 + x + 1 - x^2 - 1 = x$$

Por tanto, sí es una progresión aritmética con $a_1 = x^2 - x + 1$ y diferencia $d = x$.

Así, tenemos que:

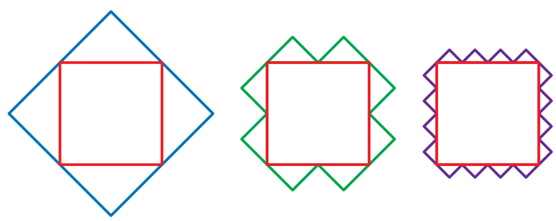
$$a_5 = a_1 + 4 \cdot d = x^2 - x + 1 + 4x = x^2 + 3x + 1$$

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = \frac{(x^2 - x + 1 + x^2 + 3x + 1) \cdot 5}{2} = \frac{(2x^2 + 2x + 2) \cdot 5}{2}$$

$$= (x^2 + x + 1) \cdot 5 = 5x^2 + 5x + 5$$

Página 67

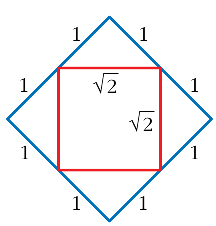
49 **Dibuja un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm y sobre cada lado un triángulo rectángulo isósceles; después dos, luego cuatro, como indican las figuras:**



a) Forma la sucesión de los perímetros de las figuras obtenidas. ¿Cuál es su límite?

b) Forma también la sucesión de las áreas. ¿Cuál es su límite?

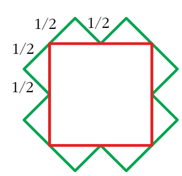
1^er^ paso:



Perímetro = 8 cm

Área = 2 + 2 = 4 cm^2

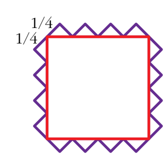
2º paso:



Perímetro = 8 cm

Área = 2 + 1 = 3 cm^2

3^er^ paso:



Perímetro = 8 cm

Área = $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ cm^2

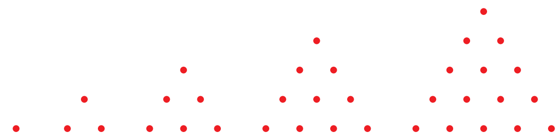
… **Paso *n*-ésimo:** $\begin{cases} \text{Perímetro} = 8 \text{ cm} \\ \text{Área} = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ cm}^2 \end{cases}$

a) 8, 8, 8, 8, …; $P_n = 8$; $\lim P_n = 8$

b) 4, 3, $\frac{5}{2}$, …; $A_n = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $\lim A_n = 2$

(que es el área del cuadrado de lado $\sqrt{2}$).

50 **Los términos de la sucesión 1, 3, 6, 10, 15 se llaman números triangulares porque se pueden representar así:**



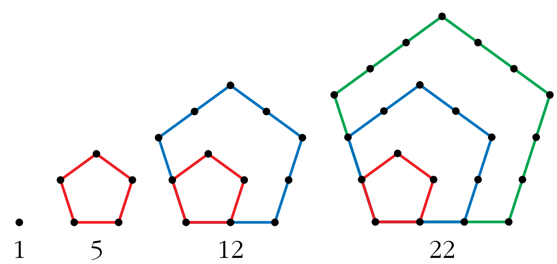
Calcula a_{10} y a_n.

$$a_1 = 1;\ a_2 = 1 + 2 = 3;\ a_3 = 1 + 2 + 3 = 6;\ a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$$

$$a_{10} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \frac{(1 + 10) \cdot 10}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$$

51 **Los términos de la sucesión 1, 5, 12, 22, 35 se llaman números pentagonales porque se pueden representar así:**



Calcula a_6, a_{10} y a_n.

☛ ***Esos números se pueden escribir así: 1; 1 + 4; 1 + 4 + 7; 1 + 4 + 7 + 10; 1 + 4 + 7 + 10 + 13***

$$a_1 = 1;\ a_2 = 1 + 4 = 5;\ a_3 = 1 + 4 + 7 = 12;\ a_4 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$$

Observamos que vamos obteniendo las sumas de los términos de una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 3$. En el paso n-ésimo tendremos:

$$a_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + (n - 1) \cdot 3) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) =$$

$$= \frac{(1 + (3n - 2)) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 3n - 2) \cdot n}{2} = \frac{(3n - 1) \cdot n}{2}$$

Por tanto:

$$a_6 = \frac{17 \cdot 6}{2} = 17 \cdot 3 = 51;\ a_{10} = \frac{29 \cdot 10}{2} = 145$$

52 **Utiliza las propiedades de las progresiones para simplificar la expresión del término general y calcular el límite de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$ **b)** $b_n = 2n\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3}\right)$

a) $a_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{(1+n) \cdot n}{2}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n + n^2}{2}\right) = \frac{n^2 + n}{2n^2}$

Hallamos el límite: $a_{10} = 0{,}55$; $a_{100} = 0{,}505$; $a_{1\,000} = 0{,}5005$; $lím\ a_n = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

b) $b_n = \frac{2n}{n^3}(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{2n}{n^3}\left(\frac{(1+n) \cdot n}{2}\right) = \frac{2n}{n^3} \cdot \left(\frac{n + n^2}{2}\right) = \frac{2n^2 + 2n^3}{2n^3} =$

$$= \frac{2n^3 + 2n^2}{2n^2} = \frac{2n^2(n+1)}{2n^2} = n + 1$$

$b_{10} = 11$; $b_{100} = 101$; $b_{1\,000} = 1\,001$; $lím\ b_n = +\infty$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

53 **La sucesión de Fibonacci se puede obtener a partir de una fórmula muy complicada:**

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Con ayuda de la calculadora podemos obtener cualquiera de sus términos. Por ejemplo, sabemos que $a_6 = 8$. Obtengámoslo con la fórmula:

1 [+] [√] 5 [=] [÷] 2 [=] [x^y] 6 [=] [−] [(] [(] 1 [−] [√] 5 [)] [÷] 2 [)] [x^y] 6 [=] [÷] [√] 5 [=]

- **Calcula de este modo $a_8 = 21$.**

- **Observa que el sustraendo $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ toma valores muy próximos a 0 para n un poco grande.**

  Esto nos permite obtener un valor muy aproximado de a_n mediante $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Por ejemplo, $a_7 \approx 12{,}98 \approx 13$.

  Calcula, así, a_{10} y a_{20}.

• Para calcular a_8 escribimos en la calculadora:

1 [+] [√] 5 [=] [÷] 2 [=] [x^y] 8 [=] [−] [(] [(] 1 [−] [√] 5 [)] [÷] 2 [)] [x^y] 8 [=] [÷] [√] 5 [=]

Obtenemos $a_8 = 21$.

• Obtenemos de forma aproximada a_{10} y a_{20}:

$$a_{10} \simeq 55{,}0036 \quad \to \quad a_{10} = 55$$

$$a_{20} \simeq 6\,765{,}00003 \quad \to \quad a_{20} = 6\,765$$

54 Dos sucesiones emparejadas

Observa las siguientes sucesiones:

$l_1 = 1$	$d_1 = 1$
$l_2 = 1 + 1 = 2$	$d_2 = 2 + 1 = 3$
$l_3 = 2 + 3 = 5$	$d_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
……	……
$l_n = l_{n-1} + d_{n-1}$	$d_n = 2l_{n-1} + d_{n-1}$

- **Calcula los diez primeros términos de cada una de estas sucesiones.**
- **Comprueba que el cociente d_n/l_n se parece cada vez más a $\sqrt{2}$.**

Este par de sucesiones fueron construidas por los pitagóricos. Tienen la particularidad de que no solo son recurrentes sino que cada una ha de *recurrir* a la otra.

El límite de d_n/l_n es $\sqrt{2}$, igual que el cociente entre la diagonal, d, y el lado, l, de un cuadrado.

• Calculamos los diez primeros términos de cada sucesión:

		COCIENTES
$l_1 = 1$	$d_1 = 1$	$d_1/l_1 = 1$
$l_2 = 1 + 1 = 2$	$d_2 = 2 + 1 = 3$	$d_2/l_2 = 1{,}5$
$l_3 = 2 + 3 = 5$	$d_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$	$d_3/l_3 = 1{,}4$
$l_4 = 12$	$d_4 = 17$	$d_4/l_4 \simeq 1{,}41666\ldots$
$l_5 = 29$	$d_5 = 41$	$d_5/l_5 \simeq 1{,}4137931\ldots$
$l_6 = 70$	$d_6 = 99$	$d_6/l_6 \simeq 1{,}4142857\ldots$
$l_7 = 169$	$d_7 = 239$	$d_7/l_7 \simeq 1{,}4142011\ldots$
$l_8 = 408$	$d_8 = 577$	$d_8/l_8 \simeq 1{,}4142156\ldots$
$l_9 = 985$	$d_9 = 1\,393$	$d_9/l_9 \simeq 1{,}4142131\ldots$
$l_{10} = 2\,378$	$d_{10} = 3\,363$	$d_{10}/l_{10} \simeq 1{,}4142136\ldots$

Los cocientes se aproximan a: $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135\ldots$