# 8 Cinemática (I): cómo se describe el movimiento

## PRESENTACIÓN

La física en Bachillerato se inicia con el estudio del movimiento. La cinemática es una de las partes de la física en la que los conceptos que se introducen resultan más familiares: posición, desplazamiento, velocidad o aceleración. Pero, a la vez, es un tema que introduce desarrollos matemáticos complejos, como el cálculo vectorial o el cálculo de derivadas. De hecho, de su estudio surge la ciencia moderna y la ruptura con dogmatismos y visiones simplistas de la naturaleza.

En la cinemática el alumno puede apreciar la fidelidad con la que el lenguaje matemático describe la naturaleza y desarrollar el uso de expresiones algebraicas y la interpretación de gráficas para la descripción del movimiento.

# 8 Cinemática (I): cómo se describe

## OBJETIVOS

- Adquirir y utilizar los conocimientos básicos del movimiento: posición, velocidad y aceleración, para desarrollar estudios posteriores más específicos.
- Distinguir los conceptos de desplazamiento y posición.
- Comprender el concepto de velocidad media y contrastarlo con el de velocidad instantánea.
- Entender y utilizar las componentes tangencial y normal de la aceleración.
- Expresar diferentes movimientos con lenguaje algebraico.
- Interpretar la gráfica de un movimiento.
- Realizar experimentos sencillos de laboratorio sobre posición y movimiento.
- Aplicar los conocimientos físicos del movimiento a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

## CONTENIDOS

**Conceptos**

- Planteamiento de problemas, elaboración de estrategias de resolución y análisis de resultados.
- Comunicación de información utilizando la terminología adecuada.
- Importancia del estudio de la cinemática en la vida cotidiana y en el surgimiento de la ciencia moderna.
- Sistemas de referencia.
- Magnitudes necesarias para la descripción del movimiento.
- Iniciación del carácter vectorial de las magnitudes que intervienen.

**Procedimientos, destrezas y habilidades**

- Interpretar gráficas.
- Resolver problemas.
- Cambiar de unidades con soltura.
- Elaborar gráficas.

**Actitudes**

- Aprecio de la utilidad de aplicar los contenidos de la unidad en los movimientos que observamos cotidianamente.

# el movimiento

## EDUCACIÓN EN VALORES

**1. Educación vial**

Comprender el movimiento de los móviles permite a los alumnos reflexionar sobre la importancia de la educación vial. La aceleración cambia la velocidad del móvil, pero no de manera instantánea. Respetar los pasos de cebra o semáforos cuando el alumno actúa como peatón, o la distancia de seguridad cuando el alumno actúa de conductor o piloto de motos es importante para controlar los parámetros del movimiento.

**2. Educación cívica**

Respetar la señales de tráfico que previenen trayectorias de movimiento peligrosas ayuda a interiorizar un respeto por la normas de tráfico, pero también se extiende a un respeto en normas cívicas y sociales que la sociedad impone. Además, reafirma la madurez del alumno, que empieza a gestionar su libertad dentro de un marco jurídico y legislativo.

**3. Educación medioambiental**

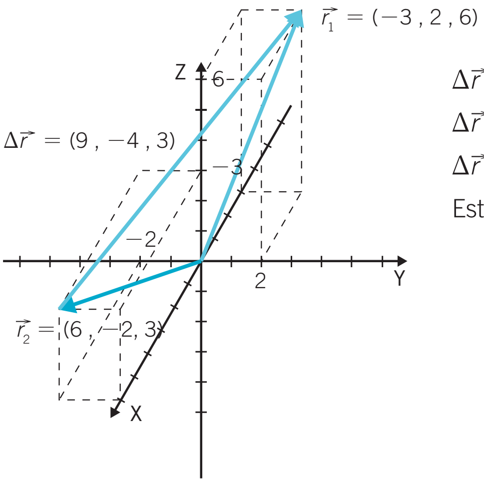
La cinemática es una rama de la física en la que se refleja el movimiento de los objetos de la naturaleza. La comprensión de sus leyes ayuda al alumno a reflexionar sobre la belleza del mundo que le rodea y las leyes que lo describen. Desde el conocimiento de estas leyes nace el respeto y el cuidado del alumno al medio ambiente.

## CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Analizar diferentes aspectos del movimiento y obtener información de ellos mediante estrategias básicas del trabajo científico.
2. Comprender y distinguir los conceptos de desplazamiento y posición, velocidad media e instantánea, aceleración media e instantánea.
3. Utilizar los procedimientos adquiridos en la descomposición vectorial de la aceleración.
4. Resolver problemas sencillos sobre el movimiento.
5. Analizar cualitativamente el movimiento para emitir hipótesis que ayuden a elaborar estrategias. Distinguir y clasificar un movimiento según los valores de su velocidad y aceleración.
6. Realizar trabajos prácticos para el análisis de diferentes situaciones de movimiento e interpretar los resultados.
7. Aplicar estrategias características al estudio del movimiento.

# 8 Cinemática (I): cómo se describe

**1.** **Determina el vector de posición $\vec{r}_1$ de un punto de una trayectoria situado en las coordenadas $(-3 , 2 , 6)$ y el vector $\vec{r}_2$, que con las coordenadas $(6 , -2 , 3)$ determina otro punto. ¿Cuáles serán las coordenadas del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$?**



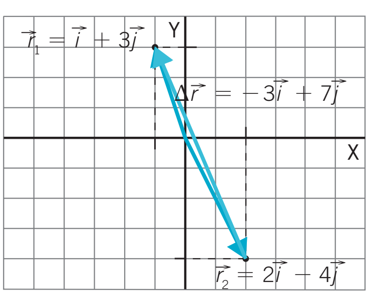

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = (6 , -2 , 3) - (-3 , 2 , 6)$$

$$\Delta\vec{r} = (9 , -4 , -3)$$

Estas son las coordenadas de $\Delta\vec{r}$.

**2.** **Una pelota se desplaza desde el punto 1, $\vec{r}_1 = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ m, hasta el punto 2, $\vec{r}_2 = -\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ m. Calcula la distancia entre los puntos 1 y 2 en metros. ¿Cuáles son los componentes del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$?**




La distancia entre los puntos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ es el módulo del vector $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\Delta\vec{r} = (-\vec{i} + 3\vec{j}\,)\text{ m} - (2\vec{i} - 4\vec{j}\,)\text{ m}$$

En componentes, $\Delta\vec{r} = (-3 , 7)$ m.

Y el módulo, que da la distancia entre $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$:

$$|\Delta\vec{r}\,| = +\sqrt{(-3)^2 + (7)^2}\text{ m} = $$
$$= +\sqrt{58}\text{ m} \simeq 7{,}6\text{ m}$$

**3.** **El vector de posición de una pelota en función del tiempo es:**

$$\vec{r}\,(t) = (3t , 1 , 2t^2)\text{ m}$$

**Calcula el vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ entre los instantes $t_1 = 2$ s y $t_2 = 5$ s.**

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = (3t_2 , 1 , t_2^2)\text{ m} - (3t_1 , 1 , 2t_1^2)\text{ m}$$

Sustituyendo: $t_1 = 2$ s y $t_2 = 5$ s queda:

$$\Delta\vec{r} = (15 , 1 , 50)\text{ m} - (6 , 1 , 8)\text{ m} = (9 , 0 , 42)\text{ m}$$

# el movimiento

**4.** **Los vectores de posición de un móvil en dos instantes $t_1$ y $t_2$ son:**

$$\vec{r}_1 = 6\vec{i} - 4\vec{j} \text{ y } \vec{r}_2 = 6\vec{j}$$

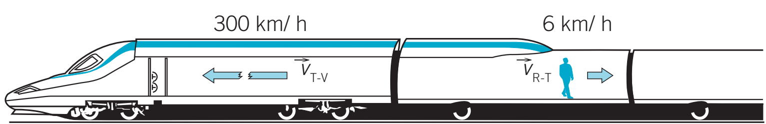
**Calcula el vector desplazamiento D$\vec{r}$.**

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 6\vec{j} - (6\vec{i} - 4\vec{j}) = 6\vec{j} - 6\vec{i} + 4\vec{j} = -6\vec{i} + 10\vec{j}$$

**5.** **El AVE circula a 300 km/h y el revisor se mueve por el pasillo a 6 km/h hacia la cola del tren.**

**a) ¿Hacia dónde se mueve el revisor, hacia la derecha o hacia la izquierda?**

**b) ¿Cuál es su velocidad?**




El término «velocidad» solo tiene sentido con respecto a un determinado sistema de referencia. En nuestro caso, la velocidad del revisor respecto del tren es $\vec{v}_{\text{R-T}}$, de módulo $v_{\text{R-T}} = 6$ km/h.

La velocidad del tren respecto a las vías es $\vec{v}_{\text{T-V}}$, de módulo $v_{\text{T-V}} = 300$ km/h.

Para un observador externo al tren y ligado a las vías, la velocidad del revisor será:

$$\vec{v}_{\text{R-V}} = \vec{v}_{\text{T-V}} - \vec{v}_{\text{R-T}}$$

Suponiendo que el movimiento es rectilíneo, solo necesitamos una coordenada ($x$) y, según la figura:

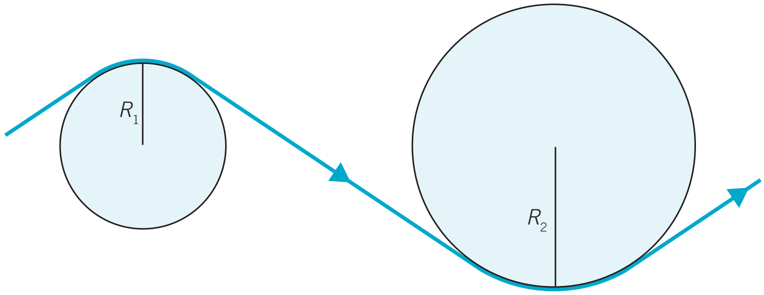
$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_{\text{R-T}} &= -6\,\vec{i} \text{ km/h} \\ \vec{v}_{\text{T-V}} &= +300\,\vec{i} \text{ km/h} \end{aligned}\right\} \vec{v}_{\text{R-v}} = 294\,\vec{i} \text{ km/h}$$

Esto significa que, visto desde la vía, el revisor se mueve en el mismo sentido que el tren, pero solo a 294 km/h.

**6.** **Imagina que te llevan en coche por una curva con forma de arco de circunferencia con velocidad constante. Como te han vendado los ojos y tapado los oídos, solo puedes notar que te estás moviendo porque hay aceleración (si el movimiento fuese uniforme y en línea recta, no te darías cuenta).**

**a) ¿De qué factores puede depender que notes más o menos que el coche está tomando una curva? O, dicho de otra manera, ¿de qué puede depender la aceleración normal de este movimiento circular uniforme?**

**b) ¿Qué magnitudes físicas relacionadas con la trayectoria y la forma de recorrerla influyen en que se note más el cambio de dirección?**




La curva «se notará más» a igualdad de otros factores cuanto más cerrada sea, lo que se mide mediante el parámetro «radio de curvatura», $R$. Cuanto mayor sea $R$ más abierta es la curva y menos se nota.

Por otro lado, si el radio de curvatura es el mismo, la curva se notará más cuanto más rápido se tome. En resumen:

La curva «se nota más» (el cambio de dirección) → Cuanto mayor sea $v$
→ Cuanto menor sea $R$

**7. ¿Qué factor influye más en $a_N$, la velocidad o el radio de la curva? Supón que decides duplicar tu velocidad en una curva (de $v$ a $2v$) y, para compensar, pides al Ministerio de Fomento que haga la curva más abierta, duplicando también su radio (de $R$ a $2R$).**

**a) Calcula la aceleración normal antes y después de duplicar la velocidad.**

**b) Halla los valores numéricos de $a_N$ para una curva de 20 m de radio tomada a 60 km/h y otra de 40 m de radio con $v = 120$ km/h.**

**c) Averigua el valor de $a_N$ para otra curva de 40 m de radio que se toma a una velocidad de 120 km/h. Compara los resultados con los obtenidos en el apartado anterior.**

a) Como la aceleración normal tiene módulo $a_N = \dfrac{v^2}{R}$, al duplicar la velocidad, $a_N = \dfrac{v^2}{R}$ se transforma en $a'_N = \dfrac{(2v)^2}{R} = 4\dfrac{v^2}{R} = 4a_N$, es decir, es cuatro (y no dos) veces mayor.

Sin embargo, al duplicar el radio:

$$a_N = \frac{v^2}{R} \rightarrow a''_N = \frac{v^2}{2R} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{R} = \frac{1}{2}a_N$$

la aceleración normal solo se divide por dos.

# el movimiento

En resumen, si duplicamos simultáneamente la velocidad y el radio de la curva, la aceleración normal aún sería el doble de la inicial.

$$a_N = \frac{v^2}{R} \rightarrow a'''_N = \frac{(2v)^2}{(2R)} = \frac{2v^2}{R} = 2a_N$$

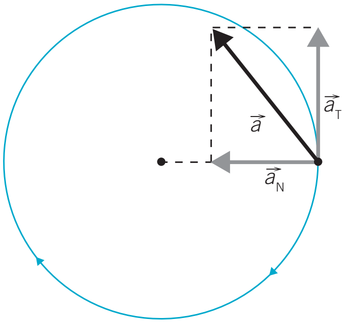
b) $\left.\begin{array}{l} R = 20 \text{ m} \\ v = 60 \text{ km/h} = 17 \text{ m/s} \end{array}\right\} a_N = 14 \text{ m/s}^2$

$\left.\begin{array}{l} R = 40 \text{ m} \\ v = 120 \text{ km/h} = 33 \text{ m/s} \end{array}\right\} a_N = 28 \text{ m/s}^2$

**8.** **¿Podrías adaptar el dibujo del apartado A de la página anterior al caso en que se toma la misma curva, pero frenando?**

Si la curva se toma frenando, el módulo de la velocidad disminuye.

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$




**9.** **Clasifica los siguientes movimientos en una de las categorías anteriores:**

**a) Una estudiante da siete vueltas a ritmo constante a una pista de atletismo.**

**b) Otro estudiante corre una carrera de 100 m.**

**c) Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra en una órbita perfectamente circular a velocidad constante, dando una vuelta completa cada 11 horas.**

**d) Un profesor va todos los días (laborables) a trabajar en tren, recorriendo 35 km en 30 minutos.**

**e) Un autobús recorre un tramo recto de autopista a una velocidad de 90 km/h.**

**f) Movimiento de un punto del tambor de una lavadora cuando esta comienza a centrifugar.**

a) Movimiento uniforme no rectilíneo.
($a_T = 0$; $a_N \neq 0$.)

b) Movimiento rectilíneo no uniforme.
($a_T \neq 0$; $a_N = 0$.)

c) Movimiento (circular) uniforme.
($a_T = 0$; $a_N =$ constante $\neq 0$.)

d) Cabe suponer que se trata de un movimiento general curvilíneo y no uniforme.
($a_T \neq 0$; $a_N \neq 0$.)

e) Movimiento con vector velocidad constante:
$\vec{v}$ = constante, es decir, uniforme y rectilíneo.
($a_T = 0$; $a_N = 0$.)

f) Movimiento circular ($a_N =$ constante $\neq 0$.)
no uniforme ($a_T \neq 0$.)

**10.** **¿Bajo qué condiciones es la velocidad media igual a la velocidad instantánea?**

La velocidad media solo puede ser igual a la instantánea en los movimientos uniformes, es decir, con módulo de la velocidad constante: $v =$ constante.

**11.** **El ganador de una carrera ciclista recorre los últimos 10 m en 0,72 s.**

**a) ¿Cuál es su velocidad media en ese tramo?**

**b) Exprésala en las unidades más comunes en la vida cotidiana (km/h).**

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\ \text{m}}{0{,}72\ \text{s}} = 13{,}9\ \text{m/s} = 13{,}9\ \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1000\ \cancel{\text{m}}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \text{h}} = 50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

**12.** **Se suele elegir la superficie de la Tierra como punto fijo respecto al que medir, pero ¿está realmente quieta la Tierra?**

**a) Calcula la velocidad con que se mueve un punto del ecuador en su giro alrededor del eje. Dato: radio medio de la Tierra: 6370 km.**

**b) Calcula la velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol.**
**Datos: la Tierra está aproximadamente a 8 minutos luz del Sol; $v_{luz} = 300\,000$ km/s.**

**c) ¿Cómo es posible que vayamos a esa velocidad sin enterarnos?**

a) La Tierra hace un giro completo sobre sí misma en un día (esa es la definición de «día»).
La circunferencia de la Tierra en el ecuador es:

$$L \simeq 2\pi R_{\text{Tierra}} \simeq 2\pi \cdot 6370\ \text{km} \simeq 40\,024\ \text{km}$$

Y la velocidad (lineal) de giro $v = \dfrac{L}{1\ \text{día}}$:

$$v_{rot} \simeq \frac{40\,024\ \text{km}}{24\ \text{h}} \simeq 1670\ \text{km/h} \simeq 460\ \text{m/s}$$

b) Y da una vuelta completa alrededor del Sol en un año (esa es, justamente, la definición).

Suponiendo que la órbita fuera circular (solo lo es aproximadamente), tomemos como radio 8 minutos-luz, es decir, el espacio que recorre la luz en 8 minutos a velocidad $c$:

$$R = c \cdot t = 300\,000 \text{ km/s} \cdot 8 \text{ minutos} =$$
$$= 300\,000 \text{ km/s} \cdot 480 \text{ s} = 144\,000\,000 \text{ km}$$

Y la velocidad de traslación de la Tierra es:

$$v_{\text{tras}} = \frac{2\pi R}{1 \text{ año}} \simeq \frac{905\,000\,000 \text{ km}}{365 \cdot 24 \text{ h}} \simeq 103\,000 \text{ km/h} \simeq 29 \text{ km/s}$$

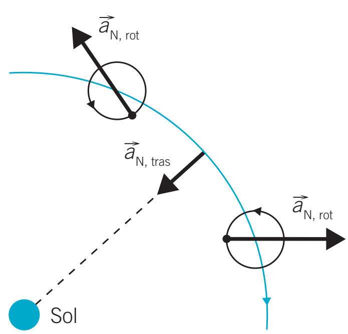
c) Es decir, lejos de estar «inmóviles», tenemos un complicadísimo movimiento en el que se mezclan una rotación a 460 m/s con una traslación a 29 000 m/s y aún otros movimientos en la galaxia…

¿Por qué no los notamos? En realidad nunca notamos la velocidad por sí misma (¿respecto a qué?), sino la aceleración. Calculemos las aceleraciones correspondientes a esos dos movimientos circulares:

$$a_{\text{N, rot}} = \frac{v^2_{\text{rot}}}{R_{\text{T}}} = 0{,}03 \text{ m/s}^2$$

$$a_{\text{N, tras}} = \frac{v^2_{\text{tras}}}{R_{\text{T}}} = 0{,}006 \text{ m/s}^2$$

Tanto estas dos como otras que no hemos tenido en cuenta son muy pequeñas y no tienen por qué sumarse sus módulos (para ello habrían de coincidir direcciones y sentidos).




**13.** **Contesta:**

**a) ¿Es posible que un movimiento uniforme tenga aceleración? Pon ejemplos.**

**b) ¿Es posible que un cuerpo tenga velocidad cero y aceleración distinta de cero? ¿Y al contrario? Pon ejemplos en los que se dé esta situación.**

a) Por supuesto que sí. Uniforme quiere decir que tiene módulo de la velocidad constante ($v$ = constante, $a_{\text{T}} = 0$).

Pero aunque la aceleración tangencial sea nula, la aceleración normal puede muy bien no serlo.

Cualquier trayectoria no rectilínea tiene $a_{\text{N}} = 0$, así que cualquier trayectoria no rectilínea recorrida uniformemente tiene aceleración no nula: $a = a_{\text{N}} \neq 0$.

b) Sí es posible que un cuerpo tenga velocidad nula y aceleración no nula. Eso es lo que sucede en el instante en el que se inicia su movimiento. La velocidad es cero, pero el ritmo de cambio de velocidad, aceleración, es distinta de cero y hará que comience el movimiento.

Respecto a velocidad no nula y aceleración nula, solo puede suceder en un caso, en el movimiento rectilíneo ($a_N = 0$) y uniforme ($a_T = 0$).

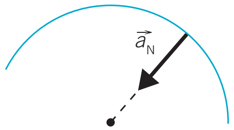
**14. Alicia dice que ha visto moverse un avión en línea recta a 980 km/h. Benito, por su parte, sostiene que el avión estaba inmóvil. ¿Es posible que se refieran al mismo avión? ¿Cómo?**

Por supuesto, la velocidad es un concepto relativo, que depende del sistema de referencia utilizado.

Alicia está usando un sistema de referencia ligado al suelo, por ejemplo, mientras Benito prefiere emplear otro ligado al avión (y, claro, la velocidad del avión respecto de sí mismo es cero).

Eso puede parecer absurdo en la vida cotidiana, pero no en la física, donde la libertad y conveniencia de elegir diferentes sistemas es muy importante.

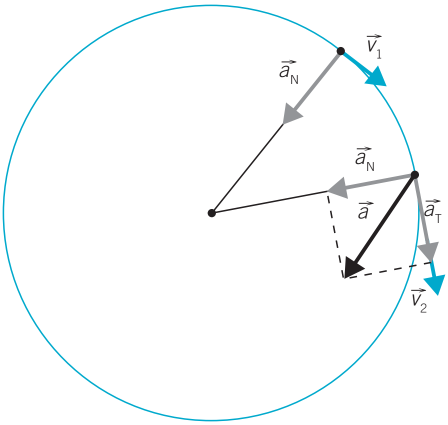
**15. ¿Qué dirección tiene la aceleración de un cuerpo que se mueve en una circunferencia con el módulo de la velocidad constante?**




Está dirigida hacia el centro de la circunferencia. Como el movimiento es uniforme $a_T = 0$, así que la aceleración es puramente normal, $\vec{a} = \vec{a}_N$.

**16. Un cuerpo se mueve con movimiento circular y uniformemente acelerado. Dibuja en un punto cualquiera de la trayectoria los vectores velocidad, aceleración tangencial, aceleración normal y aceleración total.**

Respuesta gráfica:

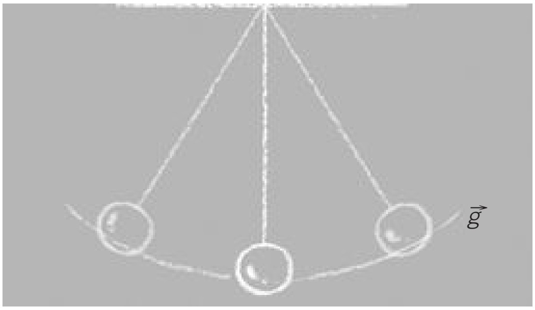


# el movimiento

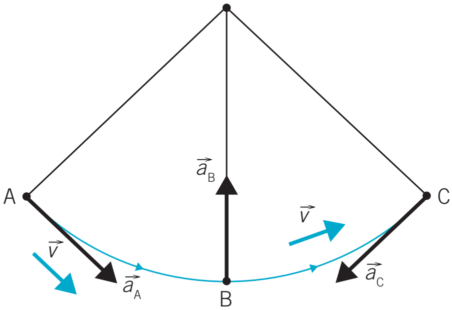
**17.** **Un péndulo oscila en un plano vertical.**

**a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración en el punto medio del recorrido?**

**b) ¿Y en los extremos? (Recuerda que $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$ y piensa cómo es la velocidad en cada uno de esos puntos: al soltar la masa en un extremo desde el reposo, va cada vez más deprisa hasta el punto más bajo y luego se frena hasta pararse en el otro extremo.)**




Convendrá analizar cualitativamente el movimiento del péndulo desde que lo soltamos, por ejemplo, en A hasta que se para en el punto C.

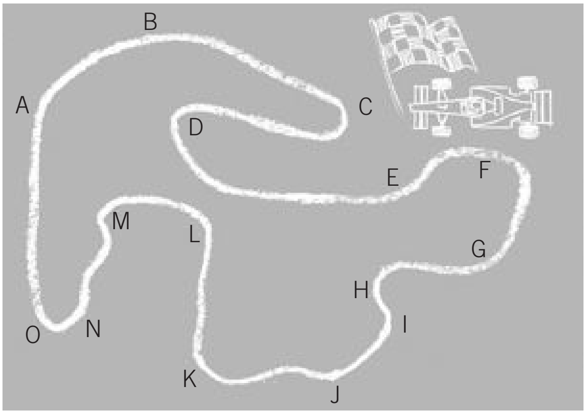



Al principio $v_A = 0$. Está parado, de modo que $a_{NA} = 0$ (no puede tener aceleración normal si no se está moviendo). Sí tiene aceleración tangencial y está dirigida hacia B, pues en tal sentido va a aumentar el vector velocidad.

Desde A hacia B el péndulo se mueve cada vez más deprisa, siendo B el punto más rápido; y de B a C frena, de modo que su aceleración tangencial tiene que cambiar de sentido en B, es decir, $a_{TB} = 0$. Pero en B sí hay aceleración normal, pues el movimiento es circular y $v_B \neq 0$. Esto quiere decir que $\vec{a}_B = \vec{a}_{NB}$, dirigida hacia el centro de la trayectoria.

En el punto C, de nuevo $v_C = 0 \rightarrow a_{NC} = 0$ y solo hay aceleración tangencial, la misma que frenaba el movimiento de A a C y ahora lo va a acelerar en el sentido opuesto, de C hacia A.

**18.** **Observa la figura y contesta:**




**a)** **¿Qué lugares de la trayectoria de la figura son imposibles de recorrer sin aceleración?**

**b)** **¿En qué lugares es posible el movimiento uniforme?**

**c)** **¿Dónde puede haber movimiento sin ningún tipo de aceleración?**

**d)** **Dibuja un posible vector velocidad en cinco puntos.**

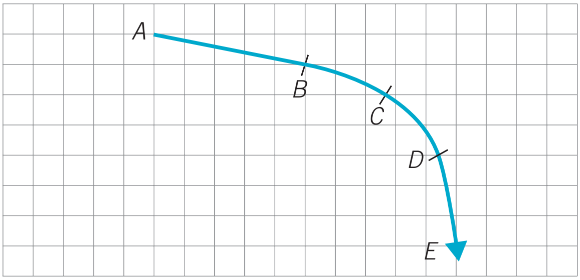
a) Todos los tramos que no sean rectilíneos y aparentemente ninguno de los marcados es rectilíneo.

b) Un movimiento uniforme es posible en cualquier punto de la trayectoria; la forma de la trayectoria no condiciona, en principio, el módulo de la velocidad. Si lo hace en una carretera real es por factores ajenos a la cinemática; un coche real puede salirse de una curva si la toma muy rápido, pero un punto ideal puede recorrer cualquier trayectoria a la velocidad que sea.

c) En las rectas.

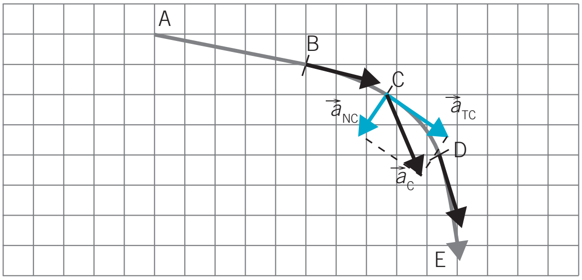
d) Respuesta libre.

**19.** **Se toma una curva como la de la figura (cuyos tramos AB y DE son rectos) manteniendo hasta el punto C una velocidad constante y empezando a acelerar a partir de ahí. Dibuja vectores $\Delta\vec{v}$ apropiados en los puntos B, C y D.**



# el movimiento

**Pista: ¿qué tipos de aceleración hay en cada uno de esos puntos?**

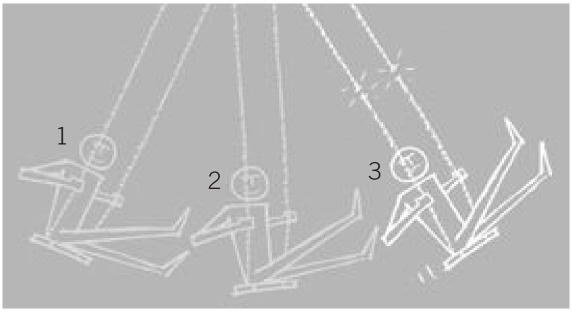



En el punto B la aceleración es tangencial y tiene la dirección de la recta AB (no puede haber aceleración normal ahí).

Algo más complicado es el punto C en el que, además de aceleración tangencial, hay también normal, pues la trayectoria es curva: $\vec{a}_C = \vec{a}_{NC} + \vec{a}_{TC}$. Hay que tener en cuenta que la aceleración normal se dirige al interior de la curva.

En el tramo DE, que es recto, la aceleración vuelve a ser puramente tangencial.

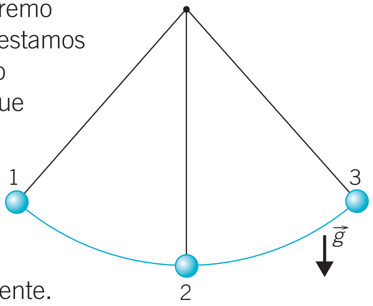
**20.** **La cuerda de un columpio se rompe cuando está en uno de los extremos de su trayectoria (por ejemplo, al punto 3).**




**a) ¿Hacia dónde salimos volando? Justifica gráficamente la respuesta.**

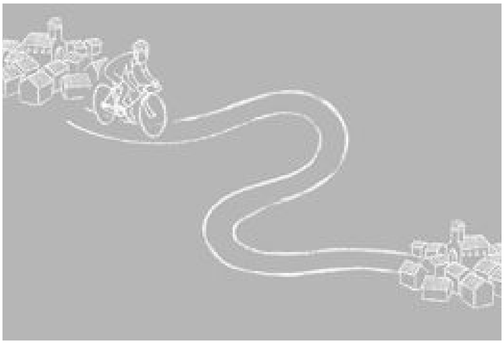
**b) Y antes de haberse roto, ¿había aceleración tangencial en los extremos del movimiento? Justifica la respuesta y dibuja las dos componentes de la aceleración –cuando existan– en los tres puntos de la figura.**

a) ¿Qué velocidad tenemos en el extremo (3) de la trayectoria? $v_3 = 0$, ¡ahí estamos parados! Si se rompe la cuerda no nos vamos a quedar quietos porque lo que sí hay es aceleración, la aceleración de la gravedad, «$\vec{g}$», que es la que actúa sobre nosotros cuando ya no estamos ligados al columpio haciendo que caigamos verticalmente.



b) Ya ha sido respondida en la cuestión 17 (siempre que tratemos al columpio igual que un péndulo ignorando –lo que en muchos casos no basta– que en el columpio no hay un punto, sino un cuerpo extenso cuya posición cambia…)

**21.** **Óscar va a visitar a su amigo en bicicleta desde su pueblo hasta un pueblo próximo que se encuentra a 10 km.**

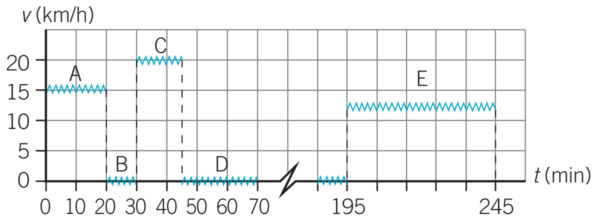


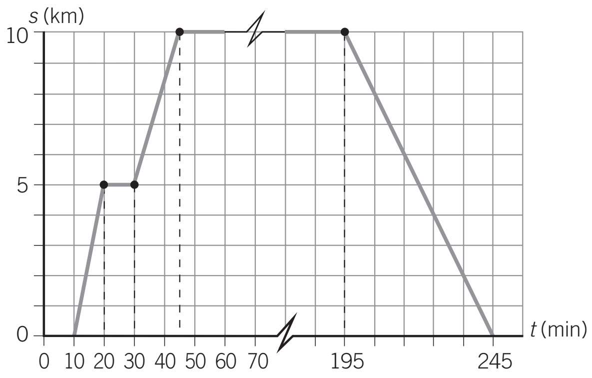
- **Parte de su casa a las 8 h 15 min de la mañana con una velocidad de 15 km/h.**
- **A los 20 minutos de la salida hace un descanso de 10 minutos y después continúa pedaleando, pero ahora, más deprisa, con una velocidad de 20 km/h, hasta que llega a casa de su amigo.**
- **Una vez allí se queda hasta las 11 m 30 min, momento en el que emprende la vuelta a su casa con una velocidad constante de 12 km/h.**

**a) Representa el movimiento de ida y vuelta de Óscar en una gráfica *s*-*t*.**

**b) ¿Qué tipo de movimiento ha llevado?**

a) Aunque el enunciado no lo pida, haremos también la gráfica *v*-*t*.



# el movimiento

b) A: En los primeros 20 minutos a $v_A = 15$ km/h recorre:

$$d_A = 15\,\frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1}{3}\,\cancel{\text{h}} = 5\text{ km}\left(20\text{ min} = \frac{1}{3}\text{ h}\right)$$

B: Luego está parado 10 min.

C: Reanuda la marcha a 20 km/h hasta recorrer los restantes $d_C = 5$ km.

Tarda $\Delta t_C = \dfrac{d_C}{v_C} = \dfrac{5\text{ km}}{20\text{ km/h}} \rightarrow \Delta t_C = \dfrac{1}{4}\text{ h} = 15$ min.

D: Parado desde las 9 hasta las 11:30 (8:15 + 0:20 + 0:10 + 0:15 = = 9:00).

E: Recorre los 10 km de vuelta a $v_E = 12$ km/h en un tiempo:

$$\Delta t_E = \frac{10\text{ km}}{12\text{ km/h}} = \frac{5}{6}\text{ h} = 50\text{ min}$$

**22. El vector de posición de un cuerpo viene dado por la expresión:**

$$\vec{r}(t) = (t,\ t^2 + 1,\ 0)$$

**con *t* en segundos y *r* en metros.**

**a) ¿En qué región del espacio se mueve, en un plano, en una recta...?**

**b) Calcula la posición en $t = 2$ s y en $t = 2{,}5$ s.**

**c) Calcula la velocidad media entre ambos instantes.**

**d) Deduce la ecuación de la trayectoria.**

a) El movimiento es en un plano, pues una de las tres coordenadas tiene un valor constante. Se trata del plano $z = 0$ (plano x-y)

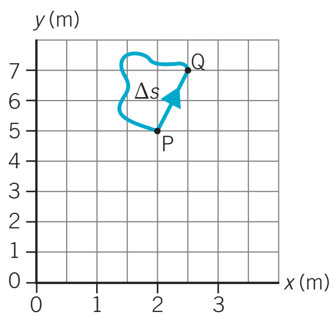
A partir de ahora nos basta trabajar con el vector bidimensional:

$$\vec{r}(t) = (t\,,\ t^2 + 1)\text{ unidades del SI}$$

b) $\vec{r}\,(t = 2\text{ s}) = (2\,,\ 5)$ m (P)

$\vec{r}\,(t = 2{,}5\text{ s}) = (2{,}5\,,\ 7{,}25)$ m (Q)

c) No podemos calcular la velocidad media si no sabemos cómo es la trayectoria entre ambos puntos, ya que no conocemos la distancia recorrida. Podría ser una línea recta o una trayectoria cualquiera, como la de la figura, o aún más complicada.




Podemos representar algunos puntos intermedios, como los correspondientes a $t = 2{,}1$ s, $t = 2{,}2$ s... o hacer antes el apartado d).

d) Para obtener la ecuación de la trayectoria, fijémonos en que $x = t$ e $y = t^2 + 1 = x^2 + 1$.

Es decir, la ecuación es $y = x^2 + 1$, que no es una recta, sino una parábola.

Ahora volvamos al apartado c) sabiendo que la trayectoria es un arco de parábola. Como no sabemos calcular su longitud, no queda más remedio que aproximarla por una recta, de modo que nos quedaremos cortos en la distancia recorrida ($\Delta s > |\Delta \vec{r}\,|$).

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{|\Delta \vec{r}\,|}{\Delta t}$$

$$\text{Pero } \Delta \vec{r} = \vec{r}\,(t = 2{,}5 \text{ s}) - \vec{r}\,(t = 2 \text{ s}) =$$
$$= (0{,}5\ ,\ 2{,}25) \text{ m} \rightarrow$$
$$\rightarrow |\Delta \vec{r}\,| = \sqrt{(0{,}5)^2 + (2{,}25)^2} \text{ m} = 2{,}3 \text{ m}$$

$$v_{\text{media}} = \frac{|\Delta \vec{r}\,|}{\Delta t} = \frac{2{,}3 \text{ m}}{0{,}5 \text{ s}} = 4{,}6 \text{ m/s}$$

La velocidad media real es mayor que 4,6 m/s porque el espacio recorrido es de más de 2,3 m.

**23. La lanzadera espacial alcanza en el despegue una aceleración de hasta 3*g* (tres veces el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre). ¿Cuánto tiempo tardaría en alcanzar, a ese ritmo, la velocidad de la luz, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s? Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

Suponiendo que su movimiento sea uniformemente acelerado, la ecuación de la velocidad sería:

$$v = v_0 + a_T t$$

Si la física clásica fuera válida para velocidades comparables con la de la luz (que no lo es) y se pudiera mantener la aceleración constante $a_T = 3\,g \simeq 29{,}4$ m/s² el tiempo suficiente, la velocidad de la luz en el vacío, «$c$», se alcanzaría en un tiempo $t_C$ tal que:

$$c = 0 + 3gt_C \rightarrow t_C = \frac{c}{3g} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} \simeq 10{,}2 \cdot 10^6 \text{ s} \simeq 118 \text{ días}$$

**24. En algunos países, las normas que regulan la deceleración que debe sufrir un coche para que salten los *airbag* han pasado desde valores próximos a los 25*g* (es decir, unas 25 veces el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra o $a \approx -250$ m/s²) hasta los 60*g* que hacen falta hoy día. (La razón está en la peligrosidad del propio dispositivo.)**

**a) ¿A qué velocidad inicial hay que ir para alcanzar esa nueva aceleración (negativa) cuando un coche choca y se detiene bruscamente en 0,1 s?**

**b) ¿Cuál es, entonces, la aceleración mínima a la que salta el *airbag*?**

# el movimiento

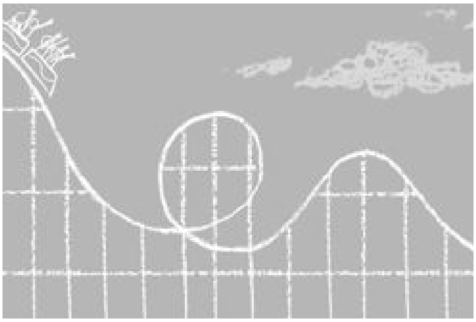
a) Si suponemos que la aceleración es constante, $v = v_0 + a_T t$, que en nuestro caso (de frenado hasta $v = 0$) es $0 = v_0 - a_T \cdot t_F \rightarrow$ $\rightarrow v_0 = a_T t_F$ con $t_F = 0{,}1$ s y $a_T = 60\ g$:

$$v_0 = 60 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}1\ \text{s} \simeq 59\ \text{m/s} \simeq 212\ \text{km/h}$$

b) Debe quedar claro que el *airbag* no salta porque se supere ninguna velocidad, sino que es sensible a la aceleración.

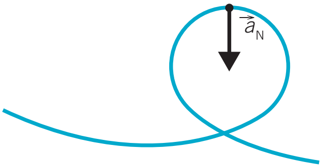
$$a_{\text{mín}} = 60 \cdot g = 60 \cdot 9{,}8 = 588\ \text{m/s}^2$$

**25. Los fabricantes de una montaña rusa que tiene un tramo en el que podemos viajar cabeza abajo (ver figura inferior) nos aseguran que en dicho tramo la aceleración normal vale 2*g*, es decir, $a_N \approx 2 \cdot 9{,}8$ m/s².**



**a) Si en ese punto se mide para los carritos una velocidad de 50 km/h, ¿cuánto vale el radio de la curva?**

**b) Dibuja el vector $\vec{a}_N$.**




$$a_N = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_N}$$

En este caso $R = \dfrac{(50\ \text{km/h})^2}{2\ g}$

Pero $2\ g \simeq 19{,}6$ m/s²; y 50 km/h $\simeq 13{,}9$ m/s. Por tanto: $R = 9{,}8$ m.

Nota: $\vec{a}_N$ es perpendicular a la tangente a la trayectoria.

**26. En el instante $t_1 = 0$ h 47 min 27 s, la posición de un cuerpo es $\vec{r}_1 = (2\ ,\ 6\ ,\ -3)$ m.**

**Una décima de segundo después, en $t_2 = 0$ h 47 min 27,1 s.**

**La posición es $\vec{r}_2 = (2{,}2\ ,\ 5{,}9\ ,\ -3{,}3)$ m.**

**a) Calcula el desplazamiento ($\Delta\vec{r}$).**

**b) Calcula la velocidad media, *v*, si es posible.**

En términos estrictos (ver problema 23) no se puede calcular el espacio recorrido $\Delta s$, sino solo el desplazamiento $|\Delta\vec{r}\,| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, pero como el intervalo de tiempo es pequeño en comparación con las magnitudes del problema, el error cometido será pequeño y podremos hacer la aproximación.

Tenemos:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (0{,}2\ ,\ -0{,}1\ ,\ -0{,}3)\ \text{m}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(0{,}2)^2 + (-0{,}1)^2 + (-0{,}3)^2\ \text{m}} \simeq 0{,}37\ \text{m}$$

$$\Delta t = 0{,}1\ \text{s}$$

Con lo que la velocidad media aproximada será:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \simeq \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{0{,}37\ \text{m}}{0{,}1\ \text{s}} = 3{,}7\ \text{m/s}$$

**27.** **Para un cierto movimiento en el plano:**

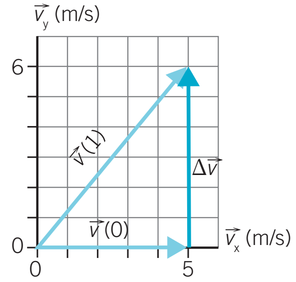
$$\vec{v}(t) = (5,\ 6t)\ \text{m/s}$$

**a) Representa gráficamente los vectores velocidad en $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$ s, así como el vector variación de velocidad $\vec{v}$. ¿Es paralelo o perpendicular a la velocidad inicial?**

**b) Calcula el vector aceleración media en ese intervalo de tiempo y di cuánto vale su módulo.**

- $\vec{v}(t = 0) = (5\ ,\ 0)$ m/s.
- $\vec{v}(t = 1\ \text{s}) = (5\ ,\ 6)$ m/s.

$\Delta\vec{v} = \vec{v}(1\ \text{s}) - \vec{v}(0) = (5\ ,\ 6)\ \text{m/s} - (5\ ,\ 0)\ \text{m/s} \rightarrow \Delta\vec{v} = (0\ ,\ 6)\ \text{m/s}$




$\Delta\vec{v}$, la variación de la velocidad, es perpendicular a la velocidad inicial.

La aceleración media en ese intervalo será:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(0{,}6)\ \text{m/s}}{1\ \text{s}} = (0\ ,\ 6)\ \text{m/s}^2$$

Y el módulo es $|\vec{a}_m| = 6\ \text{m/s}^2$ (solo tiene un componente).

**28.** **Un móvil se mueve según la siguiente ley de movimiento:**

$$\vec{r}_2(t) = (t\ ,\ 2 + t\ ,\ t^2) \quad \text{unidades SI}$$

**Calcula el vector velocidad media durante los 10 primeros segundos.**

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},\ \text{pero}\ \Delta\vec{r} = \vec{r}(t = 10\ \text{s}) - \vec{r}(t = 0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta\vec{r} = (10\ ,\ 12\ ,\ 100)\ \text{m} - (0\ ,\ 2\ ,\ 0)\ \text{m} = (10\ ,\ 10\ ,\ 100)\ \text{m}$$

# el movimiento

Como $\Delta t = 10$ s:

$$\vec{v}_m = \frac{(10\ ,\ 10\ ,\ 100)\ \text{m}}{10\ \text{s}} = (1\ ,\ 1\ ,\ 10)\ \text{m/s} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_m = \sqrt{1^2 + 1^2 + 10^2} \simeq 10{,}1\ \text{m/s}$$

**29.** **Calcula la aceleración tangencial media de un vehículo que circula a 72 km/h y se detiene en 4 s.**

$$a_{TM} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 72\ \text{km/h}}{4\ \text{s}} = \frac{-20\ \text{m/s}}{4\ \text{s}} = -5\ \text{m/s}^2$$

Siendo $\Delta v = v_{\text{final}} - v_{\text{inicial}}$.

**30.** **Un tren de cercanías es capaz de detenerse completamente en 29 s cuando va a su velocidad máxima de 120 km/h.**

**a) ¿Cuál es su aceleración tangencial media?**

**b) ¿Cuánto tardará en alcanzar esa misma velocidad máxima si al arrancar mantiene una aceleración tangencial constante de 0,7 m/s²?**

a) $a_{TM} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0 - 120\ \text{km/h}}{29\ \text{s}} = \dfrac{-33{,}3\ \text{m/s}}{29\ \text{s}} = -1{,}15\ \text{m/s}^2$

b) La ecuación de la velocidad para el movimiento uniforme acelerado es:

$$v = v_0 + a_T t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{v - v_0}{a_T} = \frac{120\ \text{km/h} - 0}{0{,}7\ \text{m/s}^2} \simeq \frac{33{,}3\ \text{m/s}}{0{,}7\ \text{m/s}^2} \simeq 47{,}6\ \text{s}$$

**31.** **¿Cómo es un movimiento en el que solo haya aceleración tangencial?**

**Pista: en este caso, $\vec{v}$, que es un vector, solo cambia en módulo, no en dirección.**

**¿Qué características de este vector permanecen constantes?**

Si la aceleración normal es nula ($a_N = 0$), el movimiento es rectilíneo.

El vector velocidad tiene dirección constante, claro.

# NOTAS