8 CINEMÁTICA. MOVIMIENTOS CIRCULARES Y OSCILATORIOS

Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

2 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME, MCU

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) **CE.6.4.** (EA.6.4.1.) **CE.6.6.** (EA.6.6.1.)

Página 223

1 La ecuación vectorial del MCU es: $\vec{r}(t) = R \cdot [\cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} + \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \vec{j}]$ con ω constante. Obtén los vectores velocidad y aceleración, y sus módulos.

La velocidad es la derivada respecto al tiempo del vector posición:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -R \cdot \omega \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} + \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{j}]$$

La aceleración es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -R \cdot \omega^2 \cdot [\cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} - \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \vec{j}]$$

Para calcular los módulos se tiene en cuenta que:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t))^2 + (R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))^2} = R \cdot \omega$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t))^2 + (-R \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t))^2} = R \cdot \omega^2$$

2 Folio giratorio en grupo. **Un móvil describe un MCU de 30 cm de radio a 10 m/s. Calcula:**

a) La velocidad angular (en rad/s y rpm).

b) El período y la frecuencia.

c) El número de vueltas que da en 15 minutos.

d) La aceleración.

En **anayaeducacion.es** puede consultar el documento que explica cómo utilizar la técnica de aprendizaje cooperativo «Folio giratorio en grupo», propuesta para resolver este ejercicio.

a) La velocidad angular será:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{10 \text{ m/s}}{0,30 \text{ m}} = 33,33 \text{ rad/s} \rightarrow \omega = 33,33 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 318,3 \text{ rpm}$$

b) El período, conocida la velocidad angular, lo calculamos como:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{33,33 \text{ rad/s}} = 0,19 \text{ s}$$

La frecuencia será el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = 5,30 \text{ Hz}$$

c) El número de vueltas en 15 min se obtiene al multiplicar por la velocidad angular (en rpm):

$$N = 318,3 \text{ rpm} \cdot 15 \text{ min} = 4\,774,5 \text{ vueltas}$$

d) La aceleración, al ser un MCU, corresponde a la aceleración normal:

$$a = a_n = \omega^2 \cdot R = (0,33 \text{ rad/s})^2 \cdot 0,30 \text{ m} = 333,3 \text{ m/s}^2$$

3 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO, MCUA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.4. (EA.6.4.1.) CE.6.6. (EA.6.6.1.)

Página 225

3 Justifica la equivalencia entre rpm y rad/s.

Una revolución, o una vuelta, corresponde a 2 · π rad, y 1 min, a 60 s. Por tanto, la equivalencia será:

$$1 \text{ rpm} = \frac{1 \text{ revolución}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s}$$

4 Solución a cuatro. La velocidad angular de un disco disminuye uniformemente de 700 rpm a 500 rpm en 7 s.

Calcula:

a) Su aceleración angular.

b) El número de vueltas que da en ese tiempo.

c) El tiempo necesario para que, desde este momento, el disco se detenga.

Le sugerimos que recomiende a su alumnado la consulta del documento que explica cómo aplicar la técnica «Solución a cuatro», disponible en **anayaeducacion.es**.

a) Se trata de un MCUA. En primer lugar, expresamos las velocidades angulares en rad/s aplicando los factores de conversión correspondientes:

$$\omega_0 = 700 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ revolución}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 73{,}3 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 500 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ revolución}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 52{,}4 \text{ rad/s}$$

Por tanto, la aceleración angular será:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{52{,}4 \text{ rad/s} - 73{,}3 \text{ rad/s}}{7 \text{ s}}$$

$$\alpha = -2{,}99 \text{ rad/s}^2$$

b) El ángulo barrido en estas condiciones es:

$$\Delta\phi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 73{,}3 \text{ rad/s} - \frac{1}{2} \cdot 2{,}99 \text{ rad/s}^2 \cdot (7 \text{ s})^2$$

$$\Delta\phi = 439{,}84 \text{ rad}$$

Sabiendo que una vuelta corresponde a 2 · π rad, el número de vueltas en este caso será:

$$N = \Delta\phi \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 439{,}84 \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2 \cdot \pi \text{ rad}}$$

$$N = 70 \text{ vueltas}$$

c) El tiempo necesario para que el disco se detenga, es decir, para que su velocidad angular final sea cero, se obtiene despejando en la ecuación de la velocidad angular en función del tiempo en un MCUA. Es decir:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

$$t = \frac{-52{,}3 \text{ rad/s}}{-2{,}99 \text{ rad/s}^2} = 17{,}5 \text{ s}$$

5 **La velocidad de una rueda de 40 cm de diámetro pasa de 240 rpm a 600 rpm en 10 s. Si ha estado sometida a una aceleración constante, calcula el valor de sus aceleraciones angular y tangencial.**

Se trata de un MCUA. En primer lugar, pasamos las velocidades angulares a rad/s:

$$\omega_0 = 240 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 25{,}13 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 600 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 62{,}83 \text{ rad/s}$$

Así, la aceleración angular será:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{62{,}83 \text{ rad/s} - 25{,}13 \text{ rad/s}}{10 \text{ s}} = 3{,}77 \text{ rad/s}^2$$

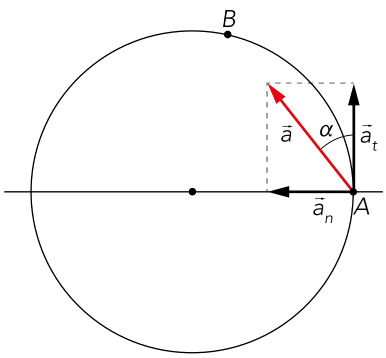
Y la aceleración tangencial:

$$a_t = \alpha \cdot R = 3{,}77 \text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}2 \text{ m} = 0{,}75 \text{ m/s}^2$$

6 **Una partícula describe una circunferencia de 25 cm de radio, aumentando su celeridad de forma constante. En un punto *A* de la trayectoria, la velocidad es de 1 m/s, y en otro, *B*, de 2 m/s.**

Si el tiempo que tarda en llegar de *A* a *B* es de 0,5 s, determina el módulo, la dirección y el sentido del vector aceleración en el punto *A*.

El movimiento que sigue la partícula es circular uniformemente acelerado, y se puede representar como:



La velocidad angular de la partícula en cada una de las posiciones es:

$$\omega_A = \frac{v_A}{R} = \frac{1 \text{ m/s}}{0{,}25 \text{ m}} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = \frac{2 \text{ m/s}}{0{,}25 \text{ m}} = 8 \text{ rad/s}$$

A partir de estos resultados, obtenemos su aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_B - \omega_A}{t} = \frac{8 \text{ rad/s} - 4 \text{ rad/s}}{0{,}5 \text{ s}} = 8 \text{ rad/s}^2$$

Por otro lado, la aceleración tangencial será la misma en todos los puntos de la trayectoria:

$$a_t = \alpha \cdot R = 8 \text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}25 \text{ m} = 2 \text{ m/s}^2$$

Y la aceleración normal en el punto *A* es:

$$a_{n_A} = \omega_A^2 \cdot R = (4 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}25 \text{ m} = 4 \text{ m/s}^2$$

Así, podemos calcular la aceleración lineal en el punto A:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(2\ \text{m/s})^2 + (4\ \text{m/s})^2} = 4{,}47\ \text{m/s}^2$$

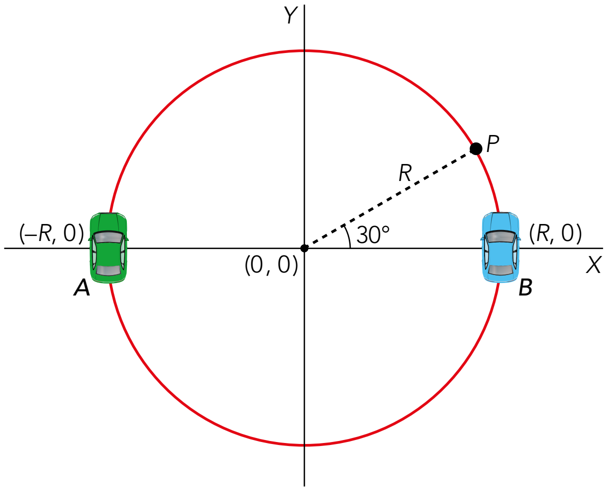
Una vez se ha calculado el módulo de la aceleración lineal, se procede al cálculo del ángulo alfa. De la figura:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \alpha = 63{,}43°$$

7 **Dos móviles, *A* y *B*, inicialmente en reposo, se encuentran, respectivamente, en las posiciones (–*R*, 0) y (*R*, 0). Simultáneamente comienzan a recorrer una circunferencia de radio *R*, haciéndolo *A* en sentido horario y aceleración angular α_1, y *B* en sentido antihorario con aceleración angular α_2:**

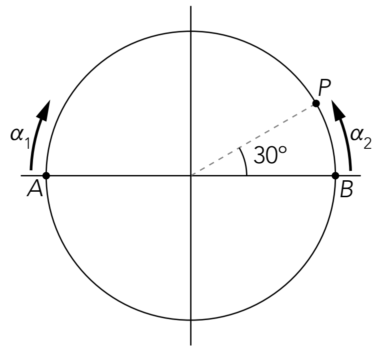
a) ¿Qué relación debe haber entre α_1 y α_2 para que se encuentren en un punto *P*, cuyo vector posición forma un ángulo de 30° con el semieje positivo *X*?

b) ¿Qué velocidad lineal tendrá cada móvil en ese instante, si α_1 = 0,5 rad/s²?



a) Los dos móviles describen un MCUA. El esquema de ambos movimientos es el que se muestra a continuación, a la derecha, y el ángulo de barrido de cada uno de los móviles es:

$$\Delta\phi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \begin{cases} \Delta\phi_1 = 150° = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot t^2 \\ \Delta\phi_2 = 30° = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot t^2 \end{cases}$$



Dividiendo ambas expresiones, obtenemos la relación entre las aceleraciones angulares de ambos móviles:

$$\frac{\Delta\phi_1}{\Delta\phi_2} = \frac{150°}{30°} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot t^2} \rightarrow 5 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

b) Conocida una de las aceleraciones angulares, despejamos el tiempo que tardan en llegar al punto P:

$$\Delta\phi_1 = 150° \cdot \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{360°} = 2{,}62\ \text{rad}$$

$$\Delta\phi_1 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\phi}{\alpha_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}62\ \text{rad}}{0{,}5\ \text{rad/s}^2}} = 3{,}23\ \text{s}$$

Así, podemos calcular las velocidades angulares de cada uno. Al multiplicar esta por el radio de la circunferencia, obtenemos la velocidad lineal:

$$\omega_1 = \alpha_1 \cdot t = 0{,}5\ \text{rad/s}^2 \cdot 3{,}23\ \text{s} = 1{,}62\ \text{rad/s}$$

$$v_1 = \omega_1 \cdot R = 1{,}62 \cdot R\ \text{m/s}$$

$$\omega_2 = \alpha_2 \cdot t = \frac{\alpha_1}{5} \cdot t = 0{,}1\ \text{rad/s}^2 \cdot 3{,}23\ \text{s} = 0{,}32\ \text{rad/s}$$

$$v_2 = \omega_2 \cdot R = 0{,}32 \cdot R\ \text{m/s}$$

4 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.9. (EA.6.9.1.-6.9.2.-6.9.3.-6.9.4.-6.9.5.-6.9.6.)

Página 228

8 El movimiento de un oscilador armónico simple, en unidades del SI, viene dado por la expresión:

$$\mathbf{x\,(t) = 0{,}5 \cdot sen\,(0{,}2 \cdot t)}$$

Determina la amplitud, el período y la frecuencia de las oscilaciones. ¿Dónde se encuentra el móvil en *t* = 0?

Conocida la ecuación del movimiento, diremos que, a partir de ella, la amplitud y la frecuencia angular son:

$$x\,(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t)$$

$$x\,(t) = 0{,}5 \cdot \text{sen}\,(0{,}2 \cdot t)$$

$$A = 0{,}5\ \text{m} \qquad \omega = 0{,}2\ \text{rad/s}$$

El período tendrá un valor de:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{0{,}2\ \text{rad/s}} = 10 \cdot \pi\ \text{s}$$

Y la frecuencia será el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}03\ \text{Hz}$$

Sustituyendo $t = 0$ s en la ecuación del movimiento, su posición será:

$$x\,(t = 0\ \text{s}) = 0{,}5 \cdot \text{sen}\,0 = 0$$

9 En un MAS la velocidad máxima es 40 m/s, y la aceleración máxima, 45 m/s². Calcula la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones.

La velocidad y la aceleración máximas vienen dadas por las expresiones:

$$v_{máx} = A \cdot \omega \ ; \ a_{máx} = -A \cdot \omega^2$$

Dividiendo una entre otra, calculamos la frecuencia angular:

$$\frac{a_{máx}}{v_{máx}} = \frac{A \cdot \omega^2}{A \cdot \omega} = \omega = \frac{45\ \text{m/s}^2}{40\ \text{m/s}} = 1{,}125\ \text{rad/s}$$

Y la frecuencia de la oscilación será:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1{,}125\ \text{rad/s}}{2 \cdot \pi\ \text{rad}} = 0{,}18\ \text{Hz}$$

Sustituyendo la frecuencia angular en la ecuación de la velocidad máxima calculamos la amplitud:

$$A = \frac{v_{máx}}{\omega} = \frac{40\ \text{m/s}}{1{,}125\ \text{rad/s}} = 35{,}56\ \text{m}$$

10 Una partícula describe un MAS con un período de 2 s. En el instante inicial se encuentra a 3 cm del origen, acercándose a él a 5 cm/s:

a) Escribe las ecuaciones del movimiento.

b) Calcula la velocidad y aceleración máximas.

c) Determina, para *t* = 0,5 s:

I) El valor de la elongación.

II) La velocidad de la partícula.

III) Su aceleración.

a) Las ecuaciones del movimiento vienen determinadas por las expresiones:

$$\text{Posición: } x(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\text{Velocidad: } v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos\,(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\text{Aceleración: } a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)$$

Para su descripción debemos conocer la amplitud, la frecuencia angular y la fase inicial.

Conocido el período, calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{2\text{ s}} = \pi \text{ rad/s}$$

Si hallamos la posición y la velocidad a $t = 0$ s:

$$x(t=0) = A \cdot \text{sen}\,(\pi \cdot 0 + \phi) = 0{,}03\text{ m} \rightarrow 0{,}03\text{ m} = A \cdot \text{sen}\,\phi$$

$$v(t=0) = A \cdot \pi \cdot \cos\,(\pi \cdot 0 + \phi) = 0{,}05\text{ m/s} \rightarrow 0{,}05\text{ m/s} = A \cdot \pi \cdot \cos\phi$$

Y si dividimos ambas expresiones, deducimos la fase inicial:

$$\frac{0{,}03}{0{,}05} = \frac{A \cdot \text{sen}\,\phi}{A \cdot \pi \cdot \cos\phi} = \frac{1}{\pi} \cdot tg\,\phi \rightarrow tg\,\phi = 0{,}6 \cdot \pi \rightarrow \phi = 1{,}08\text{ rad}$$

Y sustituyendo en la expresión del espacio en función del tiempo, para $t = 0$, tenemos la amplitud:

$$A = \frac{0{,}03\text{ m}}{\text{sen}\,1{,}08} = 0{,}034\text{ m} = 3{,}4\text{ cm}$$

Por tanto, las ecuaciones del movimiento quedan de esta forma:

$$x(t) = 3{,}40 \cdot \text{sen}\,(\pi \cdot t + 1{,}08)\text{ cm}$$

$$v(t) = 10{,}68 \cdot \cos\,(\pi \cdot t + 1{,}08)\text{ cm/s}$$

$$a(t) = -33{,}56 \cdot \text{sen}\,(\pi \cdot t + 1{,}08)\text{ cm/s}^2$$

b) La velocidad y la aceleración serán máximas cuando seno y coseno valgan 1. Estas serán:

$$v_{\text{máx}} = A \cdot \omega = 3{,}4\text{ cm} \cdot \pi\text{ rad/s} = 10{,}68\text{ cm/s}$$

$$a_{\text{máx}} = -A \cdot \omega^2 = -3{,}4\text{ cm} \cdot (\pi\text{ rad/s})^2 = -33{,}56\text{ cm/s}^2$$

c) Sustituyendo en las ecuaciones $t = 0{,}5$ s, obtenemos los valores de posición, velocidad y aceleración:

$$x(t = 0{,}5\text{ s}) = 3{,}4 \cdot \text{sen}\,(\pi \cdot 0{,}5 + 1{,}08) = 1{,}60\text{ cm}$$

$$v(t = 0{,}5\text{ s}) = 10{,}68 \cdot \cos\,(\pi \cdot 0{,}5 + 1{,}08) = -9{,}42\text{ cm/s}$$

$$a(t = 0{,}5\text{ s}) = -33{,}56 \cdot \text{sen}\,(\pi \cdot 0{,}5 + 1{,}08) = -15{,}84\text{ cm/s}^2$$

Página 229

11 **Un móvil describe un MCU (R = 0,5 m, f = 0,2 Hz). En t_0 = 0 se encuentra en la posición más alta de la circunferencia. Escribe las ecuaciones de los MAS que resultan de las proyecciones sobre los ejes *X* e *Y*, y demuestra que el desfase entre ambos MAS es de π/2 (cuando en uno de los movimientos una de las magnitudes es máxima, en el otro es cero, y viceversa).**

Para describir las ecuaciones del MAS resultantes de las proyecciones de *X* e *Y*, la amplitud coincide con el radio que describe el móvil (A = 0,5 m).

La frecuencia angular la calculamos a partir de la frecuencia del MCU:

$$\omega = f \cdot 2 \cdot \pi = 0{,}2\ \text{s}^{-1} \cdot 2 \cdot \pi\ \text{rad} = 1{,}26\ \text{rad/s}$$

Así, las ecuaciones quedan como:

$$x\,(t) = 0{,}5 \cdot \text{sen}\,(1{,}26 \cdot t)\ \text{m}$$

$$y\,(t) = 0{,}5 \cdot \text{sen}\left(1{,}26 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}$$

Se toma ϕ = 0 en el semieje positivo *X*, por tanto, el semieje positivo *Y* tendrá $\phi = \frac{\pi}{2}$. De este modo, también se cumple que si t = 0, $x\,(t)$ = 0 e $y\,(t)$ = 0,5 m, verificando las posiciones iniciales.

El desfase viene determinado por la diferencia en las fases. Si en $x\,(t)$ no hay fase inicial y en $y\,(t)$ es $\frac{\pi}{2}$, podemos decir que el desfase entre ambas es de $\frac{\pi}{2}$. Así, se cumple lo que expone el enunciado: cuando uno de ellos es máximo, el otro es cero.

12 **Demuestra que el período de un MAS coincide con el del MCU del que procede.**

En el MCU, como $v = \omega \cdot R$, tenemos que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v}$$

Para el MAS, como $v = A \cdot \omega$, tenemos que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot A}{v}$$

Por tanto, ambos periodos coinciden, ya que el radio del MCU coincide con la amplitud del MAS.

13 **Sabiendo que el ángulo plano, expresado en radianes, es una magnitud adimensional, analiza la homogenidad de las ecuaciones del MCU y del MAS.**

Para el MCU se demuestra la homogeneidad de sus ecuaciones:

$$\phi - \phi_0 = \omega \cdot t \quad \begin{cases} [\Delta\phi] = 1\ \text{(adimensional)} \\ [\omega \cdot t] = \text{T}^{-1} \cdot \text{T} = 1\ \text{(adimensional)} \end{cases}$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha \cdot t \quad \begin{cases} [\Delta\omega] = \text{T}^{-1} \\ [\alpha \cdot t] = \text{T}^{-2} \cdot \text{T} = \text{T}^{-1} \end{cases}$$

Para el caso de un MAS:

$$x = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)\ ;\ [x] = \text{L}\ ;\ [A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)] = \text{L}$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos\,(\omega \cdot t + \phi)\ ;\ [v] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}\ ;\ [A \cdot \omega \cdot \cos\,(\omega \cdot t + \phi)] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$$

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)\ ;\ [a] = \text{L} \cdot \text{T}^{-2}\ ;\ [-A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)] = \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$$

Debemos recordar que las funciones trigonométricas son adimensionales.

14 Si proyectamos sobre el eje *X* un MCUA, ¿resulta un MAS? El movimiento, ¿es periódico?

Si se proyecta sobre el eje *X* un MCUA, el movimiento resultante no es un MAS, ya que la velocidad angular varía con el tiempo, haciendo que varíen también la frecuencia angular y el período. Por tanto, no se trata de un movimiento periódico.

15 Cuando Galileo observó con su telescopio los satélites de Júpiter, describió el movimiento de estos como oscilatorio. ¿Cómo explicarías esto?

Lo que observó Galileo fue la proyección del movimiento circular de los satélites sobre uno de los diámetros de la circunferencia. De ahí que percibiera un movimiento oscilatorio cuando, en realidad, los satélites describían un movimiento circular alrededor del planeta Júpiter. Galileo fue consciente de este hecho, lo que le llevó a concluir que los satélites orbitaban el planeta.

Estas observaciones se pueden simular fácilmente con el programa Celestia, de acceso libre en Internet.

Su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es**, dentro de los recursos relacionados con las claves del proyecto, la documentación relacionada con el Plan Lingüístico, donde encontrará las características de los textos expositivos así como diversos consejos y orientaciones para escribir este tipo de textos.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.6.4. (EA.6.4.1.) CE.6.6. (EA.6.6.1.) CE.6.7. (EA.6.7.1.) CE.6.9. (EA.6.9.1.-6.9.2.-6.9.3.-6.9.4.-6.9.5.-6.9.6.)

Página 236

Magnitudes cinemáticas angulares

1 **Una partícula describe una trayectoria circular de 2 m de radio. El espacio recorrido sobre la misma viene dado, en unidades del SI, por la expresión $s(t) = t^2 + t + 2$. Calcula, a los 2 s de iniciado el movimiento:**

a) El espacio recorrido.

b) La posición angular y el ángulo barrido.

c) El módulo de las velocidades lineal y angular.

d) El módulo de las aceleraciones tangencial, normal, total y angular.

e) En un dibujo de la trayectoria, representa los vectores velocidad y aceleración, este último a partir de sus componentes intrínsecas.

a) El espacio recorrido será la distancia, medida sobre la trayectoria, entre las posiciones final e inicial:

$$\Delta s = s\,(2\text{ s}) - s\,(0\text{ s}) = 8\text{ m} - 2\text{ m} = 6\text{ m}$$

b) De la relación entre las magnitudes angulares y lineales:

$$\phi\,(t = 2\text{ s}) = \frac{s\,(t = 2\text{ s})}{R} = \frac{8\text{ m}}{2\text{ m}} = 4\text{ rad}$$

Del mismo modo, para el ángulo barrido:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta s}{R} = \frac{6\text{ m}}{2\text{ m}} = 3\text{ rad}$$

c) La velocidad lineal será la derivada del espacio respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot t + 1 = 5\text{ m/s}$$

Su velocidad angular resultará de dividir la velocidad lineal entre el radio:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{5\text{ m/s}}{2\text{ m}} = 2{,}5\text{ rad/s}$$

d) La aceleración tangencial se obtiene de derivar la velocidad lineal respecto al tiempo:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2\text{ m/s}^2$$

La aceleración normal será:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(5\text{ m/s})^2}{2\text{ m}} = 12{,}5\text{ m/s}^2$$

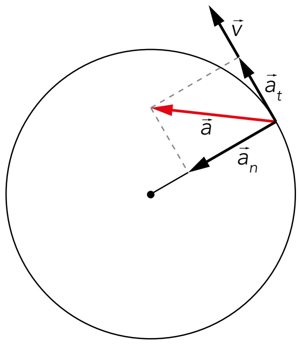
De la aceleración normal y tangencial obtenemos la aceleración total:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(2\text{ m/s}^2)^2 + (12{,}5\text{ m/s}^2)^2} = 12{,}66\text{ m/s}^2$$

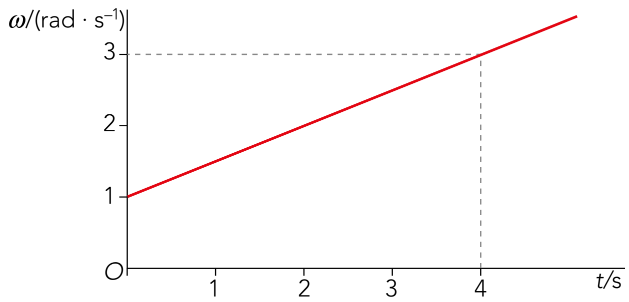
La aceleración angular será la tangencial entre el radio:

$$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{2\text{ m/s}^2}{2\text{ m}} = 1\text{ rad/s}^2$$

e) La representación de la trayectoria de los vectores queda como:



2 **A partir de la siguiente gráfica ω-*t* de un movimiento circular de radio 1,5 m, que parte de $\phi_0 = 0$, calcula la posición angular, la velocidad lineal, las componentes intrínsecas de la aceleración y la aceleración angular en *t* = 2 s. El movimiento, ¿es uniforme, uniformemente acelerado o acelerado? Justifica tu respuesta.**



Como podemos observar, a los 2 s la velocidad angular es ω = 2 rad/s. A su vez, diremos que es un movimiento uniformemente acelerado, ya que gráficamente se comprueba que es una recta con una pendiente constante a lo largo del tiempo y, además, distinta de cero. Así, aplicando las ecuaciones del MCUA, calculamos la aceleración angular considerando *t* = 2 s y *t* = 0 s:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2 \text{ rad/s} - 1 \text{ rad/s}}{2 \text{ s}} = 0{,}5 \text{ rad/s}^2$$

La posición angular para este movimiento, sabiendo que $\phi_0 = 0$, será:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\phi = 1 \text{ rad/s} \cdot 2 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \text{ rad/s}^2 \cdot (2 \text{ s})^2 = 3 \text{ rad}$$

La velocidad lineal será:

$$v = \omega \cdot R = 2 \text{ rad/s} \cdot 1{,}5 \text{ m} = 3 \text{ m/s}$$

Las componentes intrínsecas de la aceleración son:

- Aceleración tangencial:

$$a_t = \alpha \cdot R = 0{,}5 \text{ rad/s}^2 \cdot 1{,}5 \text{ m} = 0{,}75 \text{ m/s}^2$$

- Aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3 \text{ m/s})^2}{1{,}5 \text{ m}} = 6 \text{ m/s}^2$$

3 **La posición angular de un punto *P* de la periferia de una rueda de 50 cm de radio viene dada, en el SI, por la ecuación: $\phi = \pi/4 + 10 \cdot \pi \cdot t + 2 \cdot \pi \cdot t^2$.**

a) Determina la veracidad de las siguientes proposiciones:

1. En t = 2 s, la posición de *P* es $\pi/4$ rad.

2. En t = 2 s, la velocidad angular es $14 \cdot \pi$ rad/s.

3. Entre t = 1 s y t = 3 s la aceleración angular media es $2 \cdot \pi$ rad/s².

b) Para los enunciados falsos, indica los valores correctos de las magnitudes cinemáticas.

c) Representa las gráficas de las magnitudes cinemáticas angulares en función del tiempo.

a) 1. Si sustituimos t = 2 s en la expresión de la posición angular, esta resulta:

$$\phi = \frac{\pi}{4} + 10 \cdot \pi \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 4 = 28{,}25 \cdot \pi \text{ rad}$$

Por tanto, la proposición dada es falsa.

2. La velocidad angular resultará de derivar la posición angular respecto al tiempo:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = 10 \cdot \pi + 4 \cdot \pi \cdot t$$

Para t = 2 s, su valor es:

$$\omega\ (t = 2 \text{ s}) = 10 \cdot \pi + 4 \cdot \pi \cdot 2 = 18 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

Así, la proposición para la velocidad angular es falsa.

3. Para determinar la aceleración se deriva respecto del tiempo la expresión para la velocidad angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 4 \cdot \pi \text{ rad/s}^2$$

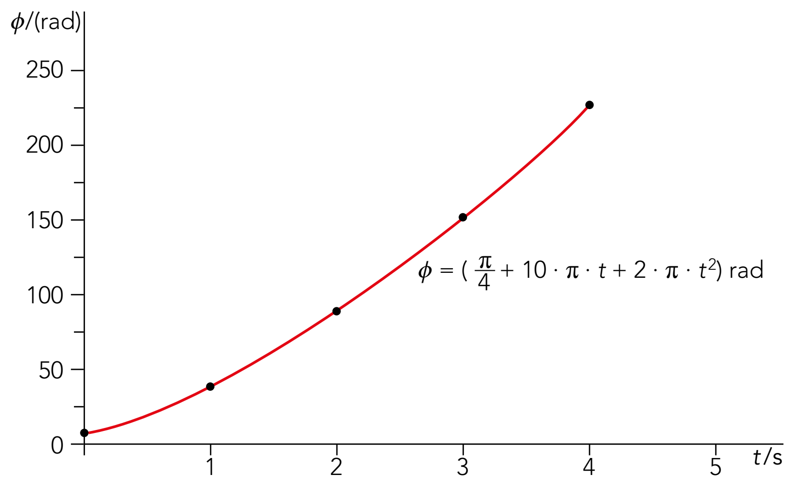
El mismo resultado se obtiene si restamos las velocidades angulares dadas y lo dividimos entre el tiempo:

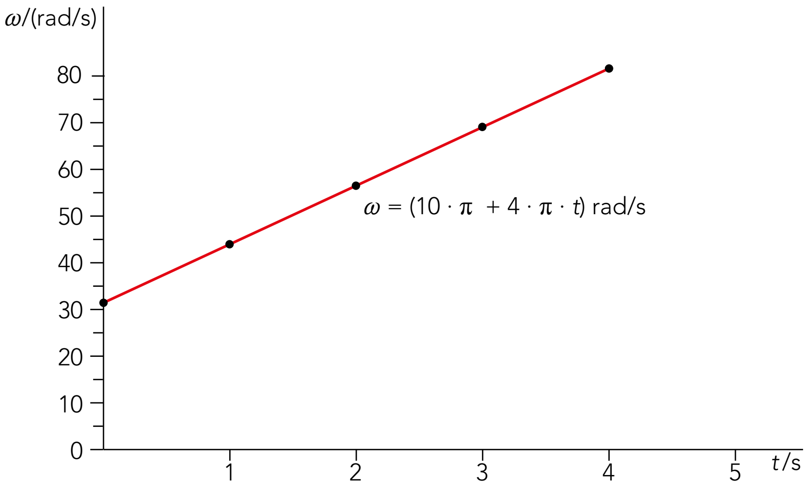
$$\alpha = \frac{\omega\ (3 \text{ s}) - \omega\ (1 \text{ s})}{2 \text{ s}} = \frac{10 \cdot \pi + 4 \cdot \pi \cdot 3 - 10 \cdot \pi - 4 \cdot \pi}{2} = 4 \cdot \pi \text{ rad/s}^2$$

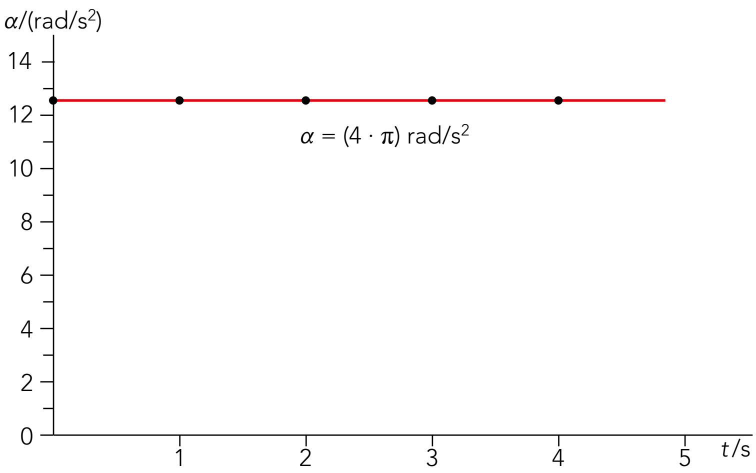
Por tanto, en este caso, la proposición también es falsa.

b) Los valores correctos se han calculado en el apartado anterior.

c) Las gráficas de posición, velocidad y aceleración angulares frente al tiempo son:







4 **En los movimientos circulares la aceleración se calcula, en ocasiones, como $a = \omega^2 \cdot R$, y en otras como $a = \alpha \cdot R$. ¿Se trata de la misma magnitud? ¿En qué casos se ha de utilizar cada una?**

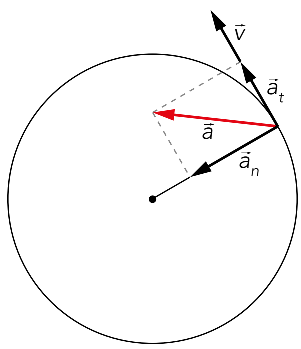
Ambas son aceleraciones para el movimiento circular.

La expresión $a = \omega^2 \cdot R$ corresponde a la aceleración normal y la expresión $a = \alpha \cdot R$ corresponde a la aceleración tangencial. La aceleración normal, o centrípeta, existe en todos los movimiento curvilíneos, pues indica las variaciones en la dirección de la velocidad. En el caso de los MCU es constante. La aceleración tangencial, por su parte, indica las variaciones del módulo de la velocidad, y se tendrá presente en movimientos acelerados.

5 **En un movimiento circular, ¿pueden tener la aceleración y la velocidad la misma dirección? Argumenta tu respuesta de modo gráfico.**

No, pues en un movimiento circular la aceleración siempre tiene componente normal, por lo que al componerla con la tangencial (de existir), el vector aceleración nunca será tangente a la trayectoria, como lo es la velocidad. En el caso del MCU, la aceleración solo tiene componente normal, y es, por tanto, perpendicular al vector velocidad.

En la figura de la derecha se muestra lo descrito para el caso de un movimiento circular acelerado. Como se observa, el vector aceleración es tangente a la trayectoria solo cuando la componente normal de la aceleración es nula, en cuyo caso no se trataría de un movimiento circular, sino rectilíneo.



6 **Cuando se han estudiado las relaciones entre las magnitudes cinemáticas lineales y las angulares se ha visto que, en muchos casos, las primeras se obtienen multiplicando las segundas por el radio de la trayectoria. ¿Esto significa que si el radio es la unidad no hay que diferenciar unas de otras, pues valen lo mismo? Explica tu respuesta.**

Aunque tengan los mismos valores numéricos, el significado de las magnitudes lineales y angulares es distinto. Las primeras expresan relaciones entre longitudes y tiempos, y las segundas, entre ángulos y tiempos.

7 **¿Por qué no se habla de las componentes intrínsecas del vector velocidad?**

El vector velocidad es en todo momento tangente a la trayectoria, por lo que no tiene componente normal.

Movimiento circular uniforme

8 **El CD de un ordenador gira con una velocidad angular de 540 rpm. Calcula el número de vueltas que da durante la reproducción de una canción de 3,5 minutos. ¿Qué espacio ha recorrido un punto de la periferia en este tiempo, si el disco tiene 12 cm de diámetro?**

Para el cálculo del número de vueltas que da el CD, multiplicamos su velocidad angular en rpm por el tiempo que nos da el enunciado:

$$N = \omega \cdot t = 540 \text{ rpm} \cdot 3{,}5 \text{ min} = 1\,890 \text{ vueltas}$$

El espacio recorrido será el perímetro del CD por las vueltas realizadas:

$$\Delta s = N \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = 1\,890 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0{,}06 \text{ m} = 712{,}5 \text{ m}$$

9 **Un disco circular de 1 m de radio gira con velocidad angular de 50 rad/s. Calcula:**

a) La velocidad lineal de un punto de la periferia.

b) La velocidad lineal de un punto situado a 0,5 m del centro.

c) El espacio recorrido por ambos puntos durante un minuto.

a) La velocidad lineal en un punto de la periferia será:

$$v_1 = \omega \cdot R_1 = 50 \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ m} = 50 \text{ m/s}$$

b) La velocidad lineal a 0,5 m del centro es:

$$v_2 = \omega \cdot R_2 = 50 \text{ rad/s} \cdot 0{,}5 \text{ m} = 25 \text{ m/s}$$

c) El espacio recorrido por cada uno de los puntos será:

$$s_1 = v_1 \cdot t = 50 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = 3\,000 \text{ m}$$

$$s_2 = v_2 \cdot t = 25 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = 1\,500 \text{ m}$$

10 **Una partícula describe un movimiento circular de 2 m de radio, de modo que completa 30 vueltas cada minuto. Calcula el período, la frecuencia, la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración.**

La velocidad angular será el número de vueltas por minuto, que en rad/s corresponde a:

$$\omega = 30 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \pi \text{ rad/s}$$

El valor del período será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{\pi \text{ rad/s}} = 2 \text{ s}$$

La frecuencia será el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

La velocidad lineal es la angular por el radio, y su valor será:

$$v = \omega \cdot R = \pi \text{ rad/s} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot \pi \text{ m/s}$$

Y la aceleración normal es:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = (\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

11 **Dos móviles parten del mismo punto de una circunferencia de 20 m de radio y la recorren en sentidos contrarios. Uno tarda 40 s en dar una vuelta, y el otro se mueve a 1 rpm. Calcula el tiempo que tardan en cruzarse y el espacio recorrido por cada uno.**

Se trata de un MCU en ambos casos. Las velocidades angulares de ambos móviles son:

$$\omega_1 = \frac{1 \text{ vuelta}}{40 \text{ s}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} = 0{,}157 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 1 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0{,}105 \text{ rad/s}$$

La posición angular de cada uno a un tiempo t será:

$$\phi_1 = \omega_1 \cdot t = 0{,}157 \cdot t$$

$$\phi_2 = \omega_2 \cdot t = 0{,}105 \cdot t$$

Obteniendo la relación entre ambas posiciones y sabiendo que:

$$\phi_1 + \phi_2 = 2 \cdot \pi$$

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{0{,}157 \cdot t}{0{,}105 \cdot t} = 1{,}5$$

Determinamos la posición agular de cada móvil resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$1{,}5 \cdot \phi_2 + \phi_2 = 2 \cdot \pi \rightarrow \phi_2 = \frac{2 \cdot \pi}{2{,}5} = 2{,}51 \text{ rad}$$

$$\phi_1 = 2 \cdot \pi \text{ rad} - 2{,}51 \text{ rad} = 3{,}77 \text{ rad}$$

Por tanto, el tiempo que tardan en cruzarse será:

$$t = \frac{\phi_1}{\omega_1} = \frac{3{,}77 \text{ rad}}{0{,}157 \text{ rad/s}} = 24 \text{ s}$$

Y el espacio recorrido por cada uno de los móviles será:

$$s_1 = \phi_1 \cdot R = 3{,}77 \text{ rad} \cdot 20 \text{ m} = 75{,}4 \text{ m}$$

$$s_2 = \phi_2 \cdot R = 2{,}51 \text{ rad} \cdot 20 \text{ m} = 50{,}2 \text{ m}$$

12 **Si el período de un MCU se duplica, explica qué ocurre con: la velocidad angular, la frecuencia y la aceleración normal.**

En vista de estos resultados, ¿qué relaciones de proporcionalidad hay entre estas magnitudes cinemáticas y el período?

El período está relacionado con la velocidad angular por la expresión:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Si el período se duplica, la velocidad angular será la mitad. Estas magnitudes son inversamente proporcionales.

$$\omega' = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot T} = \frac{\omega}{2}$$

La frecuencia es la inversa del período:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f' = \frac{1}{2 \cdot T} = \frac{f}{2}$$

Al igual que con la velocidad angular, si el período se duplica la frecuencia será la mitad. Son magnitudes inversamente proporcionales.

La aceleración normal en función del período será:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot R \; ; \; a_n' = \left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot T}\right)^2 \cdot R = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \cdot R = \frac{a_n}{4}$$

Al duplicar el período, la aceleración normal será cuatro veces menor. Entre ellas existe, pues, una relación cuadrática inversa.

Página 237

13 La posición de una partícula viene dada por:

$$\vec{r} = [5 \cdot \cos(\pi \cdot t) - 1] \cdot \vec{i} + [5 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t) + 2] \cdot \vec{j} \text{ (SI)}$$

a) Comprueba que se trata de un MCU.

b) Calcula el radio de la circunferencia y la frecuencia del movimiento.

a) Un movimiento circular y uniforme viene caracterizado porque los módulos de $\vec{v}$ y $\vec{a}_n$ son constantes y, por tanto, no existe $\vec{a}_t$.

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = -5 \cdot \pi \cdot \text{sen}(\pi \cdot t) \cdot \vec{i} + 5 \cdot \pi \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{25 \cdot \pi^2 \cdot \left[\text{sen}^2(\pi \cdot t) + \cos^2(\pi \cdot t)\right]} = 5 \cdot \pi \text{ m/s (constante)}$$

Si v = cte $\rightarrow a_t = dv / dt = 0$

Luego: $$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}}{dt} = -5 \cdot \pi^2 \cdot \cos(\pi \cdot t) \cdot \vec{i} + 5 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t) \cdot \vec{j}$$

$$a_n = \sqrt{25 \cdot \pi^4 \cdot \left[\cos^2(\pi \cdot t) + \text{sen}^2(\pi \cdot t)\right]} = 5 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2 \text{ (constante)}$$

b) En primer lugar, calculamos el radio de la circunferencia:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow 5 \cdot \pi^2 = \frac{25 \cdot \pi^2}{R} \rightarrow R = 5 \text{ m}$$

A continuación, calculamos la frecuencia del movimiento:

$$v = \omega \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \rightarrow f = \frac{v}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{5 \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot 5} = \frac{1}{2} \text{ Hz}$$

14 Las manecillas de un reloj sin segundero coinciden a las 12:00. ¿A qué hora coincidirán de nuevo por primera vez? Resuelve el problema mentalmente, matemáticamente y gráficamente.

La manecilla horaria da una vuelta cada 12 horas; por tanto, su velocidad angular es:

$$\omega_h = \frac{1}{12} \frac{\text{vueltas}}{\text{hora}}$$

Y el minutero, una vuelta cada hora; así:

$$\omega_m = 1 \frac{\text{vuelta}}{\text{hora}}$$

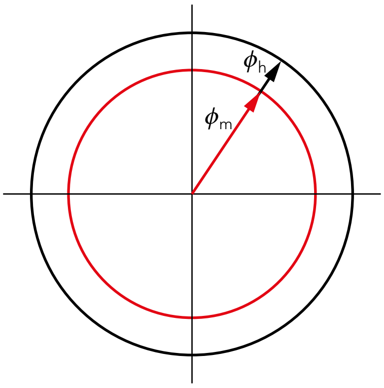
Si consideramos las 12:00 como punto inicial del movimiento, $\phi_{oh} = \phi_{om} = 0$, la posición angular de cada aguja queda determinada por las expresiones:

$$\phi_h = \frac{1}{12} \cdot t \qquad [1]$$

$$\phi_m = 1 \cdot t \qquad [2]$$

Donde la velocidad angular se expresa en vueltas/hora; el tiempo, en horas, y la posición angular, en vueltas.

De acuerdo con la siguiente figura:



Cuando las dos manecillas coincidan de nuevo, la del minutero habrá dado una vuelta completa más que la horaria; la expresión que impone esta condición es:

$$\phi_m = \phi_h + 1 \qquad [3]$$

Al sustituir las expresiones [1] y [2] en [3], obtenemos el valor del tiempo, expresado en horas, en que ambas agujas coinciden de nuevo:

$$1 \cdot t = \frac{1}{12} \cdot t + 1 \;\rightarrow\; t = \frac{12}{11}\ \text{h}$$

Ese valor corresponde a:

$$t = 1\ \text{h}\ 5\ \text{min}\ 27''$$

La expresión [3] se puede generalizar para calcular los instantes de tiempo en que coinciden ambas agujas en una vuelta completa de la aguja que señala las horas; para ello, imponemos la condición:

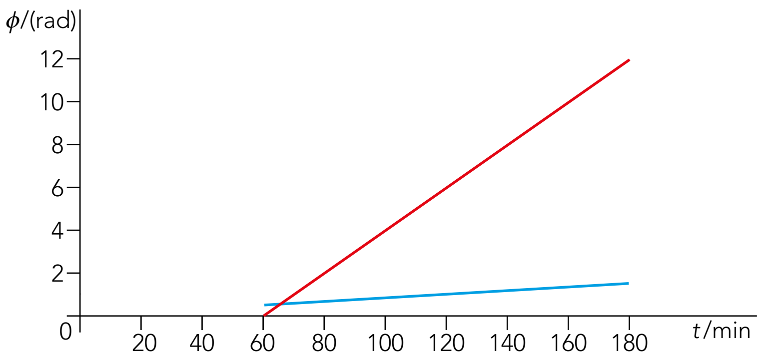
$$\phi_m = \phi_h + n$$

Donde n es el número de vueltas que da la aguja del minutero, así:

$$1 \cdot t = \frac{1}{12} \cdot t + n \;\rightarrow\; t = \frac{12}{11} \cdot n \;;\; 0 < n \le 11;\; n \in \mathbb{Z}$$

En esta expresión, si n se expresa en vueltas, el tiempo aparecerá expresado en horas.

Gráficamente representamos las posiciones angulares para la manecilla de las horas y de los minutos en la segunda vuelta; donde las líneas se cortan, será donde ambas manecillas se encuentran.



15 **¿Qué clase de movimiento es el de un avión que vuela a una altitud fija con rapidez constante sin cambiar de latitud?**

Admitiendo la Tierra esférica, el avión describe un MCU.

Movimiento circular uniformemente acelerado

16 **¿Por qué las primeras bicicletas tenían una rueda delantera grande y una trasera pequeña?**

En **anayaeducacion.es** su alumnado puede consultar las características de los textos argumentativos, con consejos y orientaciones para escribir este tipo de textos.

Estas bicicletas no tenían cadena de transmisión y los pedales iban fijos a la rueda delantera. Cada vuelta de los pedales equivalía a un desplazamiento igual a la circunferencia de la rueda delantera, por lo que interesaba que esta fuera grande para conseguir desplazamientos también grandes.

17 **Un motorista parte del reposo, en un circuito con forma circular (*R* = 400 m), con MCUA, hasta que a los 50 s alcanza la velocidad de 72 km/h, que mantiene a partir de ese momento. Calcula:**

a) La aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento.

b) El espacio recorrido durante el MCUA.

c) La aceleración normal en *t* = 50 s.

d) La velocidad angular media en los primeros 50 s.

e) Tiempo que tardará en dar 100 vueltas al circuito.

f) Representa las gráficas del movimiento.

a) Expresamos la velocidad lineal en unidades del SI:

$$v = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$$

La velocidad angular que alcanza el motorista es:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{20\ \text{m/s}}{400\ \text{m}} = 0{,}05\ \text{rad/s}$$

Y su aceleración angular la calculamos sabiendo que parte del reposo ($\omega_o = 0$):

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0{,}05\ \text{rad/s}}{50\ \text{s}} = 10^{-3}\ \text{rad/s}^2$$

La aceleración tangencial, por tanto, es:

$$a_t = \alpha \cdot R = 10^{-3}\ \text{rad/s}^2 \cdot 400\ \text{m} = 0{,}4\ \text{m/s}^2$$

b) La posición angular a los 50 s es:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}\ \text{rad/s}^2 \cdot (50\ \text{s})^2 = 1{,}25\ \text{rad}$$

Por tanto, el espacio que ha recorrido el motorista es:

$$\Delta s = \phi \cdot R = 1{,}25\ \text{rad} \cdot 400\ \text{m} = 500\ \text{m}$$

c) La aceleración normal es:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = (0{,}05\ \text{rad/s})^2 \cdot 400\ \text{m} = 1\ \text{m/s}^2$$

d) La velocidad angular media será el cociente entre el desplazamiento angular, ya calculado y el tiempo, dato que proporciona el enunciado del problema:

$$\omega_m = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{1{,}25 \text{ rad}}{50 \text{ s}} = 0{,}025 \text{ rad/s}$$

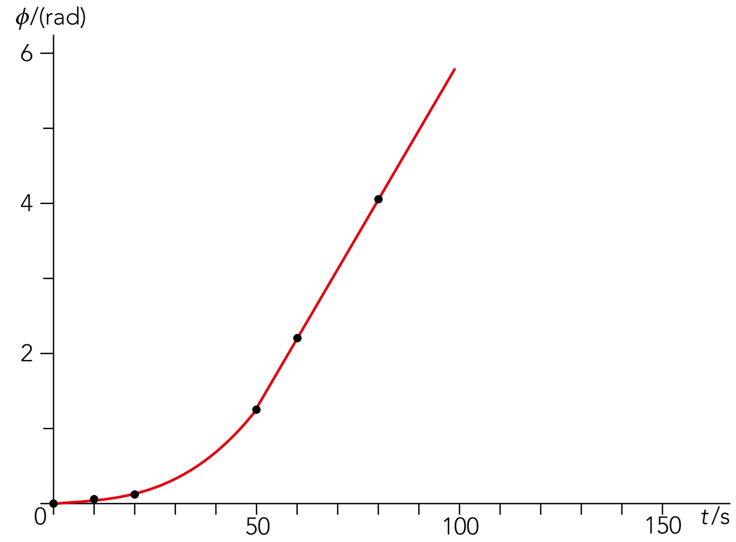
e) Para el cálculo del tiempo que tarda en dar 100 vueltas al circuito hay que considerar que los 50 primeros segundos se trata de un MCUA, y que una vez alcanzada la velocidad de 72 km/h, es un MCU.

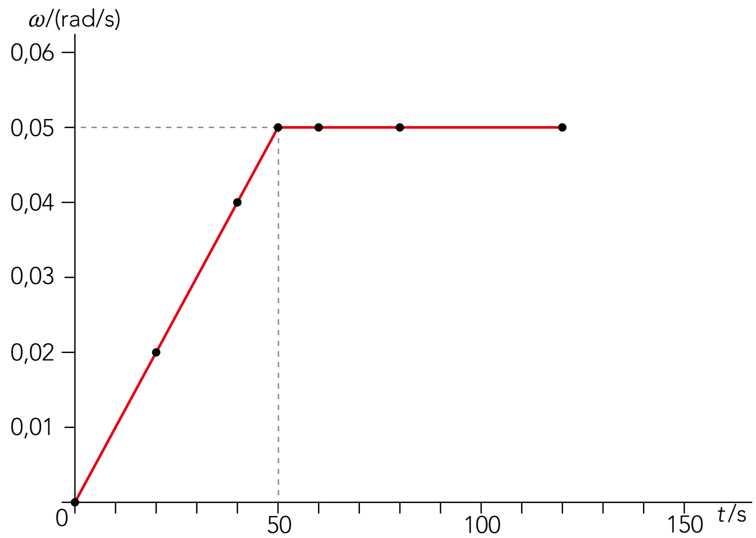
En los primeros 50 s el motorista recorre 1,25 rad, y el resto de las 100 vueltas ($200 \cdot \pi - 1{,}25$ rad) los recorre a 0,05 rad/s.

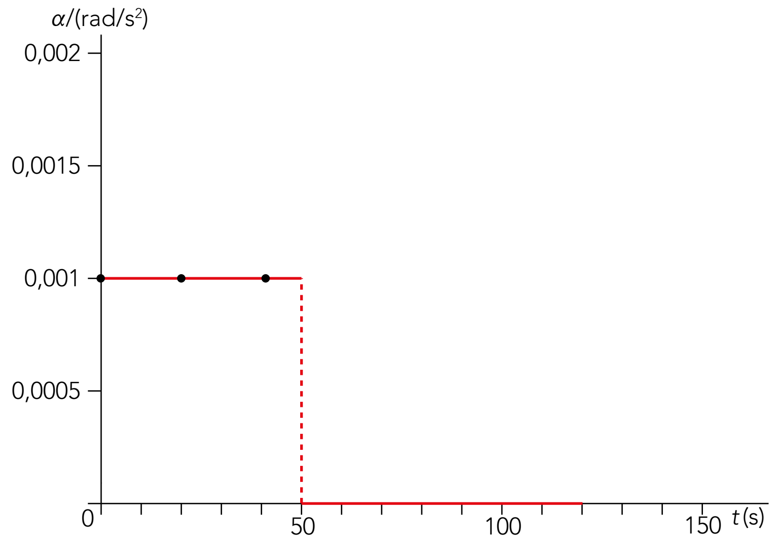
El tiempo total es:

$$t = 50 \text{ s} + \frac{(200 \cdot \pi - 1{,}25) \text{ rad}}{0{,}05 \text{ rad/s}} = 12\,591{,}4 \text{ s} = 3 \text{ h } 29 \text{ min } 51{,}6 \text{ s}$$

f) Para representar las gráficas del movimiento, hay que tener en cuenta que en los 50 primeros segundos se trata de un MCUA y que a partir de ahí se convierte en un MCU.







18 **Una rueda (d = 60 cm) gira en torno a su eje a 3 000 rpm. Si se frena y tarda 20 s en detenerse, calcula:**

a) La aceleración angular, supuesta constante.

b) El número de vueltas que da hasta que se para.

c) El módulo de las aceleraciones tangencial, normal y total de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas.

a) La velocidad angular inicial del movimiento, expresada en las unidades correspondientes del SI es:

$$\omega_0 = 3000\ \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} \cdot \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{1\ \text{vuelta}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 100 \cdot \pi\ \text{rad/s}$$

El valor de la aceleración de frenado será, entonces:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \rightarrow \alpha = \frac{0 - 100 \cdot \pi}{20} = -5 \cdot \pi\ \text{rad/s}^2$$

b) La distancia angular que recorre un punto del exterior de la rueda hasta que esta se detiene es:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot \text{t} + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\phi = 0 + 100 \cdot \pi \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-5 \cdot \pi) \cdot 20^2 = 1000 \cdot \pi\ \text{rad}$$

Teniendo en cuenta que una vuelta equivale a $2 \cdot \pi$ rad, las que da la rueda hasta que se detiene son:

$$N = \frac{\phi}{2 \cdot \pi} \rightarrow N = \frac{1000 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 500\ \text{vueltas}$$

c) El radio de la rueda es:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{60\ \text{cm}}{2} = 30\ \text{cm} = 0{,}3\ \text{m}$$

El valor de la aceleración tangencial de un punto de la periferia es:

$$a_t = \alpha \cdot R \rightarrow a_t = -5 \cdot \pi \cdot 0{,}3 = -1{,}5 \cdot \pi\ \text{m/s}^2$$

El cálculo de la aceleración normal se realiza a partir de la siguiente expresión:

$$a_n = \omega^2 \cdot R$$

Donde ω es el valor de la velocidad angular al cabo de 100 vueltas:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

Siendo t el instante de tiempo que corresponde a dicho valor de la velocidad, que calculamos como sigue:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

Donde:

$$\alpha = -5 \cdot \pi \text{ rad/s}^2 \;\; ; \;\; \phi_0 = 0 \;\; ; \;\; \omega_0 = 100 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

$$\phi = 100 \text{ vueltas} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} = 200 \cdot \pi \text{ rad}$$

Así:

$$200 \cdot \pi = 0 + 100 \cdot \pi \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-5 \cdot \pi) \cdot t^2$$

$$5 \cdot t^2 - 200 \cdot t - 400 = 0 \begin{cases} t_1 = 37{,}89 \text{ s} \\ t_2 = 2{,}1 \text{ s} \end{cases}$$

La primera solución carece de significado físico, pues transcurridos 20 s, el móvil está parado; por tanto, la velocidad angular al cabo de 100 vueltas será:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow \omega = 100 \cdot \pi - 5 \cdot \pi \cdot 2{,}1 = 89{,}5 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

La aceleración normal será entonces:

$$a_n = \omega^2 \cdot R = (89{,}5 \cdot \pi)^2 \cdot 0{,}3 = 2\,403{,}1 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

El módulo de la aceleración total de un punto de la periferia de la rueda será:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(2\,403{,}1 \cdot \pi^2)^2 + (-1{,}5 \cdot \pi)^2} \approx 2\,403{,}1 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

En este último cálculo se puede despreciar la contribución de la aceleración tangencial al módulo de la aceleración total.

19 En un MCUA de 20 cm de radio la frecuencia disminuye de 30 Hz a 3 Hz en 5 segundos. Calcula:

a) La velocidad angular inicial y final.

b) La aceleración angular en ese intervalo.

c) El número de vueltas dadas en esos 5 segundos.

d) La velocidad lineal y las componentes intrínsecas de la aceleración al inicio y al final del movimiento.

a) La velocidad inicial y final, conocida la frecuencia, es:

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 = 2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot 30 \text{ s}^{-1} = 188{,}50 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 2 \cdot \pi \cdot f_f = 2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot 3 \text{ s}^{-1} = 18{,}85 \text{ rad/s}$$

b) La aceleración angular en ese intervalo es:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{18{,}85 \text{ rad/s} - 188{,}5 \text{ rad/s}}{3 \text{ s}} = -33{,}93 \text{ rad/s}^2$$

c) El ángulo barrido en este tiempo es:

$$\Delta\phi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 188{,}5 \text{ rad/s} \cdot 5 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 33{,}93 \text{ rad/s}^2 \cdot (5 \text{ s})^2 = 518{,}37 \text{ rad}$$

Por tanto, el número de vueltas es:

$$N = \frac{\Delta\phi}{2 \cdot \pi} = \frac{518{,}37 \text{ rad}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 82{,}5 \text{ vueltas}$$

d) La velocidad lineal inicial y final es:

$$v_0 = \omega_0 \cdot R = 188{,}5 \text{ rad/s} \cdot 0{,}2 \text{ m} = 37{,}70 \text{ m/s}$$

$$v_f = \omega_f \cdot R = 18{,}85 \text{ rad/s} \cdot 0{,}2 \text{ m} = 3{,}77 \text{ m/s}$$

La aceleración tangencial es la misma al inicio y al final del movimiento; así, su valor será:

$$a_t = \alpha \cdot R = -33{,}93 \text{ rad/s} \cdot 0{,}2 \text{ m} = -6{,}79 \text{ m/s}$$

La aceleración normal al inicio y al final del movimiento es:

$$a_{n_0} = \omega_0^2 \cdot R = (188{,}5 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}2 \text{ m} = 7\,106{,}45 \text{ m/s}^2$$

$$a_{n_f} = \omega_f^2 \cdot R = (18{,}85 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}2 \text{ m} = 71{,}06 \text{m/s}^2$$

20 ¿Qué velocidad angular, en rad/s, ha de tener una centrifugadora para que en un punto situado a 10 cm del eje de giro produzca una aceleración normal 100 veces mayor que la de la gravedad terrestre?

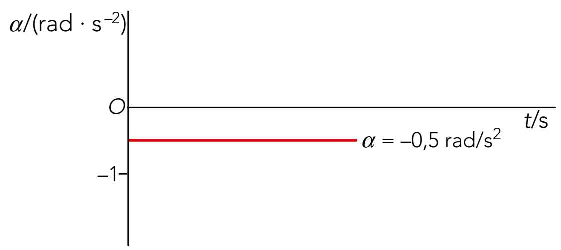
La aceleración normal será:

$$a_n = 100 \cdot g = 100 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ m/s}^2$$

Así, la velocidad angular será:

$$a_n = \omega^2 \cdot R \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_n}{R}} = \sqrt{\frac{980 \text{ m/s}^2}{0{,}1 \text{ m}}} = 99 \text{ rad/s}$$

21 A partir de la siguiente gráfica de aceleración angular de un movimiento circular, cuyo inicio ocurre en $\phi_0 = 0$ desde el reposo, representa las gráficas de posición y velocidad, angulares y lineales.

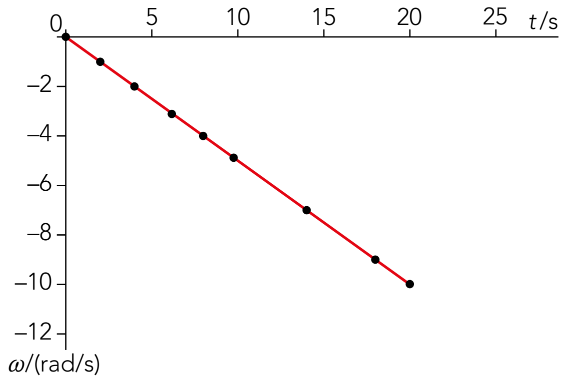


Para resolver este ejercicio, debemos obtener los valores correspondientes a la velocidad y a la aceleración angulares en función del tiempo. Dichos valores los obtendremos aplicando las siguientes expresiones:

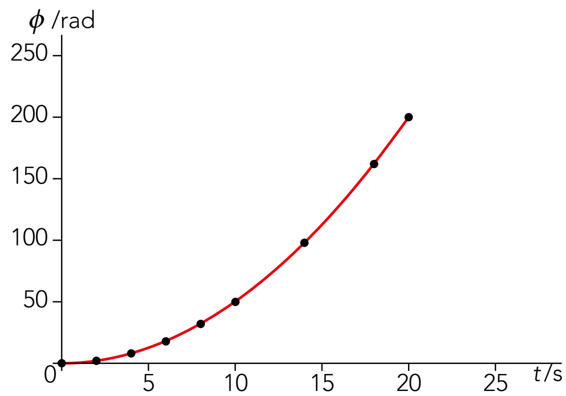
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad ; \quad \phi(t) = \phi_0 + \omega \cdot t$$

En la gráfica de la aceleración angular frente al tiempo se obtiene el valor de $\alpha = -0{,}5 \text{ rad/s}^2$.

La gráfica de la velocidad angular es, entonces:



Como se ha indicado, la gráfica de la posición angular se obtendrá al multiplicar el valor de la velocidad angular en cada instante por el tiempo:



Las gráficas de la velocidad y del espacio lineal trendrán la misma forma de las angulares, pero para obtener su valor se debe multiplicar por el radio.

22 Se hace girar una honda durante 10 segundos, desde el reposo, con una aceleración angular de π rad/s², momento en el cual suelta la cuerda para dejar salir el proyectil:

a) ¿A qué velocidad sale despedido si la cuerda de la honda mide 60 cm?

b) Si sale desde 15 cm del suelo, con un ángulo de 45°, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo? ¿A qué distancia lo hará?

c) ¿Cuánto tiempo tendría que hacer girar la honda para que la velocidad lineal de salida fuese el doble?

a) La velocidad con la que se lanza el proyectil coincide con la velocidad lineal del MCUA en ese tiempo. Calculamos la velocidad angular:

$$\omega = \alpha \cdot t = \pi \text{ rad/s}^2 \cdot 10 \text{ s} = 10 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

El radio es 60 cm; por tanto, la velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 10 \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot 0{,}6 \text{ m} = 6 \cdot \pi \text{ m/s} = 18{,}8 \text{ m/s}$$

b) Se trata de un tiro oblicuo, cuyas ecuaciones del movimiento son:

Eje *X*: $$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$$

$$x = v_x \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

Eje *Y*: $$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = y_0 + v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Despejamos el tiempo de vuelo del proyectil para llegar al suelo:

$$0 = 0{,}15 + 18{,}8 \cdot \text{sen}\,45° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2 \rightarrow t = \frac{-13{,}33 \pm \sqrt{(13{,}33)^2 + 4 \cdot 0{,}15 \cdot 4{,}9}}{-2 \cdot 4{,}9}$$

$$t_1 = -0{,}011 \text{ s} \;\; ; \;\; t_2 = 2{,}7 \text{ s}$$

La distancia a la que llega es:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t = 18{,}85 \cdot (\cos 45°) \cdot 2{,}7 \text{ s} = 35{,}98 \text{ m}$$

c) Para que la velocidad lineal de salida fuera el doble, su velocidad angular debe ser también el doble. Por tanto, el tiempo que se debe hacer girar la honda será el doble:

$$v' = 2 \cdot v \rightarrow 2 \cdot \omega \rightarrow 2 \cdot t \rightarrow t' = 2 \cdot 10 \text{ s} = 20 \text{ s}$$

Página 238

23 Un móvil describe un MCU de 20 m de longitud y 2 s de período, centrado en un sistema de referencia cartesiano. Cuando pasa por el punto de corte de la trayectoria con el semieje *Y* positivo arranca otro móvil desde el reposo. Si ambos movimientos se dan en sentido antihorario, ¿con qué aceleración angular ha de hacerlo para alcanzar al primero en $\phi = \pi/2$ rad? ¿Qué valor tendrán las componentes intrínsecas de la aceleración de ambos móviles en el momento del encuentro?

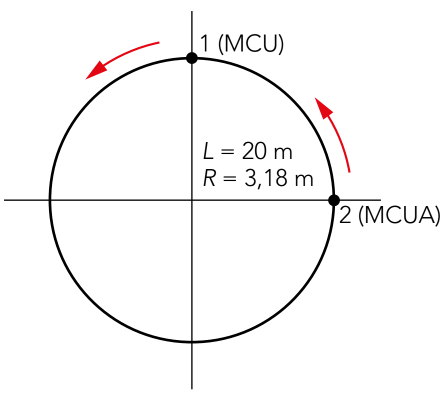
Las ecuaciones del movimiento de cada móvil son:

1 MCU: $$\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi \text{ rad/s} \;\; ; \;\; \phi_1 = \omega_1 \cdot t + \phi_{01} = \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}$$

$$\phi_{01} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

2 MCUA: $$\omega_{02} = 0 \text{ rad/s} \;\; ; \;\; \phi_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot t^2$$

$$\phi_{02} = 0 \text{ rad}$$



Si ambos móviles se encuentran en la posición $\phi = \frac{\pi}{2}$, el móvil 1 habrá recorrido una vuelta completa, por lo que el tiempo transcurrido hasta que los móviles se encuentren será igual al período del primero; es decir, $t = 2$ s.

Igualando la posición de los cuerpos y sustituyendo el valor del tiempo, obtenemos la aceleración angular del segundo móvil:

$$\phi_1 = \phi_2 \;\rightarrow\; \pi \cdot t + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot t^2$$

$$2 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot 2^2 \;\rightarrow\; \alpha_2 = \frac{5 \cdot \pi}{4} \text{ rad/s}^2$$

Por tanto, las componentes intrínsecas en el punto de encuentro serán:

① $$a_t = 0$$

$$a_n = \omega^2 \cdot R = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot \frac{10}{\pi} = 31{,}46 \text{ m/s}^2$$

② $$a_t = \alpha \cdot R = \frac{5 \cdot \pi}{4} \text{ rad/s}^2 \cdot \frac{10}{\pi} = 12{,}5 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \omega^2 \cdot R = (\alpha \cdot t)^2 \cdot R = \left(\frac{5 \cdot \pi}{4} \cdot 2\right)^2 \cdot \frac{10}{\pi} = 196{,}35 \text{ m/s}^2$$

Nota: A partir de los datos del enunciado, diremos que si $L = 2 \cdot \pi \cdot R = 20$ m $\rightarrow R = \frac{10}{\pi}$ m

24 Las medidas de la posición angular en distintos instantes de tiempo, en un movimiento circular que parte del reposo, arrojan los siguientes datos:

t/s	0	1	2	3	4
ϕ/rad	0	1	4	9	16

Determina el tipo de movimiento circular y representa gráficamente sus ecuaciones.

Se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado, cuyas ecuaciones son:

$$\phi = \phi_o + \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \xrightarrow{\text{reposo}} \phi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\omega = \omega_o + \alpha \cdot t \xrightarrow{\text{reposo}} \omega = \alpha \cdot t$$

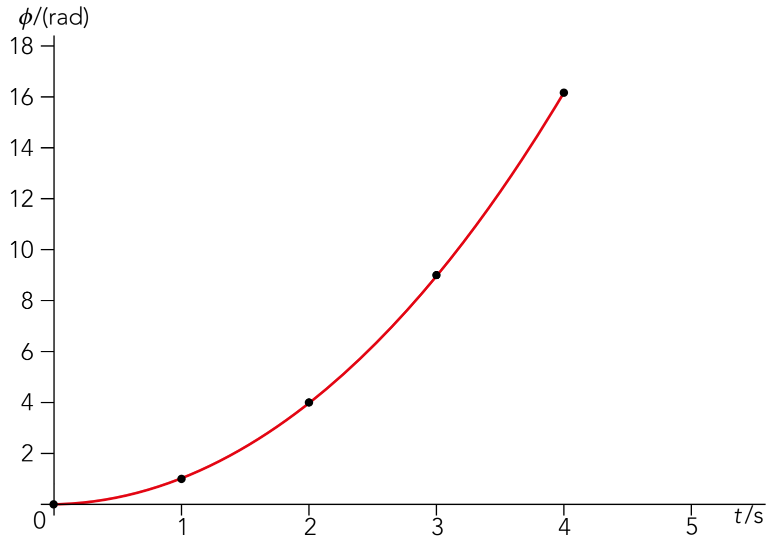
Viendo cómo son las ecuaciones, debemos deducir que el valor de $\alpha = 2$ rad/s^2.

A partir de los datos aportados calculamos la velocidad angular y la aceleración angular para cada tiempo:

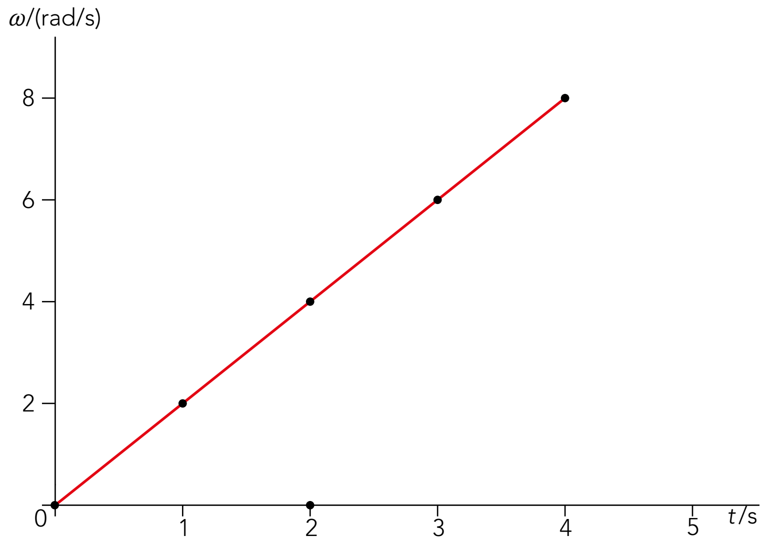
t/s	0	1	2	3	4
ϕ/rad	0	1	4	9	16
ω/(rad/s)	0	2	4	6	8
α/(rad/s^2)	0	2	2	2	2

Las gráficas correspondientes son:

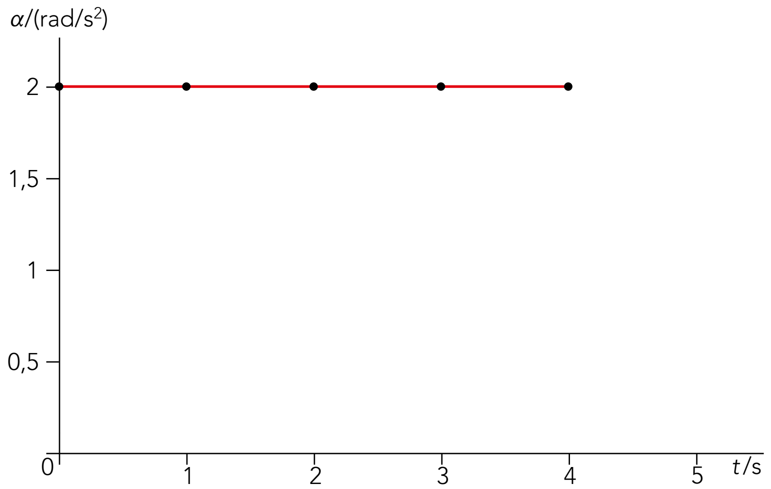
- Espacio - tiempo:



- Velocidad angular en función del tiempo:



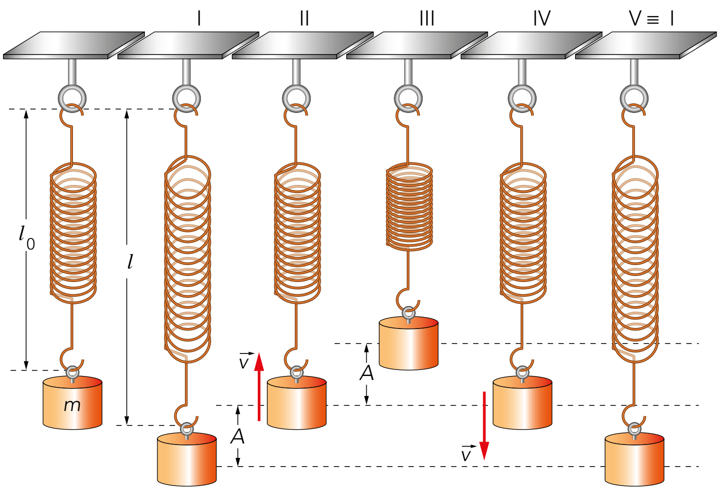
- Aceleración angular en función del tiempo:



Movimiento armónico simple

25 **Un móvil describe un movimiento armónico simple de amplitud *A*. ¿Qué distancia recorre en un intervalo de tiempo igual a un período? Razona la respuesta.**

En el tiempo correspondiente a un período, el móvil ha realizado una oscilación completa. Teniendo en cuenta el dibujo aportado, vemos que una oscilación completa es el equivalente a cuatro amplitudes:



Así, la distancia que se recorre en un tiempo igual al período es $4 \cdot A$.

26 **En un MAS la elongación, la velocidad y la aceleración son magnitudes periódicas. ¿Coincide el período en los tres casos? Razona tu respuesta.**

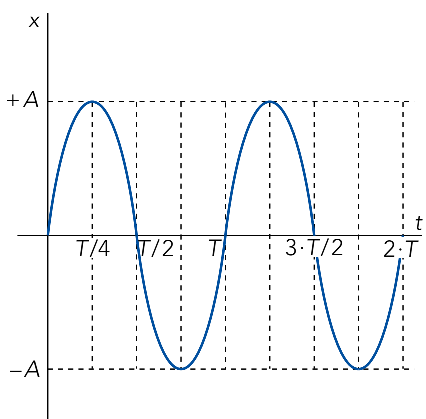
Como se observa de las ecuaciones del MAS, todas ellas dependen de la frecuencia angular, que está relacionada con el período:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_o)$$

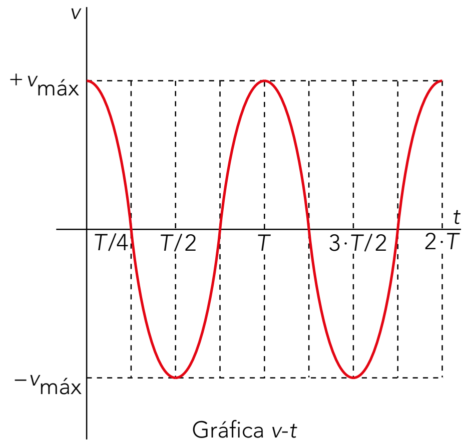
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_o)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_o)$$

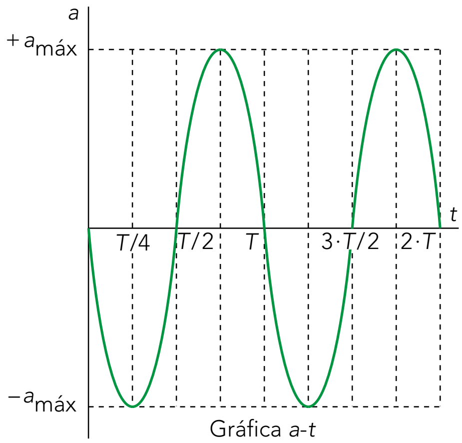
Sabiendo también que $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}$, podemos asegurar que el valor numérico del período sí es el mismo en los tres casos. Existe, no obstante, desfase entre las magnitudes, como se muestra en las gráficas siguientes:



Gráfica x-t



Gráfica *v-t*



Gráfica *a-t*

27 **Un móvil describe un MAS de 20 cm de amplitud y 2,5 s de período. Escribe la ecuación de la elongación en los casos siguientes:**

a) El tiempo empieza a contarse cuando la elongación es máxima y positiva.

b) El tiempo empieza a contarse cuando la elongación es nula y el movimiento es hacia valores positivos de la elongación.

c) El tiempo empieza a contarse cuando la elongación es nula y el movimiento es hacia valores negativos de la elongación.

Para un MAS, la ecuación de la elongación es:

$$x\,(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)$$

Conocidos A = 20 cm y T = 2,5 s, ω es:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{2{,}5 \text{ s}} = 0{,}8 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

Con estos datos ya podemos calcular la elongación en los distintos casos:

a) Cuando x es máxima a t = 0, el desfase será:

$$x_{máx} = A \rightarrow \text{sen}\,\phi = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

Luego, la ecuación de la elongación es:

$$x\,(t) = 20 \cdot \text{sen}\left(0{,}8 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{cm}$$

b) Cuando $x = 0$ a $t = 0$ y $v > 0$, el desfase es:

$$x = 0 \rightarrow \text{sen}\,\phi = 0 \rightarrow \phi = 0$$

Por tanto, la ecuación de la elongación resulta:

$$x\,(t) = 20 \cdot \text{sen}\,(0{,}8 \cdot \pi \cdot t)\ \text{cm}$$

c) Cuando $x = 0$ en $t = 0$, y $v < 0$, el desfase es:

$$x = 0 \rightarrow \text{sen}\,\phi = 0 \rightarrow \phi = \pi$$

Pues $v = A \cdot \omega \cdot \cos\phi < 0$, y $\cos\phi < 0$, por lo que ϕ debe encontrarse en el segundo cuadrante. La ecuación de la elongación es:

$$x\,(t) = 20 \cdot \text{sen}\,(0{,}8 \cdot \pi \cdot t + \pi)\ \text{cm}$$

28 Un móvil sigue un MAS de 10 cm de amplitud, realizando 2 oscilaciones cada segundo:

a) Calcula la elongación 1/6 s después de alcanzar su máxima separación con velocidad positiva.

b) Representa la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Indica que se realizan 2 oscilaciones por segundo, por lo que la frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\ \text{osc}}{1\ \text{s}} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{1\ \text{osc}} = 4 \cdot \pi\ \text{rad/s}$$

a) Calculamos el tiempo en el que alcanza su elongación máxima, considerando el desfase nulo:

$$x\,(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t) \rightarrow \text{sen}\,(\omega \cdot t) = 1 \rightarrow \omega \cdot t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2 \cdot 4 \cdot \pi} = \frac{1}{8}\ \text{s}$$

A este tiempo se suma $\frac{1}{6}$ s:

$$t = \frac{1}{8}\ \text{s} + \frac{1}{6}\ \text{s} = 0{,}29\ \text{s}$$

La elongación es, por tanto:

$$x = 10 \cdot \text{sen}\,(4 \cdot \pi \cdot 0{,}29) = -4{,}8\ \text{cm}$$

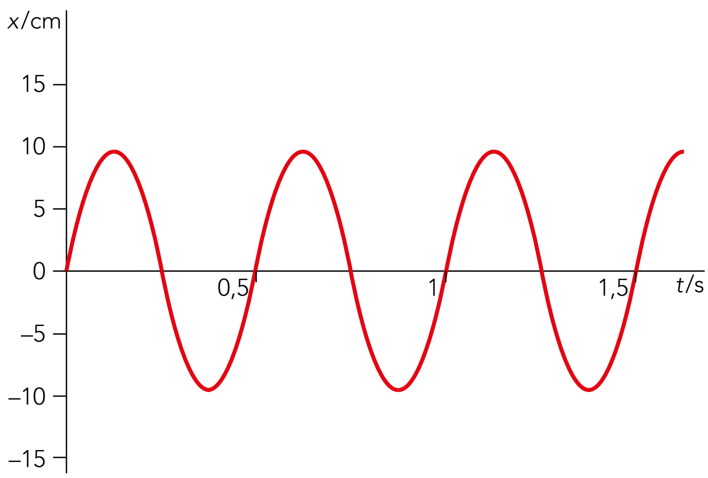
b) Sabiendo que las ecuaciones que representan el espacio, la velocidad y la aceleración, en función del tiempo, son:

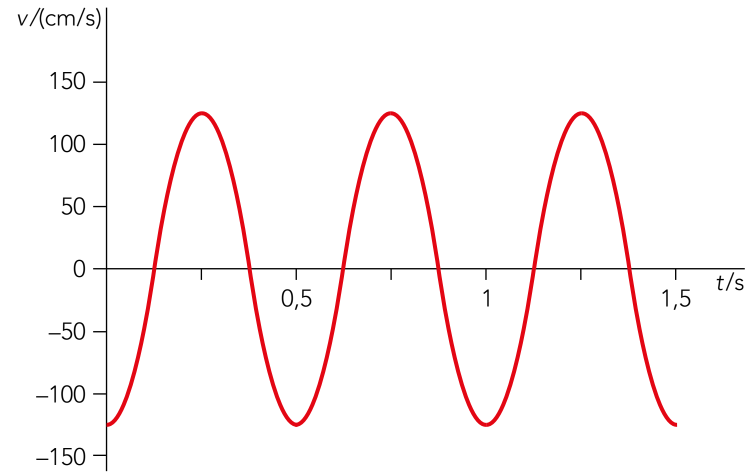
$$x\,(t) = 10 \cdot \text{sen}\,(4 \cdot \pi \cdot t)\ \text{cm}$$

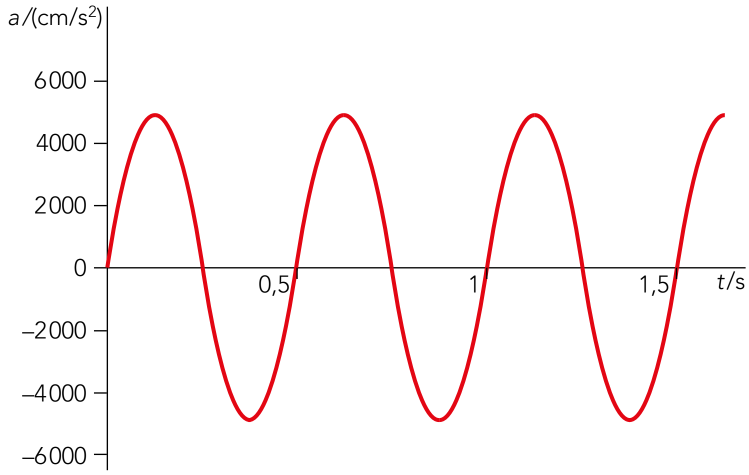
$$v\,(t) = 40 \cdot \pi \cdot \cos\,(4 \cdot \pi \cdot t)\ \text{cm/s}$$

$$a\,(t) = -160 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\,(4 \cdot \pi \cdot t)\ \text{cm/s}^2$$

Dándole distintos valores al tiempo, obtenemos sus gráficas respectivas:







29 **Una partícula se mueve con un MAS cuya ecuación, en unidades del SI, viene dada por:**

$$\mathbf{y = 2 \cdot sen\left(\frac{t}{2} + \pi\right)}$$

Determina:

a) La amplitud, período y frecuencia de las oscilaciones.

b) La posición, velocidad y aceleración cuando la elongación es igual a la mitad de la amplitud.

a) De la ecuación de la elongación deducimos que $A = 2$ m y $\omega = 1/2$ rad/s. El período será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{0{,}5 \text{ rad/s}} = 4 \cdot \pi \text{ s}$$

Como la frecuencia es el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \text{ Hz}$$

b) El instante de tiempo en el que la elongación es la mitad de la amplitud, $y = 1$ m, es:

$$1 = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{t}{2} + \pi\right) \rightarrow \text{sen}\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = 0{,}5 \rightarrow \frac{t}{2} + \pi = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot n \cdot \pi \xrightarrow{n = 1} t = 7{,}33 \text{ s}$$

Así, la velocidad será:

$$v = \cos\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = \cos\left(\frac{7{,}33}{2} + \pi\right) = 0{,}87 \text{ m/s}$$

Y la aceleración:

$$a = -\frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = -\frac{1}{2}\ \text{sen}\left(\frac{7{,}33}{2} + \pi\right) = -0{,}25\ \text{m/s}^2$$

Nota: La variación en los resultados se debe a la aproximación en el número de decimales al realizar las operaciones matemáticas.

30 **Un objeto colgado de un muelle describe un MAS de 10 cm de amplitud y 0,1 s de período. En el instante inicial el muelle está estirado, ocupando el objeto la posición más baja en su oscilación:**

a) Escribe la ecuación del movimiento.

b) Calcula la elongación, la velocidad y la aceleración, transcurridos 10 s desde el inicio del movimiento.

c) Demuestra que la velocidad es máxima cuando el móvil pasa por la posición de equilibrio.

a) La ecuación de la elongación viene determinada por la expresión:

$$y\,(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi)$$

La amplitud es A = 10 cm. Conocido el período calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{0{,}1\ \text{s}} = 20 \cdot \pi\ \text{rad/s}$$

Sabiendo que a t = 0 la elongación ocupa su posición más baja, $y = -A$, calculamos el desfase:

$$-A = A \cdot \text{sen}\,\phi \ \Rightarrow\ \text{sen}\,\phi = -1 \ \Rightarrow\ \phi = \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

La ecuación de la elongación, por tanto, es:

$$y\,(t) = 10 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)\ \text{cm}$$

b) La elongación en t = 10 s es:

$$y = 10 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \pi \cdot 10 + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = -10\ \text{cm}$$

La ecuación de la velocidad es:

$$v\,(t) = -200 \cdot \pi \cdot \cos\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)\ (\text{cm/s})$$

Ya que:

$$\cos\left(20 \cdot \pi \cdot 10 + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = 0$$

En t = 10 s su velocidad es:

$$v = 0\ \text{cm/s}$$

La ecuación de la aceleración es:

$$a\,(t) = -4\,000 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)\ (\text{cm/s}^2)$$

En t = 10 s es:

$$a = 4\,000 \cdot \pi^2\ \text{cm/s}^2$$

c) En la posición de equilibrio $y = 0$, el tiempo transcurrido es:

$$0 = 10 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) \rightarrow 20 \cdot \pi \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2} = 2 \cdot \pi$$

$$t = 0{,}05 \text{ s}$$

A este tiempo, la velocidad será:

$$v = -200 \cdot \pi \cdot \cos\left(20 \cdot \pi \cdot 0{,}05 + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = -200 \cdot \pi \text{ cm/s}$$

Como el coseno vale 1, diremos que es el máximo valor de velocidad que puede alcanzar.

31 Un móvil que describe un MAS tiene una aceleración de 5 m/s² cuando su elongación es de 5 cm. ¿Cuál es el período del movimiento?

Las ecuaciones de la elongación y de la aceleración son:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

Si dividimos, en valor absoluto, la aceleración entre la elongación, su relación corresponde a la frecuencia angular:

$$\frac{a}{y} = \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{5 \text{ m/s}^2}{0{,}05 \text{ m}}} = 10 \text{ rad/s}$$

Por tanto, el período es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{10 \text{ rad/s}} = 0{,}2 \cdot \pi \text{ s}$$

32 El pistón de un automóvil describe un MAS de 5 cm de amplitud y 3 600 rpm de frecuencia angular. Calcula su velocidad cuando pasa por el punto medio, y la aceleración en los extremos del recorrido.

En primer lugar, expresamos la frecuencia angular en las unidades correspondientes del SI; en este caso, rad/s:

$$\omega = 3600 \text{ rpm} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 120 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

La velocidad en el punto medio o posición de equilibrio, corresponde con la velocidad máxima; de acuerdo con la expresión de la velocidad en un MAS:

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

Resulta:

$$v_{máx}(t) = A \cdot \omega = 0{,}05 \text{ m} \cdot 120 \cdot \pi \text{ rad/s} = 6 \cdot \pi \text{ m/s}$$

La aceleración en los extremos corresponde con la aceleración máxima; esta será:

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

$$a_{máx}(t) = |-A \cdot \omega^2| = 0{,}05 \text{ m} \cdot (120 \cdot \pi \text{ rad/s})^2 = 720 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

33 En el instante en que un móvil con MAS se encuentra a 6 cm de la posición de equilibrio, su velocidad es de 1 cm/s. Cuando se encuentra a 2 cm, su velocidad es de 4 cm/s. Calcula el período y la amplitud del movimiento.

Las expresiones generales de la posición y de la velocidad de una partícula que efectúa un MAS son:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_o) \ ; \ v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_o)$$

Si escribimos las ecuaciones en función del primer instante de tiempo, t_1, en el que $x_1 = 6$ cm y $v_1 = 1$ cm/s, obtenemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t_1 + \phi_0) \\ 1 = A \cdot \omega \cdot \cos\,(\omega \cdot t_1 + \phi_0) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{6}{A} = \text{sen}\,(\omega \cdot t_1 + \phi_0) \\ \dfrac{1}{A \cdot \omega} = \cos\,(\omega \cdot t_1 + \phi_0) \end{array}$$

Si elevamos las dos expresiones al cuadrado y las sumamos, el miembro de la derecha es igual a la unidad, ya que:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Por tanto:

$$\frac{36}{A^2} + \frac{1}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow \frac{36 \cdot \omega^2 + 1}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow 36 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 1 = 0 \qquad [1]$$

De manera similar, para el instante de tiempo t_2, en el que $x_2 = 2$ cm y $v_2 = 4$ cm/s, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t_2 + \phi_0) \\ 4 = A \cdot \omega \cdot \cos\,(\omega \cdot t_2 + \phi_0) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{A} = \text{sen}\,(\omega \cdot t_2 + \phi_0) \\ \dfrac{4}{A \cdot \omega} = \cos\,(\omega \cdot t_2 + \phi_0) \end{array}\right.$$

Elevando ambas expresiones al cuadrado y operando como en el caso anterior se obtiene:

$$\frac{4}{A^2} + \frac{16}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow \frac{4 \cdot \omega^2 + 16}{A^2 \cdot \omega^2} = 1 \rightarrow 4 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 16 = 0 \qquad [2]$$

Si a la expresión [1] le restamos la [2] y despejamos ω, obtenemos la frecuencia angular.

$$32 \cdot \omega^2 - 15 = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{15}{32}} = 0{,}68 \text{ rad/s}$$

El período será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}68} = 9{,}24 \text{ s}$$

La amplitud la podemos obtener directamente a partir de las expresiones [1] o [2]. Si partimos de la ecuación [1] se obtiene:

$$36 \cdot \omega^2 - A^2 \cdot \omega^2 + 1 = 0 \rightarrow A^2 = \frac{36 \cdot \omega^2 + 1}{\omega^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{36 \cdot \omega^2 + 1}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 0{,}68^2 + 1}{0{,}68^2}} = 6{,}2 \text{ cm}$$

34 Un móvil describe un MAS de amplitud A, frecuencia angular ω, y fase inicial $\phi_0 = 0$. Demuestra que la amplitud se puede calcular, en función de las condiciones iniciales del movimiento, con la expresión:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Comprueba que esta ecuación es homogénea.

Las ecuaciones de la elongación y de la velocidad son:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

Dividimos la segunda ecuación entre la frecuencia angular y elevamos al cuadrado ambas expresiones:

$$x^2 = A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \phi)$$

Sumamos las expresiones:

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \phi) + A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \phi)$$

Sacamos factor común A^2 y sabiendo que:

$$\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

La expresión queda como:

$$x_0{}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Para saber si la ecuación es homogénea, comprobamos si los dos miembros tienen la misma ecuación de dimensiones:

$$[A] = \text{L}$$

$$\left[\sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}\right] = \sqrt{\text{L}^2 + \frac{\text{L}^2 \cdot \cancel{\text{T}^{-2}}}{\cancel{\text{T}^{-2}}}} = \sqrt{\text{L}^2} = \text{L}$$

Los dos miembros tienen dimensión de longitud, por lo que la ecuación es dimensionalmente homogénea.

35 Si se duplica la frecuencia angular de un MAS, indica como varía:

a) Su período.

b) La frecuencia.

c) La amplitud.

d) La fase inicial.

¿Qué relaciones de proporcionalidad observas entre estas magnitudes angulares?

a) Al duplicar la frecuencia angular, el período será la mitad:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega_1} \\[2ex] T_2 = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega_2} \end{array}\right\} \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \rightarrow T_2 = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_1} \rightarrow T_2 = \frac{T_1}{2}$$

Las magnitudes son inversamente proporcionales.

b) La frecuencia de oscilación será el doble:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = 2 \cdot \pi \cdot \omega_1 \\ f_2 = 2 \cdot \pi \cdot \omega_2 \end{array}\right\} \omega_2 = 2 \cdot \omega_1 \rightarrow f_2 = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \omega_1 \rightarrow f_2 = 2 \cdot f_1$$

Las magnitudes son directamente proporcionales.

c) La amplitud no varía, dado que no hay relación entre la amplitud y la frecuencia.

d) La fase inicial tampoco depende de la frecuencia angular.

Página 239

36 En un MAS, la velocidad, la pulsación, la amplitud y la elongación se relacionan según la expresión:

$$\mathbf{v = \omega^n \cdot \sqrt{A^2 - x^2}}$$

Determina *n* por análisis dimensional.

El análisis dimensional de la ecuación será:

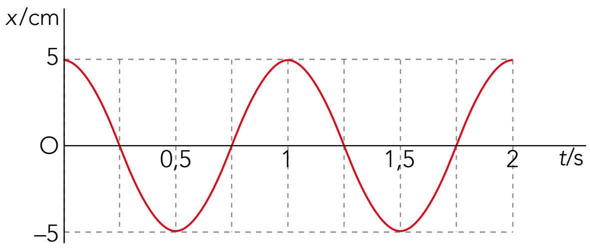
$$[v] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$$

$$\left[\omega^n \cdot \sqrt{A^2 - x^2}\right] = \mathrm{T}^{-n} \cdot \mathrm{L}$$

Igualando las expresiones se obtiene $n = 1$. Por tanto:

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

37 A partir de la siguiente gráfica de la elongación en un MAS:



a) Determina las ecuaciones que lo describen y las del MCU que lo genera como proyección sobre el eje *X* (en ambos casos, posición, velocidad y aceleración).

b) Representa estas ecuaciones en función del tiempo.

a) Las ecuaciones del movimiento son:

$$x(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

De la gráfica obtenemos que $A = 5$ cm. El tiempo que tarda en realizar una oscilación es 1 s; por tanto, la frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ s}} = 2 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

A $t = 0$, x es máxima, por lo que el desfase es:

$$\text{sen}(\omega \cdot t + \phi) = 1 \;\Rightarrow\; \text{sen}\,\phi = 1 \;\Rightarrow\; \phi = \frac{\pi}{2}$$

Así, las ecuaciones del movimiento son:

$$x(t) = 5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cdot \cos \pi \cdot t$$

$$v(t) = 10 \cdot \pi \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -10 \cdot \pi \cdot \text{sen}\,\pi \cdot t$$

$$a(t) = -20 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -20 \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi \cdot t$$

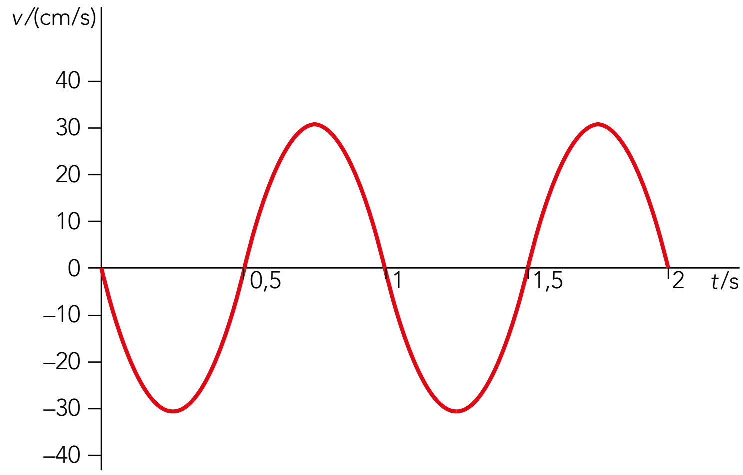
Las ecuaciones del MCU que lo generan como proyección son:

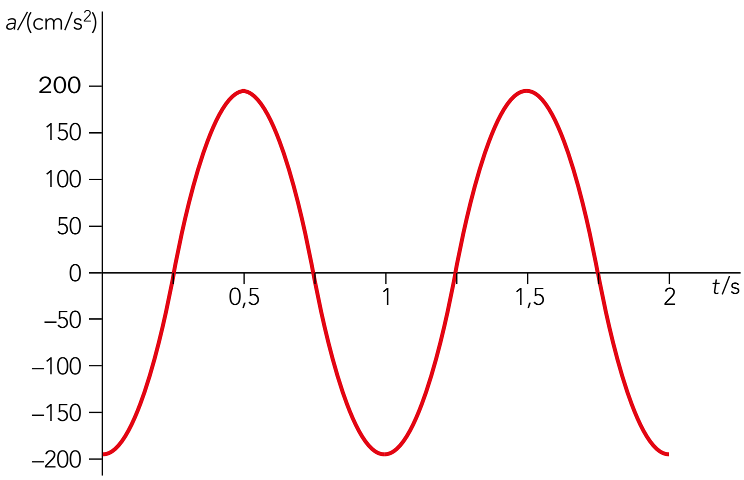
$$\vec{r}(t) = 5 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} + 5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -10 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} + 10 \cdot \pi \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j}$$

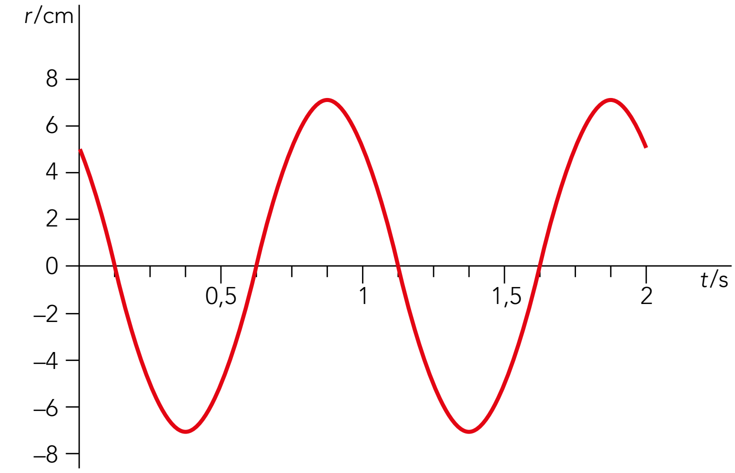
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -20 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} - 20 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j}$$

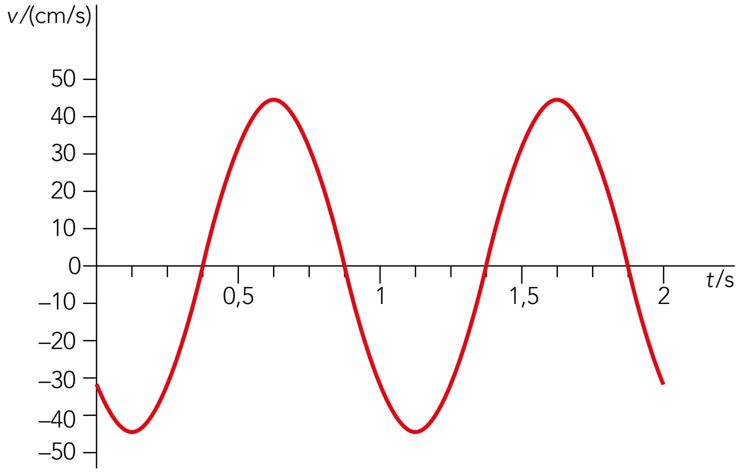
b) Gráficamente, las ecuaciones de velocidad y aceleración son:





Las gráficas correspondientes al MCU son:





38 Tenemos dos osciladores armónicos de ecuaciones, expresadas en el SI:

$$\mathbf{x_1 = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad x_2 = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Determina:

a) La posición inicial de ambos y el sentido en que comienzan a moverse.

b) El punto en el que se cruzan.

c) La diferencia de fase entre ambos movimientos.

a) La posición inicial corresponde con $t = 0$. Por tanto:

$$x_1 = A \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0 \; ; \; x_2 = A \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

El oscilador 1 se mueve hacia la izquierda, debido a que su desfase es positivo, y el oscilador 2 hacia la derecha, ya que su desfase es negativo.

b) El punto en el que se cruzan será cuando ambas elongaciones sean iguales.

$$x_1 = x_2 \rightarrow A \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Como se mueven hacia sentidos diferentes, se cruzan cuando pasan por la posición de equilibrio $x = 0$ cm.

c) La diferencia de fase entre ambos movimientos será la diferencia de sus correspondientes desfases iniciales:

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \text{ rad}$$

39 **Comenta la siguiente frase: «Un móvil con MAS puede ocupar posiciones iguales con fases distintas».**

La frase es cierta, pues la elongación toma el mismo valor para todas las fases en las que el seno (o el coseno) valga lo mismo. Lo que sí puede ocurrir es que las velocidades y las aceleraciones tengan sentido contrario cuando pasa por esa elongación.

40 **¿Existe alguna diferencia entre los estados de movimiento de un MAS en dos instantes en que sus fases son 163° y 1 603°?**

Como la diferencia de fases, de 1 440°, coincide con cuatro circunferencias completas, en los dos instantes el móvil tiene la misma fase, por lo que su estado de movimiento (elongación, velocidad y aceleración) es el mismo. La diferencia, no visible, está en que en el segundo instante el móvil ha descrito cuatro oscilaciones más que en el primero.