2 EL PROCESO DE MEDIDA. IMPRECISIONES

2.1. MEDIDAS DIRECTAS E INDIRECTAS

1. Busca información sobre la definición actual del estándar primario que permite medir el tiempo y compárala con la que corresponde a la unidad que utilizas habitualmente para medirlo.

Actualmente, el estándar primario de tiempo se define como la duración de 9 192 631 770 períodos de la vibración correspondiente a la transición entre dos niveles de energía del átomo de cesio-133. Su precisión es de 10^{-14} segundos, lo que equivale a un error de un segundo en tres millones de años.

Anteriormente, el patrón utilizado era la rotación de la Tierra. Este patrón no era lo suficientemente estable, ya que factores como las mareas o el deshielo de los polos hacían que, en un siglo, la duración del día variase, aproximandamente, 1,5 milisegundos.

2. Para medir longitudes, los estadounidenses utilizan la yarda. ¿Es unidad del Sistema Internacional? Para ellos, ¿cuál es el estándar primario de longitud? ¿Qué regla utilizan?

La yarda (yd) pertenece al Sistema Inglés de Unidades.

En este sistema, el estándar primario de longitud es la pulgada (*inch*), siendo la yarda un múltiplo de esta unidad:

$$1 \text{ yarda} = 36 \text{ pulgadas} = 3 \text{ pies}$$

La equivalencia con la unidad de longitud en el S.I. es:

$$1 \text{ yarda} = 0{,}9144 \text{ m}$$

2.2. LA NOTACIÓN CIENTÍFICA

1. Indica el número de cifras significativas de las siguientes medidas directas, una vez expresadas en unidades S.I.:

- **120,003 mg**
- **–45,7 ml**
- **12,85 años-luz**
- **22,00 s**
- **π mm**
- **9,797 cm**

En primer lugar, expresaremos el valor de estas medidas en unidades del S.I. Seguidamente, cuantificaremos las cifras significativas de acuerdo con las reglas expuestas en el libro de texto. De ese modo, resulta:

- $120{,}003$ mg = $120{,}003 \cdot 10^{-6}$ kg = $0{,}000120003$ kg
- $-45{,}7$ ml = $-45{,}7 \cdot 10^{-6}$ m^3 = $-0{,}0000457$ m^3
- $12{,}85$ años-luz = $12{,}85 \cdot (3\,600 \cdot 24 \cdot 365{,}25636042 \text{ s}) \cdot (299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) =$
  $= 1{,}216 \cdot 10^{17}$ m
- $22{,}00$ s: esta unidad está ya expresada en unidades S.I.
- π mm = $\pi \cdot 10^{-3}$ m
- $9{,}797$ cm = $0{,}09797$ m

La masa ha sido medida con seis cifras significativas; el volumen, con tres, y el tiempo, con cuatro.

Por su parte, la distancia, en el tercer caso (que se expresa en años-luz), se ha medido con cuatro cifras significativas. Por esta razón, al convertir la medida a metros, no podemos aumentar el número de cifras significativas, ya que ello supondría que una mera conversión de unidades aumenta la precisión. Por tanto, la expresaremos de nuevo con cuatro cifras significativas (porque supondremos que las constantes de conversión están medidas con toda exactitud y no introducen imprecisión en el resultado). La distancia del sexto caso ha sido medida con cuatro cifras significativas.

En cuanto al número pi, posee tantas cifras significativas como queramos. Hoy en día se han llegado a calcular varios millones de cifras significativas de dicho número.

2. Calcula el número de cifras significativas que se obtienen al realizar las siguientes operaciones algebraicas:

- **2,720 + 1,4856 + 12,02**
- **7,3456 – 12,128**
- **0,00010 + 0,125**

Para resolver esta actividad, el procedimiento general que utilizaremos es el siguiente:

a) Sumar las cantidades con todas las cifras decimales que posean.

b) Expresar el resultado con las mismas cifras decimales que el sumando que menos decimales tenga.

c) La última cifra se incrementa en una unidad si la cifra que le sigue es ≥ 5, y se deja como está si la cifra que le sigue es < 5.

De acuerdo con ese criterio, en las operaciones que nos proponen resulta:

$$2{,}720 + 1{,}4856 + 12{,}02 = 16{,}2256 \rightarrow 16{,}23$$

$$7{,}3456 - 12{,}128 = -4{,}7824 \rightarrow -4{,}782$$

$$0{,}00010 + 0{,}125 = 0{,}1251 \rightarrow 0{,}125$$

2.3. CÓMO ESTIMAR UNA MEDIDA

1. Suma las siguientes cantidades: $1{,}22 \cdot 10^{-6}$; $7{,}13 \cdot 10^{-7}$; $9{,}91 \cdot 10^{-6}$, y expresa adecuadamente el resultado, teniendo en cuenta que todas las medidas se han realizado con la máxima precisión posible.

Para sumar cantidades que se expresan por medio de potencias de diez, debemos hacer que todas las cantidades se expresen con la misma potencia decimal; hecho esto, sumamos la parte numérica de todas ellas. De este modo, resulta:

$$1{,}22 \cdot 10^{-6} + 0{,}713 \cdot 10^{-6} + 9{,}91 \cdot 10^{-6} = 11{,}843 \cdot 10^{-6} \rightarrow 11{,}84 \cdot 10^{-6}$$

El resultado se ha redondeado y se han dejado tan solo dos cifras decimales porque, a pesar de que la segunda medida alcanza una precisión mayor, debemos expresar el resultado con la imprecisión mayor de las medidas realizadas.

2. La distancia Tierra-Luna es, aproximadamente, de 380 000 km. ¿A qué distancia se encuentra el Sol de la Luna en un eclipse total de Sol? Considera para la distancia Sol-Tierra la que se indica en el texto. Expresa el resultado teniendo en cuenta la precisión con que se realiza cada medida.

Teniendo en cuenta que durante un eclipse de Sol los tres cuerpos se encuentran alineados, con la Luna ocupando la posición central, la distancia que nos piden será:

$$d_{Sol\text{-}Luna} = d_{Sol\text{-}Tierra} - d_{Luna\text{-}Tierra} = 1{,}5 \cdot 10^{11} - 3{,}8 \cdot 10^{8} = 1{,}4962 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Sin embargo, como vemos en el texto (página 34), la distancia Tierra-Sol se ha expresado con dos cifras significativas, por lo que el resultado que obtenemos no puede tener más. En consecuencia, hemos de redondear el resultado anterior; por tanto, la distancia que separará la Luna del Sol en esas condiciones será:

$$d_{Sol\text{-}Luna} = 1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

3. Estima la distancia que separa Madrid de Nueva York.

Para contestar a esta cuestión, podemos tener en cuenta que un avión tarda unas siete horas en realizar el recorrido, y que la velocidad a la que vuela suele estar en torno a $900 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Por tanto, la distancia que separa ambas ciudades debe ser de unos 6 300 km.

Observa que esta estimación se ha realizado de forma indirecta, utilizando dos conceptos, el de velocidad y el de tiempo de vuelo, que, juntos, nos permiten estimar la distancia. Por tanto, hemos realizado una aproximación indirecta.

4. ¿Qué cantidad de agua cabe en una bañera?

Podemos estimar el volumen de agua suponiendo que una bañera es, aproximadamente, un paralelepípedo, con unas medidas del orden de 1,5 m de largo, 0,6 m de alto y 0,7 m de ancho. Por tanto, el volumen resulta:

$$V_{bañera} = 1{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}63 \text{ m}^3 = 630 \text{ l}$$

5. ¿Qué cantidad de agua consumes en una ducha?

Cuando una persona se ducha, gasta, más o menos, una quinta parte del agua que gasta cuando se baña. Si cuando nos bañamos llenamos la bañera en sus tres quintas partes, el agua que consumimos en una ducha es del orden de:

$$V_{ducha} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot V_{bañera} = \frac{3 \cdot 630}{25} \simeq 76 \text{ l}$$

6. Estima la velocidad con que se mueve un caracol.

El orden de magnitud estará en unos pocos metros por hora.

7. Estima la masa de la mesa sobre la que estudias habitualmente.

Para estimar la masa de la mesa, partimos del dato de la densidad de la madera con que está fabricada. En nuestro caso, se trata de una mesa de madera de pino, cuya densidad es 500 kg · m^{-3}. Aplicaremos la expresión de la densidad:

$$d = \frac{m}{V} \rightarrow m = d \cdot V$$

para lo cual debemos estimar el volumen de madera que tiene la mesa.

Utilizando una cinta métrica, medimos las dimensiones del tablero y de las patas de la mesa, obteniendo:

— Tablero: (60 × 50 × 2,5) cm

— Pata: (3 × 3 × 75) cm

El volumen correspondiente a cada elemento es:

$$V_{tablero} = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}025 = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

$$V_{pata} = 0{,}03 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}75 = 0{,}675 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

Sumando los volúmenes de todas las patas que componen la mesa, resulta:

$$V_{mesa} = V_{tablero} + 4 \cdot V_{pata} = (7{,}5 + 4 \cdot 0{,}675) \cdot 10^{-3} = 10{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

Con este volumen, la masa de la mesa resulta:

$$m_{mesa} = d_{madera} \cdot V_{mesa}$$

$$m_{mesa} = 500 \cdot 10{,}2 \cdot 10^{-3} = 5{,}1\ kg$$

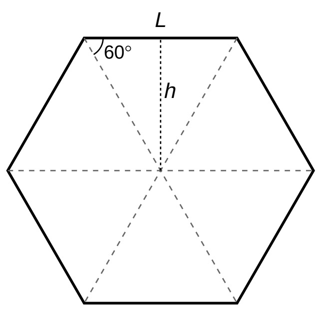
8. Demuestra que la expresión L^2 es también la del área de un rectángulo cuyos lados son la mitad y el doble de *L*, respectivamente.

Si tenemos un rectángulo de lados $L/2$ y $2 \cdot L$, el área es el producto de ambos:

$$A = \frac{L}{2} \cdot 2 \cdot L = L^2$$

El resultado, como puedes apreciar, coincide con el área de un cuadrado de lado *L*.

9. Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del producto de la longitud de la base por la altura, calcula el área de un hexágono regular.



Si trazas las tres diagonales que unen vértices opuestos del hexágono, verás que se cortan en el centro del polígono y dividen el hexágono en seis triángulos equiláteros.

Para calcular el área del polígono, calcularemos el área de uno de estos triángulos, de lado igual al del hexágono, y multiplicaremos el valor que obtengamos por el número de triángulos que tenemos (seis). De ese modo, resulta:

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (L \cdot sen 60°) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot L^2$$

$$A_{hexágono} = 6 \cdot A_{triángulo} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot L^2$$

10. Calcula la superficie total de un prisma recto hexagonal si el lado del hexágono mide *L* y la altura del prisma es *H*.

La superficie total será la suma de la superficie de las dos caras hexagonales del prisma y las seis caras rectangulares que unen las dos caras anteriores. La superficie de las caras hexagonales la hemos calculado en la actividad anterior. Vamos, por tanto, a calcular ahora la superficie de las caras rectangulares:

$$A_{cara\ rectangular} = L \cdot H$$

El área total de un prisma recto hexagonal será, por tanto:

$$A_{prisma} = 6 \cdot A_{cara\ rectangular} + 2 \cdot A_{cara\ hexagonal} =$$

$$= 6 \cdot L \cdot H + 2 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot L^2 = (6 \cdot H + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot L) \cdot L$$

11. Calcula el volumen que contiene una caja de cerillas. Para ello, ten en cuenta todos los inconvenientes a los que te enfrentas al tratarse de un problema real.

El volumen que contiene una caja de cerillas es, tan solo, la cantidad de espacio en el cual se encuentran las cerillas; esto es, el espacio que encierra la caja interior. Por tanto, no debemos caer en el error de medir las aristas de la caja exterior. Además de ello, para calcular adecuadamente el volumen, hemos de tener en cuenta el espesor de las paredes, así como las posibles imprecisiones y dispersiones de la medida que realicemos. Teniendo en cuenta estas consideraciones, el procedimiento para calcular el volumen es similar al empleado en casos anteriores.

2.4. EL PROCESO DE MEDIDA Y SU ERROR

1. Para medir la longitud de una mesa, se utiliza una regla que aprecia milímetros. Se realizan cinco medidas de la longitud y se obtienen los siguientes resultados, (en mm): 792, 794, 793, 795, 794.

a) ¿Qué valor tomaremos como representativo?

b) Calcula el error absoluto y expresa correctamente el resultado de la medida.

a) El valor que tomaremos como representativo será la media aritmética de las medidas:

$$\overline{x}_m = \frac{792 + 794 + 793 + 795 + 794}{5} = 793{,}6$$

La dispersión de cada medida se calcula a partir de la expresión:

$$\text{dispersión} = \left| \overline{x}_m - valor\ medio \right|$$

En este caso, la dispersión de cada medida es:

Medida	1	2	3	4	5
Dispersión	1,6	0,4	0,6	1,4	0,4

siendo la dispersión media:

$$\textit{Dispersión media} = \frac{1,6 + 0,4 + 0,6 + 1,4 + 0,4}{5} = 0,88 \text{ mm}$$

b) Como la dispersión media es menor que la sensibilidad del aparato de medida, el error absoluto será la sensibilidad del aparato, $\varepsilon_a = 1$ mm.

Para expresar correctamente el resultado de las medidas, habremos de redondear el valor obtenido como media, añadiendo a continuación el valor del error absoluto. De ese modo, la medida realizada se expresará en la forma:

$$\overline{x}_m = 793,6 \text{ mm} \simeq 794 \text{ mm}$$

$$d = (794 \pm 1) \text{ mm}$$

2. ¿Tiene sentido expresar el error absoluto con más de una cifra significativa? ¿Por qué?

No; no tiene sentido la segunda cifra significativa, si la primera es la cifra que expresa la imprecisión de la medida, excepto en el caso de que la primera cifra significativa sea 1, en cuyo caso tomaremos dos cifras significativas.

3. El número π es irracional. Sin embargo, 3,1415926 es una buena aproximación a π. ¿Qué error absoluto cometemos con esa aproximación?

¿Y si consideramos $\pi = 3,1416$?

El error máximo que se producirá en un número expresado con *n* cifras significativas será siempre una unidad de la última cifra significativa. Por tanto, al medir el número π con ocho cifras significativas, cometemos un error absoluto:

$$\varepsilon_a = 0,0000001 = 1 \cdot 10^{-7}$$

Este mismo argumento sirve para la segunda medida. En ese caso, el error absoluto es $0,0001 = 1 \cdot 10^{-4}$.

2.5. CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

1. Calcula el área de un círculo cuyo radio mide $R = 10,20 \pm 0,04$ m.

Expresa el resultado en metros cuadrados, acompañado de su correspondiente error absoluto.

Ten en cuenta que se trata de una medida indirecta; fíjate, si tienes dudas, en el ejemplo 2.

Radio del círculo: $R = (10,20 \pm 0,04)$ m

El área del círculo es: $S = \pi \cdot R^2$

No vamos a tener en cuenta el error que se comete al tomar el número π con cierto número de cifras decimales, pues, al utilizar π con los dígitos de la calculadora, dicho error es insignificante frente al del radio.

Operando como en el ejemplo 2 de la página 41 del libro del alumnado:

$$S \pm \Delta S = \pi \cdot (R \pm \Delta R)^2 = \pi \cdot R^2 \pm 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \Delta R \pm \pi \cdot (\Delta R)^2$$

Como en el cálculo del error queremos hallar el orden de magnitud de este, $(\Delta R)^2$ será despreciable, ya que $(\Delta R)^2 << \Delta R$. Por tanto:

$$S \pm \Delta S = \pi \cdot R^2 \pm 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \Delta R$$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$S \pm \Delta S = \pi \cdot 10{,}20^2 \pm 2 \cdot \pi \cdot 10{,}20 \cdot 0{,}04 = (326{,}85129 \pm 2{,}5635)\ \text{m}^2$$

A la hora de eliminar las cifras que no son significativas, hemos de tener en cuenta que si la primera cifra de error es menor que 5, se eliminan las siguientes, convirtiéndolas en ceros. De lo contrario, se incrementa en una unidad la primera cifra y se convierten en cero las restantes.

De acuerdo con ello, en este caso resulta:

$$\Delta S = 3\ \text{m}^2$$

El valor de la magnitud ha de tener la misma precisión que el error. Por tanto:

$$S = 327\ \text{m}^2$$

El resultado del ejercicio será:

$$S_{círculo} = (327 \pm 3)\ \text{m}^2$$

2. Calcula el error relativo que corresponde a la medida realizada en la cuestión anterior.

El error relativo que corresponde a la medida es:

$$\varepsilon_r(\%) = \frac{\Delta S}{S} \cdot 100 = \frac{3}{327} \cdot 100 = 0{,}92\%$$

2.6. REPRESENTACIONES GRÁFICAS

1. En el laboratorio se ha realizado una experiencia, obteniéndose las siguientes ternas (x, y, z) de resultados:

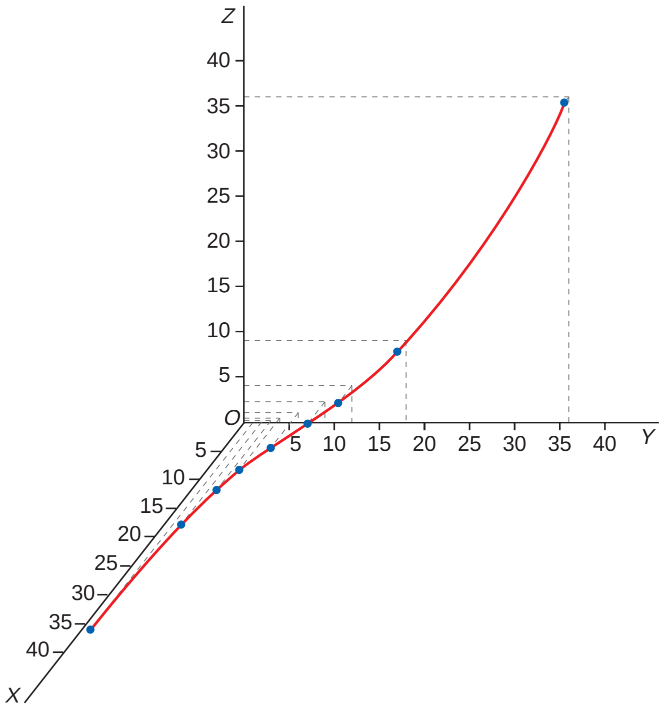
(1,0; 36; 36,0); (2,0; 18; 9,00); (3,0; 12; 4,00); (4,0; 9,0; 2,25); (6,0; 6,0; 1,00);

(9,0; 4,0; 0,44); (12; 3,0; 0,25); (18; 2,0; 0,11) y (36; 1,0; 0,03).

a) Representa los datos en una misma gráfica. Elige para ello los ejes adecuados, de forma que se aprecie bien el resultado.

b) ¿Existe alguna relación entre las variables?

a) Al representar estos resultados en un sistema de ejes X, Y y Z, obtenemos la gráfica siguiente:



b) Observando la serie de puntos, vemos que todos ellos cumplen la relación:

$$z = \frac{y}{x}$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. ¿En qué unidades se mide el error absoluto? ¿Y el error relativo?

Cuando hacemos una medida, x, cometemos siempre un error, Δx, que es la diferencia entre el valor exacto (que no conocemos) y el valor medido. A esa diferencia, Δx, la denominamos error absoluto (E_a). Por tanto, el error absoluto se expresa en las mismas unidades que la magnitud que estamos midiendo.

Por su parte, el error relativo muestra "el tamaño" del error absoluto, comparado con el valor de la medida. Por tanto, es una magnitud adimensional (sin dimensiones), ya que se obtiene como cociente entre el error absoluto y el valor de la medida, y ambas cantidades se expresan con las mismas unidades:

$$\textit{Error relativo}\text{ (adimensional)} = \frac{\textit{Error absoluto}\text{ (unidades de medida)}}{\textit{Valor de la medida}\text{ (unidades de medida)}}$$

2. Las medidas que se realizan con aparatos de medida, ¿son directas o indirectas?

Las medidas realizadas con aparatos de medida son directas. Cuando utilizamos un aparato de medida, establecemos una comparación que es, precisamente, el fundamento de la medida directa.

3. ¿Qué puedes hacer para asegurar que en la toma de medidas de una experiencia no estás cometiendo un error sistemático?

Es necesario asegurar que el aparato de medida ha sido calibrado previamente, para evitar los posibles errores sistemáticos.

4. Señala cinco magnitudes que puedes medir directamente y otras cinco que sueles calcular indirectamente.

Medidas directas:

- Longitud (con una regla o con una cinta métrica).
- Tiempo (con un reloj o con un cronómetro).
- Presión (con un barómetro o con un manómetro).
- Temperatura (con un termómetro).
- Masa (con una balanza).

Medidas indirectas:

- Trabajo.
- Potencia.
- Cantidad de movimiento.
- Superficie (utilizando las fórmulas matemáticas adecuadas).
- Volumen (utilizando las fórmulas matemáticas adecuadas).

5. Si dispones de un calibre y quieres medir la longitud total de una alcayata, ¿cómo será la medida, directa o indirecta?

Podemos considerar la alcayata como un clavo doblado formando un ángulo de 90°. Su longitud total la obtendremos como suma de dos longitudes perpendiculares entre sí, medidas independientemente con un calibre. Se trata, por tanto, de una medida indirecta.

6. ¿Es posible evitar por completo los errores sistemáticos?

En teoría, sí, ya que son errores que no dependen del azar, sino que los motivan causas muy concretas (un mal aparato de medida, un error en la comprensión de las instrucciones que hay que seguir para realizar una medida, etc.).

7. Indica tres situaciones, al menos, en las que se pueden producir errores sistemáticos.

- Al medir las dimensiones del tablero de una mesa utilizando una cinta métrica.
- Al medir la masa de una persona con una balanza de baño.
- Al medir la temperatura del cuerpo humano con un termómetro clínico.

8. Indica en qué unidades deben medirse las cantidades siguientes, para evitar números grandes o pequeños:

a) La masa de un balón de fútbol.

b) La potencia de una central nuclear.

c) El número de células de un ser humano.

a) La masa de un balón de fútbol la mediremos en gramos o en kilogramos.

b) La potencia de una central nuclear es de algunos cientos o miles de millones de watt. Por tanto, la mediremos en megawatt (MW) o gigawatt (GW).

c) El número de células de un ser humano es del orden de algunos billones (10^{12} células). No utilizaremos el prefijo "tera", porque estamos contando células; no estamos midiendo ninguna magnitud física asociada a ellas.

EJERCICIOS

9. Mide la masa de tu cuerpo con una balanza de baño y expresa correctamente el resultado.

Habitualmente, la sensibilidad de las balanzas de baño es de 0,1 kg; es decir, son capaces de apreciar décimas de kilogramo. Por tanto, un ejemplo de una medida de masa correctamente expresada sería:

$$m = (53{,}5 \pm 0{,}1)\ \text{kg}$$

10. Estima la distancia que hay entre Barcelona y San Francisco.

Observando un mapamundi, vemos que Barcelona y San Francisco se encuentran separadas por nueve meridianos terrestres, y que ambas ciudades están localizadas a una latitud cercana a los 40° Norte (existe una diferencia de aproximadamente 5° en la latitud de ambas ciudades, pero no la tendremos en cuenta para estimar la distancia que las separa).

Teniendo en cuenta el radio de la Tierra, de, aproximadamente, 6 400 km, y que dos meridianos consecutivos definen un ángulo de 15° ($\pi/12$ rad), estos nueve meridianos, en el ecuador, estarían separados por una distancia:

$$d = 9 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{12} = 15{,}1 \cdot 10^6\ \text{m}$$

Como estas dos ciudades no se encuentran en el ecuador, sino a 40° latitud Norte, la distancia que las separa es:

$$d_{\text{Barcelona-San Francisco}} = 15{,}1 \cdot 10^6 \cdot sen\,40° = 9{,}7 \cdot 10^6\ \text{m} = 9\,700\ \text{km}$$

11. Averigua el volumen de líquido contenido en un bote de bebida refrescante.

Utilizando un calibre, medimos el diámetro y la altura del bote de bebida. Puesto que habitualmente estos tipos de envase no son cilindros regulares, sino que presentan unos bordes que sobresalen más allá de las tapas superior e inferior del bote, debemos medir la altura efectiva de este; es decir, la distancia entre sus tapas. De esta forma, las medidas que obtenemos son:

$$d = 65 \text{ mm} = 0{,}065 \text{ m}$$

$$h = 100 \text{ mm} = 0{,}1 \text{ m}$$

El volumen contenido en el bote es, por tanto:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{0{,}065}{2}\right)^2 \cdot 0{,}1 = 3{,}318 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 33{,}2 \text{ cl}$$

12. Calcula el volumen de líquido que ingieres cuando tomas un vaso de leche. Explica cómo lo calculas.

Para realizar este cálculo, necesitamos un envase de leche de volumen conocido; por ejemplo, un brik de un litro de leche que podemos adquirir en cualquier tienda de alimentación.

Utilizando el vaso en el que habitualmente bebemos la leche, trasvasamos toda la leche del brik a una jarra (donde la guardaremos hasta que la consumamos). Será necesario rellenar cinco veces el vaso para poder vaciar completamente el brik. Por tanto, el volumen del vaso es:

$$V = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ l} = 200 \text{ ml} = 200 \text{ cm}^3$$

13. Calcula la distancia que recorres al subir un tramo de escalera para acceder a una vivienda. Utiliza para ello una regla de 20 cm de longitud, graduada en milímetros. ¿Se trata de una medida directa o indirecta? Calcula el error absoluto que cometes y expresa correctamente el resultado.

Simplificamos el ejercicio midiendo por separado la altura que subimos, h, y la distancia horizontal que avanzamos, d.

En un tramo de escaleras de 8 escalones, la altura entre dos escalones que medimos es:

$$h = (15{,}8 \pm 0{,}1) \text{ cm}$$

y cada escalón tiene un fondo:

$$d = (27{,}3 \pm 0{,}2) \text{ cm}$$

Obseva que esta medida tiene un error de 0,2 cm, puesto que la regla que hemos utilizado solo tiene 20 cm de longitud y hemos tenido que realizar dos medidas para hallar la longitud total.

La altura y la distancia horizontal recorrida al subir los 8 escalones es:

$$h_{total} = 8 \cdot (15{,}8 \pm 0{,}1) = (126{,}4 \pm 0{,}8) \text{ cm}$$

$$d_{total} = 8 \cdot (27{,}3 \pm 0{,}2) = (218{,}4 \pm 1{,}6) \text{ cm}$$

Ajustando las cifras significativas:

$$d_{total} = (218 \pm 2) \text{ cm}$$

Las dos distancias, obtenidas a partir de una medida parcial, se han medido de forma indirecta.

Los errores absolutos de cada una son:

$$\Delta h = 0{,}8 \text{ cm}$$

$$\Delta d = 2 \text{ cm}$$

14. Pedimos que nos pesen cierta cantidad de naranjas y la balanza marca 1,52 kg. ¿Cuál es el error absoluto de esta medida? ¿Y su error relativo?

La medida realizada, acompañada por su correspondiente error absoluto, es la siguiente:

$$m \pm \Delta m = (1{,}52 \pm 0{,}01) \text{ kg}$$

El error relativo es, en porcentaje:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta m}{m} \cdot 100 = \frac{0{,}01}{1{,}52} \cdot 100 = 0{,}66\%$$

15. Sube a una mesa y sujeta un trozo de tiza entre los dedos. Eleva la mano y, a continuación, deja caer la tiza hasta el suelo. Con la ayuda de un compañero o compañera, y utilizando un cronómetro que aprecie 10^{-2} s, mide el tiempo que tarda en caer. Repite la experiencia cinco veces y calcula, a continuación, el valor medio, el error absoluto y el error relativo de la medida.

Con los valores obtenidos al realizar la experiencia, los estudiantes procederán como se explica en el epígrafe 2.4. del libro del alumnado para resolver este ejercicio.

PROBLEMAS

16 Al medir el espesor de una chapa de acero, con ayuda de un micrómetro que aprecia 0,02 mm, se han obtenido los siguientes resultados:

N.º medida	Espesor (mm)
1	0,94
2	0,98
3	0,96

Calcula el valor medio, el error absoluto y el error relativo de esta serie de medidas. Expresa correctamente el espesor de la chapa.

FE DE ERRATAS DEL LIBRO DEL ALUMNADO: Los datos que se muestran en la tabla corresponden al espesor de la chapa (en mm), no a su masa.

El valor medio de las medidas es:

$$\bar{d} = \frac{0{,}94 + 0{,}98 + 0{,}96}{3} = 0{,}96 \text{ mm}$$

Para obtener el error absoluto, calculamos primero la desviación media de las medidas:

$$\Delta d_1 = |0{,}96 - 0{,}94| = 0{,}02 \text{ mm}$$

$$\Delta d_2 = |0{,}96 - 0{,}98| = 0{,}02 \text{ mm}$$

$$\Delta d_3 = |0{,}96 - 0{,}96| = 0 \text{ mm}$$

$$\overline{\Delta d} = \frac{0{,}02 + 0{,}02}{3} = 0{,}013 \text{ mm}$$

Como la desviación media es menor que la sensibilidad del aparato, el error absoluto coincide con esta última:

$$E_a = 0{,}02 \text{ mm}$$

El espesor de la chapa, correctamente expresado, es, por tanto:

$$d = (0{,}96 \pm 0{,}02) \text{ mm}$$

El error relativo de la medida es:

$$\varepsilon_r = \frac{E_a}{d} \cdot 100 = \frac{0{,}02}{0{,}96} \cdot 100 = 2{,}08\%$$

17 **Las medidas realizadas con la balanza de Mohr para determinar la densidad de un líquido más denso que el agua nos han proporcionado los siguientes resultados:**

N.° medida	Densidad (g/cm^3)
1	1,124
2	1,079
3	1,115
4	1,132
5	1,094

Calcula la densidad del líquido a partir de esta serie de medidas. Expresa correctamente el resultado, acompañado de sus error y halla su precisión, expresada en tanto por ciento.

La densidad del líquido vendrá determinada por el valor medio de las cinco medidas realizadas más la cota de error absoluto, que corresponderá a la sensibilidad del aparato o a la dispersión media de las medidas (la mayor de las dos).

A partir de los resultados obtenidos, vemos que la sensibilidad de la balanza es:

$$\varepsilon_a = \pm 0{,}001 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

El valor medio de las medidas es:

$$d_m = \frac{1{,}124 + 1{,}079 + 1{,}115 + 1{,}132 + 1{,}094}{5} = 1{,}1088 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

La desviación absoluta de cada una de las medidas es el valor absoluto de la diferencia entre el valor de la medida y el valor medio de todas ellas:

$$\Delta d_1 = |1{,}124 - 1{,}1088| = 0{,}0152 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$
$$\Delta d_2 = |1{,}079 - 1{,}1088| = 0{,}0298 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$
$$\Delta d_3 = |1{,}115 - 1{,}1088| = 0{,}0062 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$
$$\Delta d_4 = |1{,}132 - 1{,}1088| = 0{,}0232 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$
$$\Delta d_5 = |1{,}094 - 1{,}1088| = 0{,}0148 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Y la dispersión media resulta:

$$\varepsilon_d = \frac{0{,}0152 + 0{,}0298 + 0{,}0062 + 0{,}0232 + 0{,}0148}{5} = 0{,}01784 \text{ g/cm}^3$$

Puesto que la precisión de las medidas llega hasta las milésimas, la dispersión media se expresa en la forma:

$$\varepsilon_d = 0{,}018 \text{ g/cm}^3$$

Como la dispersión media es mayor que la sensibilidad del aparato, el error absoluto coincide con la dispersión media de las medidas:

$$E_a = \varepsilon_d = 0{,}018 \text{ g/cm}^3$$

El valor medio de las medidas, tomando cifras significativas hasta las milésimas, del mismo modo que se expresa el error absoluto, resulta:

$$d_m = 1{,}109 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Y, por tanto, la densidad del líquido, correctamente expresada, es:

$$d = (1{,}109 \pm 0{,}018) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

La precisión de esta medida es:

$$\varepsilon_r = \frac{E_a}{d_m} \cdot 100 = \frac{0{,}018}{1{,}109} \cdot 100 = 1{,}6\%$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado. Si tomamos cifras significativas hasta las centésimas, el resultado que se obtiene es: $d = (1{,}11 \pm 0{,}02) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

18. Al medir varias veces el tiempo invertido por un péndulo simple en describir 20 oscilaciones, hemos obtenido los siguientes resultados:

N.º medida	Tiempo (s)
1	23,52
2	23,18
3	23,27
4	23,12
5	23,07

Utiliza esta información para calcular el período de oscilación que corresponde a dicho péndulo. Expresa correctamente el resultado.

Por el modo en que están expresadas las medidas, vemos que la sensibilidad del cronómetro es de 0,01 s.

El valor medio de los tiempos medidos es:

$$\overline{t} = \frac{23,52 + 23,18 + 23,27 + 23,12 + 23,07}{5} = 23,232 \text{ s}$$

La dispersión de las medidas es:

$$\Delta t_1 = |23,232 - 23,52| = 0,288 \text{ s}$$

$$\Delta t_2 = |23,232 - 23,18| = 0,052 \text{ s}$$

$$\Delta t_3 = |23,232 - 23,27| = 0,038 \text{ s}$$

$$\Delta t_4 = |23,232 - 23,12| = 0,112 \text{ s}$$

$$\Delta t_5 = |23,232 - 23,07| = 0,162 \text{ s}$$

Y su valor medio:

$$\overline{\Delta t} = \frac{0,288 + 0,052 + 0,038 + 0,112 + 0,162}{5} = 0,1304 \text{ s}$$

Como este valor es mayor que la sensibilidad del aparato, este será el error absoluto de las medidas:

$$\Delta t = 0,13 \text{ s}$$

Teniendo en cuenta que nuestras medidas son las que resultan de medir el tiempo que tarda el péndulo en describir 20 oscilaciones, el período de este será:

$$T = \frac{\overline{t}}{20} = \frac{23,232}{20} = 1,1616 \text{ s}$$

Debemos redondear este resultado hasta las centésimas de segundo, puesto que ese es el valor de la última cifra significativa del error absoluto. Por tanto, el período del péndulo es:

$$T = (1,16 \pm 0,13) \text{ s}$$

19. Expresa correctamente las siguientes medidas. Utiliza el S.I. y expresa el resultado en notación científica y en notación decimal:

$$\mathbf{(128,345 \pm 0,038)\ km}$$

$$\mathbf{(0,00004567 \pm 0,0008)\ km \cdot h^{-1}}$$

$$\mathbf{(399\,000 \pm 280)\ litros}$$

$$\mathbf{(7,85 \pm 0,005)\ g \cdot cm^{-3}}$$

$$\mathbf{(1\,020 \pm 100)\ J \cdot s^{-1}}$$

Calcula, en cada caso, el error relativo que corresponde a cada medida.

Las medidas, correctamente expresadas, son:

$(128,345 \pm 0,038)$ km $\rightarrow$ $(128\,350 \pm 40)$ m $= (1,2835 \pm 0,0004) \cdot 10^5$ m

$(0,00004567 \pm 0,0008)$ km $\cdot$ h^{-1} $\rightarrow$ $(0,0000 \pm 0,0002)$ m $\cdot$ s^{-1} $= (0 \pm 2) \cdot 10^{-4}$ m $\cdot$ s^{-1}

$(399\,000 \pm 280)$ litros $\rightarrow (399{,}0 \pm 0{,}3)\ m^3 = (3{,}990 \pm 0{,}003) \cdot 10^2\ m^3$

$(7{,}85 \pm 0{,}005)\ g \cdot cm^{-3} \rightarrow (7.850 \pm 5)\ kg \cdot m^{-3} = (7{,}850 \pm 0{,}005) \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$

$(1\,020 \pm 100)\ J \cdot s^{-1} \rightarrow (1\,000 \pm 100)\ J \cdot s^{-1} = (1{,}0 \pm 0{,}1) \cdot 10^3\ J \cdot s^{-1}$

Y el error relativo, expresado en porcentaje, de cada una de ellas es:

$$\varepsilon_{relativo} = \frac{40}{128\,350} \cdot 100 = 0{,}031\%$$

$$\varepsilon_{relativo} = \frac{0{,}0002}{0} \cdot 100 \rightarrow \infty$$

$$\varepsilon_{relativo} = \frac{0{,}3}{399{,}0} \cdot 100 = 0{,}075\%$$

$$\varepsilon_{relativo} = \frac{5}{7\,850} \cdot 100 = 0{,}064\%$$

$$\varepsilon_{relativo} = \frac{100}{1\,000} \cdot 100 = 10\%$$

La segunda de las medidas merece un análisis más detallado. Observa que el valor de la medida (en torno a cero) es menor que el error absoluto que se comete al medir. La medida, bien expresada, nos indica que estamos midiendo con cuatro cifras significativas ¡la velocidad de un objeto que está parado! Ello explica que el error relativo sea enorme, ya que se comete sobre una medida cuyo valor numérico es nulo.

20. Las dimensiones de una plancha metálica rectangular son 120,05 mm por 49,25 mm y han sido medidas con un calibre que aprecia 0,5 mm.

a) Calcula el valor de la superficie de la plancha. Expresa correctamente el resultado.

b) Halla el error relativo de la medida.

Puesto que la sensibilidad del calibre es de ± 0,05 mm, las dimensiones de la plancha, correctamente expresadas, son:

$$x = (120{,}05 \pm 0{,}05)\ mm\ ;\ y = (49{,}25 \pm 0{,}05)\ mm$$

a) Para calcular la superficie de la plancha, procedemos como en el ejemplo 2 de la página 41 del libro del alumnado:

$$S \pm \Delta s = (x \pm \Delta x) \cdot (y \pm \Delta y)$$

donde:

$$S = x \cdot y\ ;\ \Delta s = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Despreciando el término de segundo orden en la expresión del error absoluto y sustituyendo valores, obtenemos:

$$S = 120{,}05 \cdot 49{,}25 = 5\,912{,}4625\ mm^2$$

$$\Delta s = 120{,}05 \cdot 0{,}05 + 49{,}25 \cdot 0{,}05 = 8{,}465\ mm^2$$

Puesto que la expresión del error absoluto solo admite una cifra significativa, resulta:

$$\Delta s = 9\ mm^2$$

Por tanto, la superficie de la plancha es:

$$S \pm \Delta s = (5\,912 \pm 9)\ \text{mm}^2$$

b) El error relativo que cometemos, expresado en porcentaje, es:

$$\varepsilon_r = \frac{9}{5\,912} \cdot 100 = 0{,}15\%$$

21. Calcula el volumen de una esfera cuyo radio mide 5,00 cm y se ha medido con una imprecisión de 0,05 cm.

Para estimar el error que se produce en el cálculo del volumen, debido al error que introduce la medida del radio, podemos desarrollar la fórmula del volumen de una esfera. De ese modo:

$$V \pm \Delta V = \frac{4}{3} \cdot (\pi \pm \Delta\pi) \cdot (R \pm \Delta R)^3$$

$$V \pm \Delta V = \frac{4}{3} \cdot (\pi \pm \Delta\pi) \cdot (R^3 \pm 3 \cdot R^2 \cdot \Delta R \pm 3 \cdot R \cdot \Delta R^2 \pm \Delta R^3)$$

Si despreciamos los incrementos de segundo y tercer orden y suponemos que π es suficientemente preciso, entonces $\Delta\pi \simeq 0$, y la expresión anterior queda en la forma:

$$V \pm \Delta V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R^3 \pm 3 \cdot R^2 \cdot \Delta R) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \pm 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \Delta R$$

donde el segundo sumando representa el error absoluto:

$$\Delta V = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \Delta R$$

Por tanto, sustituyendo valores, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 523{,}598\ \text{cm}^3 \\ \Delta V = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 0{,}05 = 15{,}708\ \text{cm}^3 \end{array}\right\} \rightarrow V \pm \Delta V = (520 \pm 20)\ \text{cm}^3$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

22. En el problema anterior, ¿qué masa de agua cabe dentro de la esfera, suponiendo que el volumen calculado coincide con el de agua que esta admite en su interior?

Dato: Densidad del agua: 1 000 ± 1 kg · m^{-3}

Para calcular la masa, tendremos en cuenta que:

$$m = V \cdot d \rightarrow m \pm \Delta m = (V \pm \Delta V) \cdot (d \pm \Delta d)$$

Operando esta última expresión y despreciando los infinitésimos de segundo orden, resulta:

$$m \pm \Delta m = V \cdot d + d \cdot \Delta V + V \cdot \Delta d + \Delta V \cdot \Delta d \rightarrow \begin{cases} m = V \cdot d \\ \Delta m = d \cdot \Delta V + V \cdot \Delta d \end{cases}$$

Sustituyendo ahora los valores conocidos, obtenemos los siguientes valores:

$$m = 523{,}598 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3 \cdot 1\,000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} = 0{,}523598\ \text{kg}$$

$$\Delta m = 1\,000 \cdot 15{,}708 \cdot 10^{-6} + 523{,}598 \cdot 10^{-6} \cdot 1 =$$

$$= 0{,}015708 + 0{,}000523598 = 0{,}016231598\ \text{kg}$$

Expresando ahora el valor de la medida con una sola cifra significativa para el error, el resultado que obtenemos para la masa de agua es:

$$m \pm \Delta m = (0{,}52 \pm 0{,}02)\ \text{kg}$$

23. Calcula el error relativo que cometemos en las medidas de los dos problemas anteriores. ¿Cuál de las dos medidas es "mejor"? ¿Por qué?

El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor aceptado como bueno para la medida. Por tanto, en los dos casos anteriores, el error relativo, expresado en porcentaje, es:

$$\varepsilon_{volumen} = \frac{20}{520} \cdot 100 = 3{,}85\%$$

$$\varepsilon_{masa} = \frac{0{,}02}{0{,}52} \cdot 100 = 3{,}85\%$$

El error absoluto no proporciona la calidad de una medida; esta viene dada por el error relativo, cociente entre el error absoluto y la medida probable que obtenemos. En este caso, el error relativo asociado a ambas medidas es el mismo; por tanto, la bondad de la medida es igual.

24. Con ayuda de una regla graduada en 0,5 mm, medimos el diámetro de la base y la altura de un bote que contiene melocotón en almíbar. Los resultados que obtenemos son 10,05 cm para el diámetro y 11,80 cm para la altura.

Calcula su área lateral. Expresa correctamente el resultado.

La sensibilidad de la regla, en centímetros, es ±0,05 cm. Por tanto, el diámetro y la altura del bote de melocotón son:

$$d = (10{,}05 \pm 0{,}05)\ \text{cm}$$

$$h = (11{,}80 \pm 0{,}05)\ \text{cm}$$

El área lateral del bote la calculamos mediante la expresión:

$$S = \pi \cdot d \cdot h \rightarrow S = \pi \cdot 10{,}05 \cdot 11{,}80 = 372{,}56147\ \text{cm}^2$$

Para calcular el error absoluto que afecta a esta medida, tendremos en cuenta que el error relativo es aditivo:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h}$$

Como el número π puede ser utilizado con la precisión que deseemos (se conocen cientos de miles de cifras significativas para este número), el término $\Delta\pi/\pi$ es despreciable frente a los otros, con lo que, finalmente, queda:

$$\Delta s = s \cdot \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h}\right)$$

$$\Delta s = 372{,}56147 \cdot \left(\frac{0{,}05}{10{,}05} + \frac{0{,}05}{11{,}80}\right) = 3{,}4322 \text{ cm}^2$$

Si tomamos solo una cifra significativa:

$$\Delta s = 3 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área lateral del bote es:

$$S = (373 \pm 3) \text{ cm}^2$$

25. Un solar tiene forma de triángulo rectángulo. Sus catetos miden 32,24 m y 12,53 m, respectivamente, y han sido medidos con una cinta métrica graduada en centímetros. Halla el valor de la superficie, su error absoluto y su error relativo. Expresa correctamente el resultado.

La sensibilidad de la cinta métrica con que se han realizado las medidas es de 0,01 m. Por tanto, la longitud de los catetos, correctamente expresada, es:

$$x_1 = (32{,}24 \pm 0{,}01) \text{ m} \;\; ; \;\; x_2 = (12{,}53 \pm 0{,}01) \text{ m}$$

La superficie del solar triangular viene dada por:

$$S \pm \Delta S = \frac{1}{2} \cdot (x_1 \pm \Delta x_1) \cdot (x_2 \pm \Delta x_2)$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$S \pm \Delta S = \frac{1}{2} \cdot (x_1 \cdot x_2 \pm x_1 \cdot \Delta x_2 \pm x_2 \cdot \Delta x_1 \pm \Delta x_1 \cdot \Delta x_2)$$

Teniendo en cuenta que la superficie del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot x_2 \rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 32{,}24 \cdot 12{,}53 = 201{,}9836 \text{ m}^2$$

El error absoluto vendrá dado por:

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot (x_1 \cdot \Delta x_2 + x_2 \cdot \Delta x_1 + \Delta x_1 \cdot \Delta x_2)$$

Despreciamos el término $\Delta x_1 \cdot \Delta x_2$ por ser de segundo orden, con lo que resulta:

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot (x_1 \cdot \Delta x_2 + x_2 \cdot \Delta x_1)$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot (32{,}24 \cdot 0{,}01 + 12{,}53 \cdot 0{,}01) = 0{,}2239 \text{ m}^2 \approx 0{,}2 \text{ m}^2$$

Aplicando el criterio de las cifras significativas, el valor de la superficie correctamente expresado es:

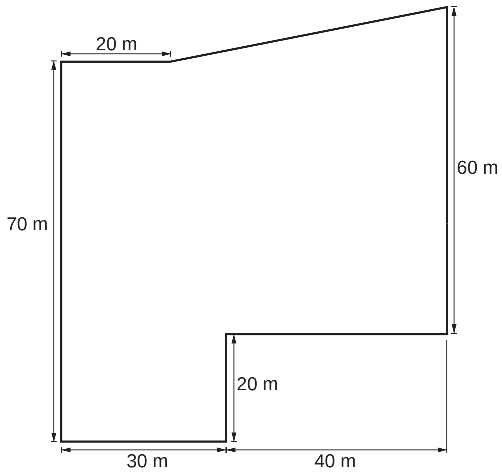
$$S = (202{,}0 \pm 0{,}2) \text{ m}^2$$

El error relativo que cometemos, expresado en porcentaje, es:

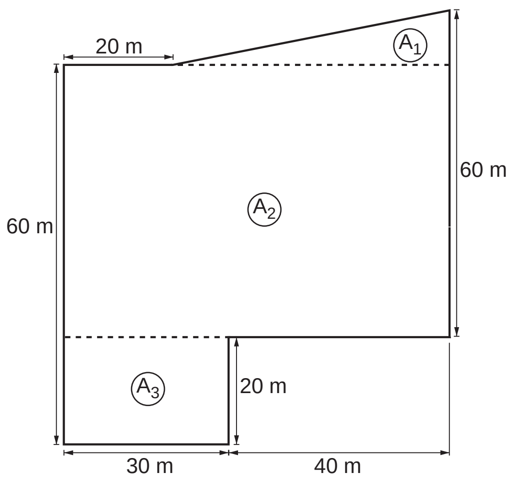
$$\varepsilon_r = \frac{0{,}2}{202{,}0} \cdot 100 = 0{,}10\%$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

26. ¿Cómo medirías la superficie de un campo de cultivo de forma irregular? Aplica ese criterio al campo de la figura y estima el error que cometes, si las distancias están medidas en metros y la precisión con que se ha medido cada una es de 1 m.



El método consiste en subdividir el campo en porciones más pequeñas de forma triangular o rectangular:



Para calcular el área del campo, sumaremos las áreas de cada una de las porciones señaladas en la figura anterior, a las que acompañaremos del error cometido. Después, sumaremos todas las áreas y todos los errores para obtener, de ese modo, el área total y su error correspondiente.

Al estudiar la unidad, has visto cómo se mide el área de una figura geométrica y cómo se expresa el resultado, acompañado de su error absoluto. Por tanto, procederemos ahora del mismo modo:

$$S \pm \Delta S = x \cdot y + \Delta x \cdot y + \Delta y \cdot x + \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\text{Como } \Delta x \cdot \Delta y \simeq 0 \rightarrow \begin{cases} S = x \cdot y \\ \Delta S = \Delta x \cdot y + \Delta y \cdot x \end{cases}$$

Calculemos ahora el área de cada una de las zonas en que hemos dividido la figura, con su correspondiente error. Recuerda que el error debemos expresarlo con una única cifra significativa. Por tanto:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10 = 250 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 70 \cdot 50 = 3\,500 \text{ m}^2$$

$$A_3 = 30 \cdot 20 = 600 \text{ m}^2$$

El área total del campo es:

$$A = \sum_{i=1}^{3} A_i = 4\,350 \text{ m}^2$$

El error que afecta al área de cada una de estas zonas es, expresado con una sola cifra significativa:

$$\Delta A_1 = \frac{1}{2} \cdot (50 \cdot 1 + 10 \cdot 1) = 30 \text{ m}^2 \rightarrow A_1 \pm \Delta A_1 = (250 \pm 30) \text{ m}^2$$

$$\Delta A_2 = 70 \cdot 1 + 50 \cdot 1 = 120 \text{ m}^2 \rightarrow A_2 \pm \Delta A_2 = (3\,500 \pm 120) \text{ m}^2$$

$$\Delta A_3 = 30 \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 50 \text{ m}^2 \rightarrow A_3 \pm \Delta A_3 = (600 \pm 50) \text{ m}^2$$

Por tanto:

$$A \pm \Delta A = \sum_{i=1}^{3} (A_i \pm \Delta A_i) = (4\,350 \pm 200) \text{ m}^2 \rightarrow A_{total} = (4\,400 \pm 200) \text{ m}^2$$

El resultado nos indica que el valor que corresponde realmente a la superficie del terreno estaría comprendido entre 4 200 y 4 600 m^2, siendo el valor más probable, 4 400 m^2.

27. **Una de las unidades que utilizas con frecuencia es la que sirve para medir longitudes. Todos tenéis una regla, generalmente de plástico. Compara las unidades de tu regla con las de las reglas de tus compañeros. Para ello, superponlas alineando las escalas.**

¿Son exactamente iguales las unidades? ¿Qué reglas parecen mejor construidas? ¿Qué podemos decir acerca de las unidades que se indican en instrumentos "corrientes" como la regla que estamos utilizando?

Las dimensiones de las unidades no son exactamente iguales. Al compararlas, vemos que existe una desviación entre unas escalas y otras que es fácilmente perceptible. Ello hace que las rayas no coincidan exactamente.

Las unidades corrientes de medida no son exactas. Ello se debe a que las calibraciones de los instrumentos de medida (que fijan las escalas) no son iguales, lo que se explica si tenemos en cuenta lo difícil (y caro) que es hacer una buena calibración.

Podemos concluir, por tanto, a partir de este hecho, que nuestras medidas siempre vienen afectadas de un error adicional, ajeno al propio proceso de medida. Es un error introducido por el aparato de medida, no por la persona que realiza la medición, y es imposible evitarlo a no ser que cambiemos nuestro aparato por otro con un certificado de calibración, y mejoremos, de ese modo, la calidad de la medida.

28 **¿Cuántos clavos necesitaremos para clavar una tabla de 50 cm × 30 cm, si queremos que haya un clavo en cada extremo de la tabla y el resto estén distribuidos de forma que la distancia máxima entre ellos sea mayor que 5 cm y menor que 6 cm?**

El número **mínimo** de clavos será el siguiente:

— Lado grande (50 cm):

- Colocamos un clavo en el extremo.
- A continuación, clavamos ocho clavos separados uno del otro y del clavo del extremo por una distancia igual a 5,56 cm (observa que si ponemos un clavo menos, debemos separarlos más de 6 cm).

Clavos totales en el lado grande:

$$N_1 = 1 + 8 = 9 \text{ clavos}$$

— Lado pequeño (30 cm):

- Comenzamos poniendo un clavo en el extremo, como hicimos en el lado grande.
- Clavamos cuatro clavos separados uno del otro y del clavo del extremo por una distancia igual a 6 cm (observa que si ponemos un clavo menos, debemos separarlos más de 6 cm).

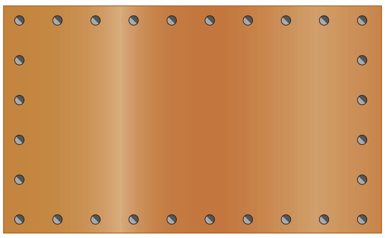
Clavos totales en el lado pequeño:

$$N_2 = 1 + 4 = 5 \text{ clavos}$$

Por tanto, si el número de lados grandes y pequeños es 2 en ambos casos, el número total de clavos que deberemos clavar en la tapa es:

$$N = 2 \cdot N_1 + 2 \cdot N_2 = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = 28 \text{ clavos}$$

En la figura se observa que, al haber un clavo en cada esquina de la tabla, es compartido por dos lados, con lo cual el número de clavos en el lado más largo es 10, y en el más corto, 6, aunque, como hemos visto, el número total de clavos no es 32, como parece desprenderse de estas palabras, sino 28, resultado de descontar de 32 los 4 clavos "repetidos".



NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.