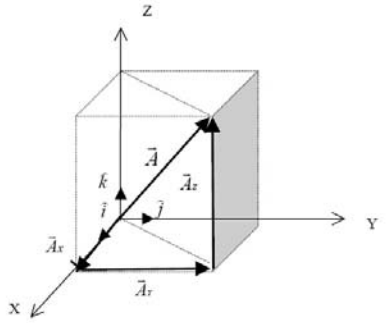
Tema 1:

Repaso de Cinemática

Tema I: Cinemática

1.- El movimiento y su descripción.

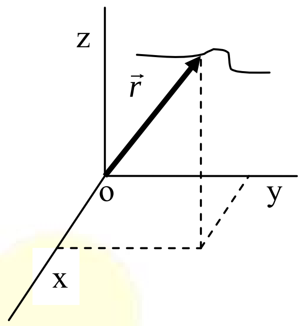
Se dice que un cuerpo se mueve cuando cambia su posición respecto de la de otros, supuestos fijos, o que se toman como referencia. El movimiento es, por tanto, cambio del vector posición de un punto respecto a un ***sistema de referencia*** que se considera fijo con el tiempo.



Entendemos sistema de referencia, el punto respecto del cual vamos a estudiar el movimiento. En nuestro caso utilizaremos como sistema de referencia los ejes de coordenadas cartesianos.

El estado de reposo o de movimiento de un cuerpo no es, por tanto, *absoluto* o independiente de la situación del observador, sino ***relativo***, es decir, ***depende del sistema de referencia*** desde el que se observe.

La idea de movimiento se asocia a la necesidad de un sistema de referencia que, como norma general, se concreta con una terna de ejes coordenados cartesianos cuyo origen no está sometido a aceleración alguna (es un punto fijo o posee movimiento rectilíneo y uniforme). Estos tipos de sistemas de referencia se denominan ***inerciales***.



1.2.- Vector de posición: Indica la posición de una partícula o cuerpo respecto al sistema de referencia. En coordenadas cartesianas rectangulares, sus componentes X, Y y Z pueden ser estudiadas por separado. Generalmente se designa por el vector $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ que va desde el origen del sistema de coordenadas O, hasta el lugar donde se encuentra la partícula.

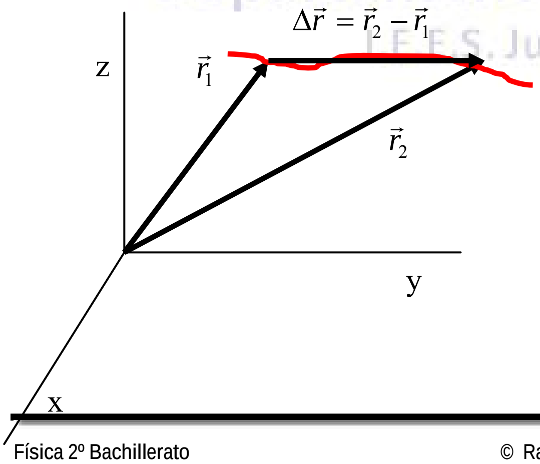
Se dice que una partícula se mueve respecto a un sistema de coordenadas, cuando su vector de posición cambia a medida que transcurre el tiempo.
En el sistema internacional (SI), el vector de posición se expresa en [m].

1.3.- Trayectoria: Se llama trayectoria a la línea que describe el punto que representa al cuerpo en movimiento, conforme va ocupando posiciones sucesivas a lo largo del tiempo. Es una magnitud escalar, normalmente medida en metros (S.I.) o en kilómetros.

- Según sea la forma de su trayectoria, los movimientos se clasifican en ***rectilíneos y curvilíneos***.

1.4.- Vector desplazamiento: Si una partícula se mueve desde un punto a otro, el vector desplazamiento, representado por $\Delta\vec{r}$, se define como el vector que va desde la posición inicial a la final, es decir:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}}$$



En general el desplazamiento no coincide con la trayectoria que sigue la partícula.
En el sistema Internacional, el desplazamiento se expresa en [m].

1.5.- Ecuación de movimiento: Un movimiento queda definido cuando se conoce su ecuación; es decir una expresión matemática que permita ***determinar*** en cada instante ***la posición del móvil***. La expresión

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ es característica de cada movimiento y recibe el nombre de ***ecuación del movimiento.***

2.- La Velocidad:

La descripción de un movimiento supone el conocer algo más que su trayectoria. Una característica que añade una información importante sobre el movimiento es la velocidad.

2.1.- Velocidad media: Supongamos que en cierto instante t_1, una partícula se encuentra en la posición definida por el vector de posición $\vec{r}_1$ y luego en el instante t_2 se encuentra en la posición definida por $\vec{r}_2$. El intervalo de tiempo que ha transcurrido es $\Delta t = t_2 - t_1$ y el desplazamiento que ha efectuado la partícula es $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Se denomina velocidad media a: $\boxed{\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$ un vector dirigido en la dirección de $\Delta\vec{r}$ y cuyo módulo no tiene que coincidir con el cociente escalar $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, conocido como ***celeridad media***.

En el sistema internacional, la velocidad se expresa en [m/s].

2.2.- Velocidad instantánea: En general, la velocidad con la que se mueve un coche, un avión o una motocicleta, por ejemplo, varía de un instante a otro. Ello queda reflejado en el movimiento de la aguja de sus respectivos velocímetros. El valor que toma la velocidad en un instante dado recibe el nombre de ***velocidad instantánea***.

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

En el caso de que $\vec{r}$ venga expresado en función de las componentes rectangulares $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, el vector velocidad vendrá dado por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\hat{i} + \frac{dr_y}{dt}\hat{j} + \frac{dr_z}{dt}\hat{k}$$

Y en consecuencia:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt}, v_y = \frac{dr_y}{dt}, v_z = \frac{dr_z}{dt}$$

siendo el valor de la ***celeridad***

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

2.3.- Velocidad Angular: Si el móvil describe una trayectoria circular, el arco recorrido en un instante dado viene definido por la expresión: $\Delta S = \Delta\varphi \cdot r$, siendo $\Delta\varphi$ el ángulo descrito por el vector de posición y *r* el radio de la curva a la que pertenece la trayectoria.
Según esto:

$$\boxed{v = \frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi \cdot r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r = \varpi \cdot r}$$

Vectorialmente:

$$\vec{v} = \vec{\varpi} \wedge \vec{r}$$

La expresión $\varpi = \frac{d\varphi}{dt}$ se denomina velocidad angular, y en el S.I. se mide en [rad/seg].

2.4.- Periodo: (T) Es el tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta completa en el movimiento circular y se mide en segundos.

2.5.- Frecuencia: Mide el número de vueltas que recorre un móvil en un segundo en el movimiento circular. Es la magnitud inversa al periodo.

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$

Ejemplo 1: **Las ecuaciones paramétricas de un movimiento son:** $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t + \frac{1}{6} \\ y = 2t + 4 \end{cases}$

Deducir:

a) La ecuación del movimiento.
b) La ecuación de la trayectoria.
c) La celeridad en el instante 2 segundos.

a) $\vec{r} = \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{6}\right)\hat{i} + (2t+4)\hat{j}$

b) Despejando t en la segunda y sustituyendo en la primera se tiene: $y = 6x + 3$, que corresponde a la ecuación de una recta.

c) $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}\frac{m}{s}$; $v_y = \frac{dy}{dt} = 2\frac{m}{s}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\frac{m}{s}\right)^2 + \left(2\frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{9}}\frac{m}{s}$$

3.- La aceleración.

La aceleración es la magnitud que mide la variación del vector velocidad respecto del tiempo.

3.1.- Aceleración media: Considere que en los instantes t_1 y t_2, las velocidades instantáneas de la partícula son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Es decir, en el intervalo de tiempo Δt, la partícula sufre una variación de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Por lo tanto, la ***aceleración media*** viene dada por:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

Y es una magnitud vectorial cuyo módulo en el S.I. se mide en [m/s^2].

3.2.- Aceleración instantánea: Es la derivada del vector velocidad (derivada segunda del vector de posición) respecto del tiempo.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

3.3.- Componentes intrínsecas de la aceleración: Tomando el vector velocidad como un módulo por un vector unitario, es decir, como:

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \hat{u}$$

y derivando se tiene que, utilizando la regla del producto para las derivadas,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\left(\frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\right)\cdot\hat{u}}_{\text{tangencial}} + \underbrace{\|\vec{v}\|\cdot\left(\frac{d\hat{u}}{dt}\right)}_{normal}$$

De estas dos componentes la primera se denomina ***aceleración tangencial*** porque, como se desprende de su propia definición, su dirección es la del vector unitario $\hat{u}$ y es, por tanto, tangente a la trayectoria. La otra componente es la ***aceleración normal*** o centrípeta.

De la aceleración tangencial diremos que su módulo es

$$\boxed{\|\vec{a}_t\| = \frac{d}{dt}\|\vec{v}\|}$$

y su dirección

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Esta $\vec{a}_t$ se encarga de "medir" la variación de la velocidad sin importarle su dirección ni sentido, sino solo su módulo, es decir, su "intensidad".

La segunda se denomina ***aceleración normal***, y mide la variación de la dirección del vector velocidad, su módulo es:

$$\boxed{\|\vec{a}_n\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}}$$

siendo R el radio de curvatura de la trayectoria, ya que su dirección es siempre perpendicular a la trayectoria y apunta hacia el interior de la "curva".

De acuerdo con lo explicado para las componentes rectangulares de un vector:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Los vectores $\vec{a}_n$ y $\vec{a}_t$ reciben el nombre de ***componentes intrínsecas de la aceleración***.

> ***Significado físico de las aceleraciones tangencial y normal:***
>
> - La aceleración tangencial surge como consecuencia de la variación del módulo del vector velocidad.
> - La aceleración normal se debe a la variación del vector velocidad.
> - Se deduce, como consecuencia, que los movimientos uniformes carecen de aceleración tangencial y los movimientos rectilíneos no poseen aceleración normal.

3.4.- Aceleración Angular: En todos los movimientos circulares existe un cambio en el valor de la velocidad angular del móvil (y en consecuencia, de su velocidad lineal), cumpliéndose para valores medios:

$$\boxed{\alpha_m = \frac{\Delta\varpi}{\Delta t}}$$

Siendo Δt el intervalo empleado en el cambio de la velocidad angular, y α_m la llamada ***aceleración angular media*** cuyo valor se expresa en [rad/s^2] (S.I.).

Para valores instantáneos:

$$\alpha = \frac{d\varpi}{dt}$$

Y como $\varpi = \frac{v}{r}$

$$\alpha = \frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dv}{dt} = \frac{a_t}{r}$$

O también: $a_t = \alpha \cdot r$

Ejemplo 2: **El vector de posición en un punto, en función del tiempo está dado por:** $\vec{r} = t\hat{i} + (t^2 + 2)\hat{j} + t^2\hat{k} \quad (S.I.)$

Calcula su posición, su velocidad y su aceleración en el instante t=2 segundos.

La ecuación de la velocidad es: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} + 2t\hat{j} + 2t\hat{k} \quad \frac{m}{s}$

La ecuación de la aceleración es: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\hat{j} + 2\hat{k} \quad \frac{m}{s^2}$

Sustituyendo en ellas t=2:

$$\vec{r}_2 = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k} \quad m$$
$$\vec{v}_2 = \hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k} \quad \frac{m}{s}$$
$$\vec{a}_2 = 2\hat{j} + 2\hat{k} \quad \frac{m}{s^2}$$

4.- Clasificación de los movimientos

Según sea la trayectoria que describa un móvil, el movimiento de éste puede ser: rectilíneo ó circular. Y según sea su aceleración (tangencial o normal) puede ser: uniforme, uniformemente acelerado o acelerado no uniformemente. El siguiente cuadro resume tal clasificación:

Movimiento	Ac. Normal	Ac. Tangencial
Rectilíneo y uniforme	0	0
Rectilíneo uniformemente variado	0	Constante
Circular y uniforme	Constante	0
Circular uniformemente variado	Variable	Constante

4.1.- Rectilíneo y uniforme (MRU): En este tipo de movimiento no existen ni aceleración normal, ni tangencial, y por tanto la celeridad es constante. En consecuencia:

$$S = \int v \cdot dt = v \int dt = vt + K$$

La constante K representa el valor de s en el origen de tiempos, o espacio inicial.

La ecuación del espacio recorrido es:

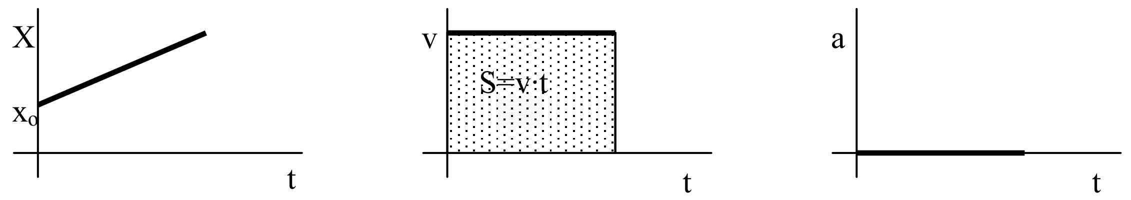
$$X = X_0 + v \cdot t$$

Que nos demuestra que el espacio recorrido por el móvil es directamente proporcional a su celeridad y al tiempo que emplea en el movimiento.

Gráficos:

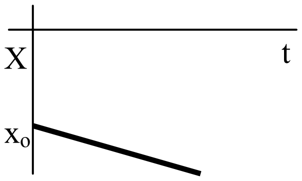
• Para el caso particular de un móvil moviéndose con celeridad V en el sentido positivo del eje X, tal que en $t = 0$ pasa por la posición $\vec{s} = x_o \hat{i}$ hacia la derecha del eje:

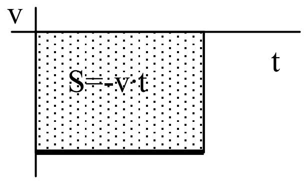
Gráfico S-t	Gráfico V-t	Gráfico a-t
Posición $X=X_0+V\cdot t$	Celeridad V=Cte.	Aceleración a=0

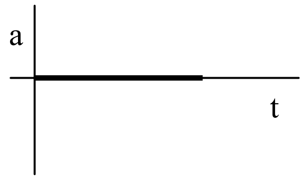


• Para el caso de un móvil moviéndose con celeridad V en el sentido negativo del eje X, tal que en *t* = 0 pasa por la posición $\vec{s} = -x_o\hat{i}$ hacia la derecha del eje:

Gráfico S-t	Gráfico V-t	Gráfico a-t
Posición X=-X_0-V·t	Celeridad V=-Cte.	Aceleración a=0







4.2.- Rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.): En este tipo de movimiento la aceleración tangencial es cte.

$$v = \int a\cdot dt = a\int dt = a\cdot t + K$$

Donde k representa la velocidad del móvil en el instante t=0, o velocidad inicial V_o.
Por tanto:

$$V = V_0 + a\cdot t$$

Sustituyendo esta ecuación en la general del espacio se tiene:

$$s = \int v\cdot dt = \int (v_o + at)dt = v_o\cdot t + \tfrac{1}{2}at^2 + K'$$

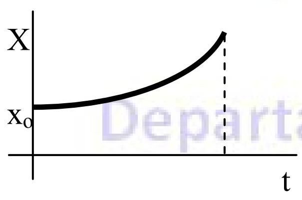
En la que la constante k' representa el espacio inicial recorrido s_o.

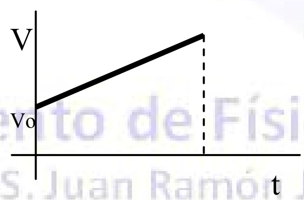
$$s = s_o + v_o\cdot t + \tfrac{1}{2}a\cdot t^2$$

Eliminando t en las ecuaciones de la celeridad y del espacio llegamos a la ecuación:

$$v^2 - v_o^2 = 2\cdot a\cdot s$$

Gráfico S-t	Gráfico V-t	Gráfico a-t
$x = x_o + v_o\cdot t + \frac{1}{2}a\cdot t^2$	$v = v_o + a\cdot t$	a=cte





Ejemplo 3: **Un coche parte del reposo y acelera uniformemente durante 250 m de recorrido para alcanzar una velocidad de 20 m/s. A partir de ese instante mantiene esa velocidad una distancia de 1500 m, para detenerse a continuación con una deceleración de 4 m/s². Calcular el tiempo invertido en todo el recorrido.**

En la primera fase del movimiento se trata de un M.R.U.A. $v = v_o + a \cdot t$ y $s = s_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

De aquí sustituyendo los valores que nos dan obtenemos: $0 = 0 + a \cdot t$; $250 = 0 + 0 + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

Resolviendo este sistema obtenemos $t_1 = 25s$.

En la segunda fase del movimiento es M.R.U. $s = s_o + v \cdot t$

De aquí: $1500 = 0 + 20 \cdot t$, de donde $t_2 = 75s$

En la tercera fase del movimiento tenemos un M.R.U.A. con aceleración negativa $v = v_o - a \cdot t$

De donde $t_3 = 5s$

El ***tiempo total*** del recorrido es: t=25s+75s+5s = 100 s

4.2.1.- Caída libre: Es el caso particular más importante de movimiento uniformemente acelerado en el que la aceleración es la ***aceleración de la gravedad***, *g* ($\vec{a} = -g \cdot \hat{j}$) y toma un valor aproximado de 9,8 [m/s²].

4.3.- Circular uniforme: Para interpretar matemáticamente estos movimientos basta recordar que toda magnitud lineal es producto de su correspondiente angular por el radio ($s = \varphi \cdot r, v = \varpi \cdot r, a_t = \alpha \cdot r$)

En este tipo de movimientos:

$$\varphi = \varphi_0 + \varpi \cdot t$$

Donde ω es la velocidad angular y φ es el arco recorrido.

4.4.- Circular Uniformemente acelerado: Siguiendo un criterio similar al empleado anteriormente tendríamos:

$$\omega = \omega_o + \alpha \cdot t$$
$$\phi = \phi_o + \omega_o \cdot t + \tfrac{1}{2} \alpha \cdot t^2$$
$$\omega^2 - \omega_o^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \phi$$

Donde φ es el arco recorrido, ω es la velocidad angular y α la aceleración angular.

Ejemplo 4: **Un volante gira a razón de 60 rpm y al cabo de 5 segundos posee una velocidad angular de 37,7 rad/s. ¿cuántas vueltas dio en ese tiempo?.**

La velocidad angular inicial de 60 rpm equivale a 6,28 rad/s. La aceleración valdrá:

$$\alpha = \frac{\varpi - \varpi_o}{\Delta t} = \frac{(37,7 - 6,28) rad/s}{5s} = 6,28 rad/s^2$$

O también $\alpha = 2\pi \quad rad/s$

El ángulo descrito es:

$$\varphi = \varpi_o \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 = 2\pi \frac{rad}{s} \cdot 5s + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{rad}{s^2} \cdot (5s)^2 = 35\pi \quad rad$$

Que equivale a:

$$35\pi \quad rad \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}} = 17,5 \text{ vueltas}$$

5. Composición de movimientos.

> ***Si un punto está sometido simultáneamente a varios movimientos elementales, el movimiento resultante se obtiene al sumar vectorialmente los movimientos componentes.***

Es decir, en cada instante:

- El vector de posición resultante es la suma vectorial de los vectores de posición de los movimientos componentes: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$
- La velocidad resultante es la suma vectorial de las velocidades de los movimientos componentes: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- La aceleración resultante es la suma vectorial de las aceleraciones de los movimientos componentes: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$

Estas tres leyes de composición están basadas en el ***principio de Galileo*** de la ***independencia de movimientos.***

> ***Si un punto está sometido, por causas distintas, a movimientos simultáneos, su cambio de posición es independiente de que los movimientos tengan lugar sucesiva o separadamente.***

5.1.- Composición de dos movimientos rectilíneos y uniformes:

5.1.1.- De la misma dirección y sentido: El movimiento resultante es un M.R.U. con la misma dirección y sentido que sus componentes.

$\vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ como velocidad resultante y $S = s_1 + s_2 = (v_1 + v_2)\cdot t$ como espacio recorrido.

5.1.2.- De la misma dirección y sentidos contrarios: El movimiento resultante es un M.R.U. con la misma dirección, pero con sentido correspondiente al de mayor celeridad.

Aquí $v = v_1 - v_2$ y $S = s_1 - s_2$

5.1.3.- De direcciones cualesquiera: El movimiento resultante en este caso también es M.R.U. con celeridad

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2\cdot v_1\cdot v_2\cdot\cos\theta}$$

Donde θ es el ángulo que forman las direcciones de los movimientos.

Si las direcciones son perpendiculares: $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ y el espacio recorrido $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$

Y como $s_1=v_1\cdot t$ y $s_2=v_2\cdot t$ quedará finalmente:

$$s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cdot t$$

Y la dirección del movimiento resultante se deduce de: $\tan\theta = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{s_2}{s_1}$

Ejemplo 5: **Una canoa, que vamos a considerar puntual, atraviesa perpendicularmente un río de 50 m de ancho, con una velocidad de 4 m/s. La velocidad de la corriente es de 3 m/s. Calcular:**

- **a) El tiempo que tardará en llegar a la orilla opuesta.**
- **b) En qué punto de la orilla opuesta atracará.**
- **c) La velocidad real de la canoa y el espacio recorrido por ella.**

a) El tiempo que tardará en llegar al otro lado es:

$$t = \frac{s_x}{v_x} = \frac{50m}{4\frac{m}{s}} = 12{,}5s$$

b) El espacio recorrido por la canoa en la dirección de la corriente es:

$$s_y = v_y \cdot t = 3\tfrac{m}{s} \cdot 12{,}5s = 37{,}5m$$

c) La velocidad real de la canoa es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4\tfrac{m}{s})^2 + (3\tfrac{m}{s})^2} = 5\tfrac{m}{s}$$

5.2.- Composición de dos M.R.U.A.

5.2.1.- De la misma dirección:

Sean $s_1 = s_{01} + v_{01}\cdot t + \frac{1}{2}a_1\cdot t^2$ y $s_2 = s_{02} + v_{02}\cdot t + \frac{1}{2}a_2\cdot t^2$ las ecuaciones de dos M.R.U.A. resulta que la suma de ambas es:

$$s = s_1 \pm s_2 = (s_{01} \pm s_{02}) + (v_{01} \pm v_{02})t + \tfrac{1}{2}(a_1 \pm a_2)t^2 = s_o' + v_o'\cdot t + \tfrac{1}{2}a'\cdot t^2$$

que es la ecuación de otro M.R.U.A. en la que el espacio inicial, la velocidad inicial y la aceleración son la suma algebraica de ambas magnitudes.

5.2.2.- De distinta dirección:

Como es lógico, la aceleración resultante es la suma vectorial de las aceleraciones correspondientes, siendo el movimiento resultante otro M.R.U.A.. En efecto, si consideramos que ambos movimientos parten del reposo, es decir, $v_{01} = v_{02} = 0$, tenemos:

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1\cdot t^2 \quad y \quad s_2 = \frac{1}{2}a_2\cdot t^2$$

Por eliminación del tiempo en ambas ecuaciones y en virtud del principio de la independencia de movimientos, se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$s_2 = \frac{a_2}{a_1}\cdot s_1$$

Que es la ecuación de una recta.

Si los dos movimientos son perpendiculares, la aceleración del movimiento resultante es: $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = cte.$ Tratándose, por lo tanto, de un M.R.U.A. de ecuación $s = \frac{1}{2}a\cdot t^2$.

5.3.- Composición de un M.R.U. y un M.R.U.A.

5.3.1.- De la misma dirección:

El movimiento resultante es un M.R.U.A. Sean:

$$s_1 = s_{01} + v_1\cdot t \qquad y \qquad s_2 = s_{02} + v_{02}\cdot t + \frac{1}{2}a\cdot t^2$$

De donde por suma se obtiene:

$$s = s_1 + s_2 = (s_{01} + s_{02}) + (v_1 + v_{02})\cdot t + \frac{1}{2}a\cdot t^2$$

Un caso particular importante de este tipo de movimiento es el ***lanzamiento vertical de proyectiles en el vacío***. En efecto, el proyectil se encuentra sometido a dos movimientos rectilíneos: uno *uniforme*, debido al impulso producido por la explosión de la pólvora que lanza el proyectil y otro *uniformemente variado*, a causa del campo gravitatorio terrestre. Se cumple que:

$$v = v_o - g\cdot t \qquad s = s_o + v_o\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2$$

En un movimiento de ascenso de este tipo interesa conocer la ***altura máxima***, Y_{max} ,que puede alcanzar el proyectil.

Como es lógico, el proyectil alcanzará su altura máxima cuando su velocidad sea cero, cumpliéndose en ese instante que:

$$0 = v_o - g\cdot t$$

De donde:

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Y sustituyendo en la ecuación del espacio recorrido: $s = Y_{max} = v_o\cdot\frac{v_o}{g} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{v_o^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$

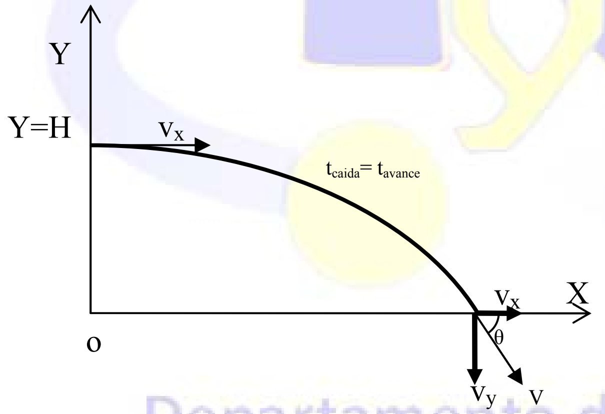
La altura máxima que alcanza un proyectil lanzado verticalmente en el vacío es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad de lanzamiento.

Ejemplo 6: **Se lanza verticalmente hacia arriba un móvil con una velocidad inicial de 80 m/s. Considerando g=10m/s², ¿Qué altura máxima alcanzará y qué tiempo invertirá en alcanzarla?.**

Cuando alcance la altura máxima, v=0 m/s. Por lo tanto: $0 = v_o - g\cdot t = 80\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s}\cdot t$ de donde t=8 seg.

El espacio recorrido será: $Y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(80\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 10\frac{m}{s^2}} = 320m$

5.3.2.- De direcciones perpendiculares: Es el caso de un proyectil disparado horizontalmente en el vacío con una velocidad v_x desde una cierta altura H. El móvil está sometido simultáneamente a dos movimientos: uno horizontal, rectilíneo y uniforme, de ***avance,*** con la velocidad v_x, y otro vertical, rectilíneo y uniformemente variado, sin velocidad inicial de ***caída.***



Elegiremos un sistema plano de ejes coordenados, con el origen en el punto del suelo situado verticalmente debajo del punto del lanzamiento, y con el eje OX horizontal en sentido del avance y el OY vertical ascendente. Al ser simultáneos los dos movimientos, el tiempo de caída es igual al tiempo de avance, cumpliéndose para cada movimiento elemental que:

Caída: $y = H - \frac{1}{2}g\cdot t^2$

Avance: $x = v_x\cdot t$

El máximo alcance que logra el proyectil se calcula hallando el tiempo que tarda en caer y sustituyéndolo en la expresión general del avance.

Cuando el proyectil llegue al suelo y=0, de donde $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ y en consecuencia:

$$X_{max} = v_x\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Vemos que:

En un tiro horizontal el alcance depende de la velocidad de salida del proyectil y de la altura desde donde se dispara.

La velocidad con que llega el proyectil al suelo será la resultante de la velocidad vertical conseguida en la caída ($v_y = g \cdot t$) y de la velocidad horizontal constante de avance v_x, siendo su módulo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + g^2 \cdot t^2} \ .$$

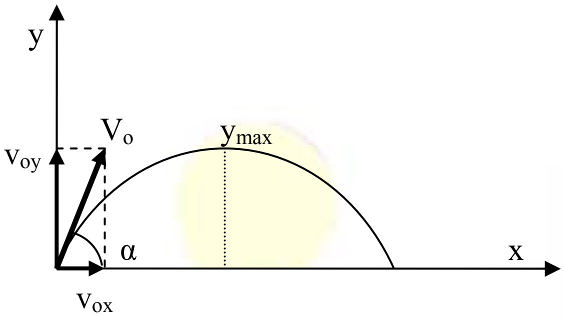
Si θ es ángulo que forman el vector velocidad con la horizontal: $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$.

La trayectoria seguida por el móvil corresponde a una parábola.

5.3.3.- De direcciones cualesquiera (Tiro Parabólico)

En este tipo de movimientos la velocidad inicial v_o se descompone en v_{oy} (vertical) M.R.U.A. y v_{ox} (horizontal) M.R.U.

$$\boxed{\begin{aligned} v_{ox} &= v_o \cdot Cos\alpha \\ v_{oy} &= v_o \cdot Sen\alpha \end{aligned}}$$



Y en cualquier instante del movimiento:

$$v_x = v_{ox} = v_0 \cdot Cos\alpha$$
$$v_y = v_{oy} - g \cdot t = v_o \cdot sen\alpha - g \cdot t$$

Los desplazamientos horizontal y vertical experimentados por el móvil serán:

- ***Desplazamiento horizontal:*** $x = v_x \cdot t = (v_o \cdot \cos\alpha) \cdot t$
- ***Desplazamiento vertical:*** $y = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = (v_o \cdot sen\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Si de la ecuación del desplazamiento horizontal despejamos t; $t = \dfrac{x}{v_o \cdot \cos\alpha}$

y lo metemos en la ecuación del desplazamiento vertical: $y = v_o \cdot sen\alpha \cdot \dfrac{x}{v_o \cdot \cos\alpha} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_o^2 \cdot \cos^2\alpha}$

obtenemos: $y = x \tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2 \cdot v_o^2 \cdot \cos^2\alpha}$ Que es la ecuación de la trayectoria.

Para calcular la celeridad (módulo de la velocidad) del proyectil en un punto cualquiera de su trayectoria basta con:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 \cdot \cos^2\alpha + (v_o \cdot sen\alpha - g \cdot t)^2} = \sqrt{v_o^2 + g^2 \cdot t^2 - 2v_o \cdot g \cdot t \cdot sen\alpha}$$

Y si tenemos en cuenta la ecuación del desplazamiento vertical, esta ecuación queda: $v = \sqrt{v_o^2 - 2 \cdot g \cdot h}$

El proyectil alcanzará su ***altura máxima*** cuando la componente vertical de la velocidad sea nula. De aquí deducimos el tiempo que tardará en conseguir dicha altura máxima.

$$0 = v_o \cdot sen\alpha - g \cdot t$$

Y por lo tanto:

$$t_{y_{\max}} = \frac{v_o \cdot sen\alpha}{g}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación el desplazamiento vertical obtenemos:

$$\boxed{Y_{\max} = v_o \cdot sen\alpha \cdot \frac{v_o \cdot sen\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_o^2 \cdot sen^2\alpha}{g^2} = \frac{v_o^2 \cdot sen^2\alpha}{2 \cdot g}}$$

Para calcular el alcance final del proyectil, el tiempo que tarda el proyectil en caer al suelo es el doble del tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima. $t_v = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\alpha}{g}$

Si sustituimos en la ecuación del desplazamiento horizontal: $\boxed{X_{\max} = \frac{v_o^2 \cdot sen2\alpha}{g}}$

El máximo alcance se conseguirá cuando sen 2α = 1; es decir 2α = 90°, y por lo tanto α = 45°.

Ejemplo 7: **Se dispara un proyectil con una velocidad de 400 m/s, formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular:**

a) Componentes rectangulares de la velocidad de salida.
b) Tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima.
c) Altura máxima alcanzada.
d) Alcance del proyectil.

a)

$$v_{ox} = v_o \cdot \cos\alpha = 400\tfrac{m}{s} \cdot \cos 30° = 400\tfrac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3}\,\tfrac{m}{s}$$

$$v_{oy} = v_o \cdot sen\alpha = 400\tfrac{m}{s} \cdot sen30° = 400\tfrac{m}{s} \cdot \frac{1}{2} = 200\tfrac{m}{s}$$

b) La altura máxima se alcanza cuando la componente vertical de la velocidad se hace cero:

$$t_{y_{\max}} = \frac{v_o \cdot sen\alpha}{g} = \frac{400\tfrac{m}{s} \cdot \frac{1}{2}}{10\tfrac{m}{s^2}} = 20s$$

c) Aplicando la ecuación del desplazamiento vertical:

$$Y_{\max} = \frac{v_o^2 \cdot sen^2\alpha}{2 \cdot g} = \frac{(400\tfrac{m}{s})^2 \cdot 1/4}{2 \cdot 10\tfrac{m}{s^2}} = 2000m$$

d) El tiempo de vuelo será el doble del invertido en alcanzar la altura máxima: $t_v = 2 \cdot 20s = 40s$

Y aplicando la ecuación del alcance final: $X_{\max} = \frac{v_o^2 \cdot sen2\alpha}{g} = \frac{(400\tfrac{m}{s})^2 \cdot \sqrt{3}/2}{10\tfrac{m}{s^2}} = 8000\sqrt{3}m$

6.- Ejercicios

1.- Una partícula se mueve a lo largo del eje OX de modo que su posición en cualquier instante atiende a: $x = t^2 + 5t + 3$ (S.I.). Calcula su celeridad media en los siguientes intervalos de tiempo: a) 5s y 6s, b) 5s y 5,1s, c) 5s y 5001s.

2.- La función de cierto movimiento es: $s = 3t^3 - 5t^2 + 6$ (SI). Calcular el valor de la aceleración tangencial en el instante t=3s.

3.- Un tren parte del reposo por una vía circular de 400 m de radio y se mueve con un movimiento uniformemente acelerado hasta que a los 25 segundos de iniciada su marcha alcanza la velocidad de 36 km/h, desde cuy momento conserva tal velocidad. Calcular:

a) La aceleración tangencial en la primera etapa de su movimiento.
b) La aceleración normal en t=25 s.
c) La aceleración total en dicho instante.

4.- Sea un proyectil disparado verticalmente hacia arriba cuya posición al punto de partida viene dada por $s = 80t - 5t^2$ (SI). Calcular:

a) La expresión correspondiente a su celeridad.
b) Su aceleración.
c) El tiempo en llegar a la altura máxima.

5.- Dos móviles A y B, separados por una distancia de 2 km. Salen simultáneamente en la misma dirección y sentido, ambos con M.R.U.A. siendo la aceleración del más lento de 0,32 cm/s^2. El encuentro se realiza a 3,025 km de distancia del punto de partida de B. Calcular:

a) El tiempo invertido por ambos móviles.
b) La aceleración de A.
c) Las velocidades de ambos en el punto de encuentro.

6.- Se lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad inicial de 45 m/s.
a) ¿Qué altura alcanzará al cabo de 2 seg?
b) ¿Qué altura máxima alcanzará?
c) ¿Cuanto tiempo tardará en pasar por un punto situado a 5 metros sobre el suelo?. Interpretar físicamente los resultados obtenidos.

7.- Se deja caer una piedra en un pozo de 50 m de profundidad. ¿Al cabo de cuanto tiempo se oirá el sonido del choque contra el fondo?

8.- Un barco efectúa un servicio de pasajeros entre dos ciudades A y B, situadas en la misma ribera de un río y separadas por 75 km. Se supone que la velocidad del barco y del río es constante. Si en ir de A a B tarde 3 horas y en volver de B a A tarda 5 horas, deducir las velocidades del barco y de la corriente.

9.- Una pelota se desliza por un tejado que tiene un ángulo de inclinación de 30° sobre la horizontal, de manera que llega a su extremo con una velocidad de 10 m/s. La altura del edificio es de 40 m y la anchura de la calle a la que vierte el tejado, 30m. Determinar si la pelota llegará directamente al suelo o chocará antes con la pared opuesta.

10.- En el mismo instante en que una partícula que se mueve en el plano XY pasa por el origen de coordenadas, animada de una velocidad V_o en el sentido positivo del eje OY, se le comunican dos aceleraciones constantes y del mismo módulo “a”, una dirigida en el sentido positivo del eje OX y la otra en el sentido negativo del eje OY. Hallar:
a) La ecuación de la trayectoria descrita por la partícula.
b) El punto del plano XY en que la velocidad de la misma partícula es mínima.