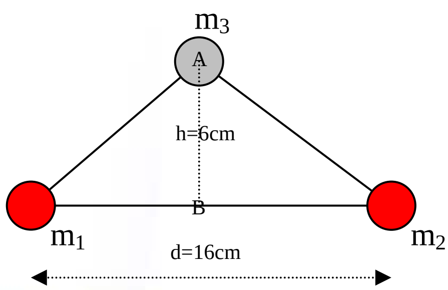
Nombre:		2º Bachillerato B

Obigatorio:

1.- Cuatro masas puntuales m_1, m_2, m_3, m_4 están situadas en los vértices de un cuadrado de lado 3 metros. Determinar: El campo y el potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado sabiendo que la masa m_1 está situada en el vértice inferior izquierdo, la masa m_2 está en el inferior derecho y así sucesivamente.
Datos : m_1=25kg, m_2 =50 kg, m_3 =100 Kg, m_4 = 200 Kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot Kg^{-2}$

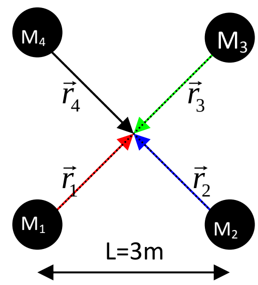
A elegir uno de los dos:

2.- Dos masas esféricas iguales de m_1 y m_2 de 6,4 kg cada una, están fijadas a dos puntos separados 16 cm. Una tercera masa, m_3, se suelta en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a una distancia de 6 cm de la línea que los une. Si suponemos que la masa m_3 es móvil y m_3 =100gr, calcular:
A) La aceleración de la masa cuando está en las posiciones A y B.
B) Velocidad que llevará cuando pase por B.
Dato: $G=6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$



3.- ¿A qué distancia de la tierra se encuentra el punto, sobre la recta que une los centros de la Tierra y la Luna, en que la intensidad del campo gravitatorio terrestre es doble que la intensidad del campo gravitatorio de la luna?. Datos: Distancia Tierra-Luna $3{,}84 \cdot 10^5$ km, $M_T=81M_L$.

1.- Cuatro masas puntuales m_1, m_2, m_3, m_4 están situadas en los vértices de un cuadrado de lado 3 metros. Determinar: El campo y el potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado sabiendo que la masa m_1 está situada en el vértice inferior izquierdo, la masa m_2 está en el inferior derecho y así sucesivamente.
Datos : m_1=25kg, m_2 =50 kg, m_3 =100 Kg, m_4 = 200 Kg; G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·Kg⁻²



a) Para calcular el campo gravitatorio en el centro del cuadrado, calculamos el campo creado por cada una de las cargas en ese punto y aplicamos el principio de superposición.

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \vec{g}_4$$

Calculamos primero el campo gravitatorio creado por m_1 en el centro, y para ello necesitamos el vector $\vec{r}_1$.

$$\vec{r}_1 = \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) - (0,0) = \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) \quad \rightarrow \quad r_1 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto:

$$\hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Una vez obtenido $\vec{r}_1$, calculamos el valor de la intensidad del campo en el centro del cuadrado.

$$\vec{g}_1 = -\frac{G\cdot m_1}{r_1^2}\cdot\hat{r}_1 = \frac{-6{,}67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 25kg}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) == \left(-2{,}62\cdot10^{-10}\,\hat{i} - 2{,}62\cdot10^{-10}\,\hat{j}\right)N\cdot kg^{-1}$$

Para la masa 2, tenemos que $\hat{r}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Y el campo gravitatorio será:

$$\vec{g}_2 = -\frac{G\cdot m_1}{r_2^2}\cdot\hat{r}_2 = \frac{-6{,}67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 50kg}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(5{,}24\cdot10^{-10}\,\hat{i} - 5{,}24\cdot10^{-10}\,\hat{j}\right)N\cdot kg^{-1}$$

Para la masa 3: $\hat{r}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

cuyo campo gravitatorio será:

$$\vec{g}_3 = -\frac{G\cdot m_1}{r_3^2}\cdot\hat{r}_2 = \frac{-6{,}67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 100kg}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1{,}05\cdot10^{-9}\,\hat{i} + 1{,}05\cdot10^{-9}\,\hat{j}\right)N\cdot kg^{-1}$$

Por último, para la masa 4, tenemos: $\hat{r}_4 = \frac{\vec{r}_4}{r_4} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Y el campo gravitatorio será:

$$\vec{g}_4 = -\frac{G\cdot m_1}{r_4^2}\cdot\hat{r}_2 = \frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 200kg}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-2{,}1\cdot10^{-9}\,\hat{\imath} + 2{,}1\cdot10^{-9}\,\hat{\jmath}\right)N\cdot kg^{-1}$$

Como vemos, la dirección y el sentido del vector campo creado por cada una de ellas es radial y dirigido hacia las masas.

Como hemos dicho antes, aplicamos el principio de superposición.

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \vec{g}_4$$

$$\vec{g} = \left(-2{,}62\cdot10^{-10}\,\hat{\imath} - 2{,}62\cdot10^{-10}\,\hat{\jmath}\right) + \left(5{,}24\cdot10^{-10}\,\hat{\imath} - 5{,}24\cdot10^{-10}\,\hat{\jmath}\right) + \left(1{,}05\cdot10^{-9}\,\hat{\imath} + 1{,}05\cdot10^{-9}\,\hat{\jmath}\right) +$$
$$+\left(-2{,}1\cdot10^{-9}\,\hat{\imath} + 2{,}1\cdot10^{-9}\,\hat{\jmath}\right) = \left(-7{,}88\cdot10^{-10}\,\hat{\imath} + 2{,}36\cdot10^{-9}\,\hat{\jmath}\right)\ \mathrm{N\cdot kg^{-1}}$$

b) Para calcular el potencial gravitatorio en el centro del cuadrado aplicamos el principio de superposición:

$$V = \sum_i V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V = -\frac{G\cdot m_1}{d} - \frac{G\cdot m_2}{d} - \frac{G\cdot m_3}{d} - \frac{G\cdot m_4}{d} = -\frac{G}{d}\left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right)$$

$$V = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}(375kg) = -5{,}89\cdot10^{-9}\,J\cdot kg^{-1}$$

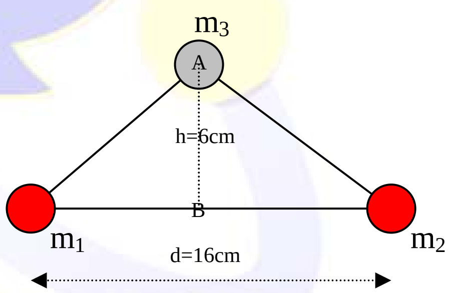
$$\boxed{V = -5{,}89\cdot10^{-9}\,J\cdot kg^{-1}}$$

2.- Dos masas esféricas iguales de m_1 y m_2 de 6,4 kg cada una, están fijadas a dos puntos separados 16 cm. Una tercera masa, m_3, se suelta en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a una distancia de 6 cm de la línea que los une. Si suponemos que la masa m_3 es móvil y m_3 =100gr, calcular:

A) La aceleración de la masa cuando está en las posiciones A y B.

B) Velocidad que llevará cuando pase por B.

Dato: G=6,67·10^{-11} N·m^2·kg^{-2}



a) La aceleración en el punto A vendrá dada por la segunda ley de Newton,

$$\sum_i \vec{F}_i = m\cdot\vec{a}$$

Donde F es la sumatoria de las fuerzas gravitatorias atractivas ejercidas por m_1 y m_2.

Calculemos la fuerza ejercida por la masa m_1:

Suponiendo que la masa 1 está en el punto (0,0), la masa 2 estará en el punto ($16\cdot10^{-2}$,0) y la masa 3 en ($8\cdot10^{-2}$,$6\cdot10^{-2}$).

Si llamamos $\vec{r}_1$ al vector de posición de la masa 3 con respecto a la uno, tenemos: $\vec{r}_1 = (0,08;0,06)$, su módulo será: $\|\vec{r}_1\| = \sqrt{0,0064 + 0,0036} = \sqrt{0,01} = \frac{1}{10}$, por tanto el vector unitario en la dirección de $\vec{r}_1$, será:

$$\hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|} = \frac{(0,08;0,06)}{\frac{1}{10}} = 10\cdot 10^{-2}(8,6) = \frac{1}{10}(8,6)$$

Por tanto:

$$\vec{F}_{m_1} = \frac{-G\cdot m_1\cdot m_3}{r_1^2}\cdot\hat{r}_1 = \frac{-6,67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 6,4kg\cdot 0,1kg}{0,1^2 m^2}\cdot\frac{1}{10}(8,6) = -4,27\cdot 10^{-9}\cdot\frac{1}{10}(8,6)N$$

Operando:

$$\vec{F}_{m_1} = -4,27\cdot 10^{-9}\cdot\frac{1}{10}(8,6)N = \left(-3,48\cdot 10^{-9}\hat{i} - 2,56\cdot 10^{-9}\hat{j}\right)N$$

De igual forma, la fuerza ejercida por la masa 2 será:

$$\vec{F}_{m_2} = \frac{-G\cdot m_1\cdot m_3}{r_2^2}\cdot\hat{r}_2 = \frac{-6,67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 6,4kg\cdot 0,1kg}{0,1^2 m^2}\cdot\frac{1}{10}(-8,6) = -4,2688\cdot 10^{-9}\cdot\frac{1}{10}(-8,6)N$$

$$\vec{F}_{m_2} = -4,27\cdot 10^{-9}\cdot\frac{1}{10}(-8,6)N = \left(3,48\cdot 10^{-9}\hat{i} - 2,56\cdot 10^{-9}\hat{j}\right)N$$

En donde hemos utilizado:

$$\hat{r}_2 = \frac{\vec{r}_2}{\|\vec{r}_2\|} = \frac{(-0,08;0,06)}{\frac{1}{10}} = 10\cdot 10^{-2}(-8,6) = \frac{1}{10}(-8,6)$$

Por tanto si sumamos las dos fuerzas, obtenemos:

$$\vec{F} = \vec{F}_{m_1} + \vec{F}_{m2} = \left(-3,48\cdot 10^{-9}\hat{i} - 2,56\cdot 10^{-9}\hat{j}\right) + \left(3,48\cdot 10^{-9}\hat{i} - 2,56\cdot 10^{-9}\hat{j}\right) = -5,12\cdot 10^{-9}\hat{j}\ \text{ N}$$

Aplicando la 2ª Ley de Newton, tenemos que: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-5,12\cdot 10^{-9}\hat{j}\ \text{N}}{0,1kg} = -5,12\cdot 10^{-8}\hat{j}\ \ m\cdot s^{-2}$

$$\boxed{\vec{a}_A = -5,12\cdot 10^{-8}\hat{j}\ \ m\cdot s^{-2}}$$

En el punto B, tenemos que las fuerzas gravitatorias se anulan de ser de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario, por tanto si la resultante de las fuerzas es cero, entonces la aceleración también lo será.

$$\boxed{\vec{a}_B = 0\ \ m\cdot s^{-2}}$$

b) Para calcular la velocidad en B, utilizamos el principio de conservación de la energía mecánica. Calculamos la energía potencial en A:

$$Ep_A = m_3\cdot(V_{1A} + V_{2A})$$

Calculamos el potencial en el punto A creado por la masa m_1:

$$V_{1A} = \frac{-G\cdot m_1}{r_1} = -G\cdot\frac{6,4kg}{0,1m} = -64G\ \ J\cdot kg^{-1}$$

Y calculamos el potencial en el punto A creado por la masa m_2:

$$V_{2A} = \frac{-G \cdot m_2}{r_2} = -G \cdot \frac{6,4kg}{0,1m} = -64G \;\; J \cdot kg^{-1}$$

Por tanto el potencial en A viene dado por:

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = -128G \;\; J \cdot kg^{-1} = -8,54 \cdot 10^{-9} \;\; J \cdot kg^{-1}$$

Y la Energía potencial en A será:

$$Ep_A = m_3 \cdot (V_{1A} + V_{2A}) = m_3 \cdot V_A = -0,1kg \cdot 8,54 \cdot 10^{-9} J \cdot kg^{-1} = -8,54 \cdot 10^{-10} J$$

La energía potencial en B será:

$$Ep_B = m_3 \cdot (V_{1B} + V_{2B})$$

Calculamos el potencial en el punto B creado por la masa m_1:

$$V_{1B} = \frac{-G \cdot m_1}{r_1} = -G \cdot \frac{6,4kg}{0,08m} = -80G \;\; J \cdot kg^{-1}$$

Y calculamos el potencial en el punto B creado por la masa m_2:

$$V_{2B} = \frac{-G \cdot m_2}{r_2} = -G \cdot \frac{6,4kg}{0,08m} = -80G \;\; J \cdot kg^{-1}$$

Por tanto el potencial en A viene dado por:

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = -160G \;\; J \cdot kg^{-1} = -1,07 \cdot 10^{-8} \;\; J \cdot kg^{-1}$$

Y la Energía potencial en B será:

$$Ep_B = m_3 \cdot (V_{1B} + V_{2B}) = m_3 \cdot V_B = -0,1kg \cdot 1,07 \cdot 10^{-8} J \cdot kg^{-1} = -1,08 \cdot 10^{-9} J$$

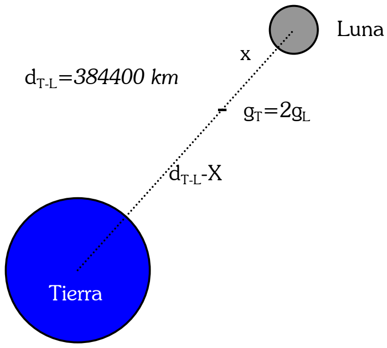
Por el principio de conservación de la energía mecánica: $E_{M_A} = E_{M_B}$

$$\left.\begin{array}{l} E_{M_A} = E_{C_A} + E_{P_A} = E_{P_A} \\ E_{M_B} = E_{C_B} + E_{P_B} \end{array}\right\} E_{C_B} = E_{P_A} - E_{P_B} = -8,54 \cdot 10^{-10} + 1,08 \cdot 10^{-9} = 2,26 \cdot 10^{-10} J$$

De $E_{C_B} = \frac{1}{2} m_3 \cdot v_B^2$, despejamos la velocidad: $v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{C_B}}{m_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,26 \cdot 10^{-10} J}{0,1kg}} = 6,72 \cdot 10^{-5} m \cdot s^{-1}$

$$\boxed{v_B = 6,72 \cdot 10^{-5} m \cdot s^{-1}}$$

3.- ¿A qué distancia de la tierra se encuentra el punto, sobre la recta que une los centros de la Tierra y la Luna, en que la intensidad del campo gravitatorio terrestre es doble que la intensidad del campo gravitatorio de la luna?. Datos: Distancia Tierra-Luna $3{,}84\cdot10^5$ km, $M_T=81M_L$.



En el punto en cuestión, calculamos el valor del campo gravitatorio de la tierra y de la luna, y tendremos:

$$g_T = 2g_L$$

$$\vec{g}_T = \frac{-G{\cdot}M_T}{r^2}\hat{r} = \frac{-G{\cdot}81M_L}{(d_{T-L}-x)^2}\hat{r} \qquad \vec{g}_L = \frac{-G{\cdot}M_L}{r^2}\hat{r} = \frac{-G{\cdot}M_L}{(x)^2}\hat{r}$$

Sustituyendo en:

$$g_T = 2g_L$$

tenemos:

$$\frac{G{\cdot}81M_L}{(d_{T-L}-x)^2} = \frac{2{\cdot}G{\cdot}M_L}{(x)^2}$$

Operando un poco:

$$\frac{G{\cdot}81M_L}{2G{\cdot}M_L} = \frac{(d_{T-L}-x)^2}{(x)^2} = \left(\frac{d_{T-L}-x}{x}\right)^2$$

Tomando la raíz cuadrada a cada uno de los miembros de esta igualdad y simplificando, tenemos:

$$\frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{d_{T-L}-x}{x}$$

De donde:

$$9x = \sqrt{2}\left(d_{T-L}-x\right)$$

Y de aquí:

$$9x + \sqrt{2}x = \sqrt{2}d_{T-L}$$

de donde:

$$x = \frac{\sqrt{2}{\cdot}d_{T-L}}{9+\sqrt{2}} = 5{,}21{\cdot}10^7\,m$$

Y la distancia desde la tierra donde el campo gravitatorio terrestre es el doble que el de la luna será:

$$\boxed{d_{T-L} - x = 3{,}32{\cdot}10^8\,m}$$