4. Movimientos vibratorios

1. MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE
(págs. 97, 102 y 103)

1. En un **movimiento periódico** las variables posición, velocidad y aceleración de la partícula o del cuerpo toman los mismos valores después de cada intervalo de tiempo denominado período.

   En un **movimiento oscilatorio** la partícula se desplaza sucesivamente a un lado y a otro de la posición de equilibrio, repitiendo a intervalos regulares de tiempo los valores de sus variables cinemáticas.

   El **movimiento armónico simple** es el movimiento oscilatorio sobre una recta, de un cuerpo sometido a una fuerza de atracción proporcional a la distancia al punto de equilibrio o centro de oscilaciones, y de sentido opuesto al vector posición del cuerpo respecto a dicho punto.

2. Un movimiento periódico no tiene por qué ser oscilatorio. Pueden repetirse los valores de las magnitudes cinemáticas cada cierto intervalo de tiempo sin que el cuerpo se desplace a un lado y a otro de un punto de equilibrio. Cualquier movimiento circular uniforme es periódico sin ser oscilatorio. Por ejemplo, el movimiento de los planetas en torno al Sol.

3. No todos los movimientos oscilatorios son armónicos. Son oscilatorios todos los movimientos periódicos de un lado a otro de un punto de equilibrio, pero no tienen por qué tener lugar a lo largo de una recta ni estar causados por una fuerza de atracción proporcional a la distancia al punto de equilibrio.

4. Las oscilaciones de los extremos del diapasón se denominan vibraciones porque son muy rápidas. Su período es muy corto, y el valor exacto del período determina el tono del sonido que emite el diapasón.

5. *a)* **Falso.** La elongación no es el valor máximo de la amplitud, sino que la amplitud es el valor máximo de la elongación.

   b) **Falso.** $x = \pm A$ cuando sen $(\omega t + \varphi_0) = 1$

   c) **Cierto**, siempre que utilicemos la ecuación del MAS en la forma $x = A$ sen $(\omega t + \varphi_0)$

   d) **Cierto.**

   e) **Falso.** La aceleración es nula cuando $x = 0$, y es máxima para $x = \pm A$.

   f) **Falso.** La partícula se halla en el centro de oscilación cuando $x = 0$ y $a = 0$, pero en este punto la velocidad toma su valor máximo.

6. Datos: MAS con 15 vibraciones cada 40 segundos.

   a) La frecuencia es el número de vibraciones por segundo. Por tanto:

   $$f = \frac{15 \text{ vibraciones}}{40 \text{ s}} = 0{,}375 \text{ Hz}$$

   b) Calculamos el período a partir de la frecuencia:

   $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}375 \text{ Hz}} = 2{,}67 \text{ s}$$

   c) Determinamos la pulsación:

   $$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0{,}375 \text{ Hz} = 2{,}36 \text{ rad/s}$$

7. Datos: MAS; $\varphi_0 = 0$; $f = 50$ Hz; $A = 3$ cm $= 0{,}03$ m

   a) Calculamos el período como el inverso de la frecuencia:

   $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \text{ Hz}} = 0{,}02 \text{ s}$$

   b) Determinamos la pulsación a partir de la frecuencia:

   $$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 100\pi \text{ rad/s}$$

   c) Escribimos la ecuación de la elongación del movimiento armónico simple:

   $$x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}03 \text{ sen } (100\pi t)$$

8. Datos: MAS; $\varphi_0 = \pi/4$; $f = 60$ Hz; $A = 2$ m

   a) Calculamos el período como el inverso de la frecuencia:

   $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60 \text{ Hz}} = 0{,}017 \text{ s}$$

   b) Determinamos la pulsación a partir de la frecuencia:

   $$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 \text{ Hz} = 120\pi \text{ rad/s}$$

   c) Escribimos la ecuación de la elongación:

   $$x = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) = 2 \text{ sen}\left(120\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

9. Datos: MAS; $A = 0{,}05$ m; $T = 4$ s; $t_0 = 0$; $x_0 = 0$; $v_0 > 0$

   a) Si la partícula se encuentra en el origen en el tiempo inicial, su fase inicial es cero:

   $$\varphi_0 = 0$$

   b) Determinamos la pulsación a partir del período:

   $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4 \text{ s}} = \frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

   c) Escribimos la ecuación de la elongación:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}05\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

d) Calculamos el valor de la elongación en t = 1 s:

$$x = 0{,}05\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) = 0{,}05\text{ m}$$

10. Datos: MAS; A = 0,03 m; f = 150 Hz; $x_0 = A$; $t_0 = 0$

Calculamos la pulsación a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi \cdot 150\text{ Hz} = 300\pi\text{ rad/s}$$

Escribimos la ecuación del MAS, dejando la fase inicial por determinar:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}03\,\text{sen}\,(300\pi t + \varphi_0)$$

Determinamos la fase inicial a partir de los datos del problema:

$$x_0 = A = 0{,}03 = 0{,}03\,\text{sen}\,\varphi_0;\,\text{sen}\,\varphi_0 = 1;$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Entonces:

$$x = 0{,}03\,\text{sen}\left(300\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

11. Datos: MAS; A = 3 cm = 0,03 m; f = 5 Hz; $\varphi_0 = 3\pi/2$

a) Calculamos la pulsación, para escribir la ecuación de la elongación:

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi \cdot 5\text{ Hz} = 10\pi\text{ rad/s}$$

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}03\,\text{sen}\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

b) Escribimos la ecuación de la velocidad:

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}03 \cdot 10\pi\cos\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$v = 0{,}3\pi\cos\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

c) La ecuación de la aceleración es:

$$a = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -0{,}03 \cdot (10\pi)^2\,\text{sen}\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$a = -3\pi^2\,\text{sen}\left(10\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

12. Datos: MAS; T = 0,5 s; A = 0,05 m; $\varphi_0 = 0$

a) Determinamos la pulsación y escribimos las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}5\text{ s}} = 4\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}05\,\text{sen}\,(4\pi t)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}05 \cdot 4\pi\cos(4\pi t)$$

$$v = 0{,}2\pi\cos(4\pi t)$$

$$a = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -0{,}05 \cdot (4\pi)^2\,\text{sen}(4\pi t)$$

$$a = -0{,}8\pi^2\,\text{sen}\,(4\pi t)$$

Para t = 10 s:

$$x\,(t = 10\text{ s}) = 0{,}05\,\text{sen}\,(40\pi) = 0\text{ m}$$

$$v\,(t = 10\text{ s}) = 0{,}2\pi\cos(40\pi) = 0{,}2\pi\text{ m/s}$$

$$a\,(t = 10\text{ s}) = -0{,}8\pi^2\,\text{sen}\,(40\pi) = 0\text{ m/s}^2$$

b) El cuerpo se encuentra en el origen de coordenadas, que es el punto de equilibrio o centro de oscilación del movimiento. En este punto, la velocidad del cuerpo es máxima y la aceleración es nula.

13. Datos: MAS; A = 0,2 m; T = 4 s; $\varphi_0 = \pi/3$

Calculamos la pulsación del movimiento a partir del período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\text{ s}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Escribimos las ecuaciones para la elongación, la velocidad y la aceleración del movimiento:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}1\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a = -A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -0{,}05\pi^2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

14. Datos: MAS; f = 50 Hz; x = –0,001 m

Determinamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi \cdot 50\text{Hz} = 100\pi\text{ rad/s}$$

Hallamos la aceleración a partir de su relación con la elongación:

$$a = -\omega^2 x = -(100\pi\text{ rad/s})^2 \cdot (-0{,}001\text{ m})$$

$$a = 10\pi^2\text{ m/s}^2$$

15. En el MAS sólo existe una componente de la aceleración, ya que es un movimiento unidimensional, sobre una recta. La aceleración es siempre tangente a la velocidad, ya que son paralelas y, por lo tanto, no existe aceleración normal.

16. *a)* La coordenada x tiene el mismo valor para la partícula que describe el MCU que para su proyección. Lo que diferencia el MCU del MAS es que en el primero varía, además de la coordenada x, la coordenada y.

b) No, las dos partículas no tienen siempre la misma velocidad. La del MAS tiene una velocidad igual a la proyección en el eje horizontal de la velocidad del MCU. Tampoco tienen la misma aceleración, pues en el MCU la aceleración es normal, mientras que en el MAS es la proyección en el eje x de la aceleración anterior.

17. Datos: MCU; R = 0,20 m; T = 2 s; $x_0 = 0$; $\varphi_0 = \pi/2$

El movimiento de la proyección sobre el eje de abscisas será un MAS.

La amplitud coincidirá con el radio de la circunferencia, A = R = 0,20 m.

El período será el mismo que el del MCU, T = 2 s. Entonces, la pulsación es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2s} = \pi \; \frac{rad}{s}$$

Teniendo en cuenta que en el instante inicial la proyección de la posición de la partícula coincide con el origen, si escribimos la ecuación en seno, la fase inicial será nula:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}2 \operatorname{sen}(\pi t)$$

Podemos también escribir la ecuación en función del coseno, y la fase inicial será entonces $\varphi_0 = \pi/2$:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

2. OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE (págs. 105, 107 y 109)

18. *a)* En el oscilador armónico simple, el valor de la fuerza recuperadora es F = –Kx. Por lo tanto, de la 2ª ley de Newton tenemos que:

$$F = m\,a = -Kx;\; a = -\frac{K}{m}x$$

— En x = 0, la aceleración es nula.

— En x = A, el valor de la aceleración es $-\frac{K}{m}A$ con dirección y sentido hacia la posición de equilibrio.

— En x = –A, el valor de la aceleración es $\frac{K}{m}A$ también con dirección y sentido hacia la posición de equilibrio.

b) La aceleración es máxima para x = ± A.

19. Determinamos cómo varía la pulsación o frecuencia angular si duplicamos la masa del cuerpo:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m_0};\; \omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{K}{2\,m_0} = \frac{1}{2}\omega_0^2;\; \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

Hallamos la variación de la frecuencia y del período:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{2} = \sqrt{2}\,T_0$$

La velocidad máxima será:

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm A\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_{0\,max}$$

Y la aceleración máxima:

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0\right)^2 = \pm\frac{1}{2}A\omega_0^2 = \frac{1}{2}a_{0\,max}$$

20. Datos: m = 200 g = 0,2 kg; K = 25 N/m

a) La amplitud será igual a la distancia desde el punto del que soltamos el cuerpo hasta el punto de equilibrio. El punto de equilibrio para el sistema formado por el resorte y la masa se encuentra, respecto a la longitud natural del resorte, a una distancia tal que el peso del cuerpo y la fuerza del resorte son iguales:

$$mg = Kx;\; x = \frac{m\,g}{K}$$

$$x = \frac{0{,}2\text{ kg}\cdot 9{,}8\,\frac{N}{kg}}{25\,\frac{N}{m}} = 0{,}08\text{ m};\; A = 0{,}08\text{ m}$$

b) Determinamos el período del movimiento, que es independiente de la amplitud:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}};\; T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2\text{ kg}}{25\,\frac{N}{m}}} = 0{,}56\text{ s}$$

El período del movimiento es el mismo que en el caso en que el resorte está horizontal. La presencia de la gravedad no altera el período.

21. Datos: m = 2,0 kg; F_{max} = 8,0 N; A = 20 cm = 0,2 m

a) Hallamos la constante elástica a partir de la fuerza que realiza el resorte cuando la elongación es máxima:

$$K = \frac{F_{max}}{A} = \frac{8{,}0\text{ N}}{0{,}2\text{ m}} = 40\,\frac{N}{m}$$

b) Calculamos el período del movimiento:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\text{ kg}}{40\,\frac{N}{m}}} = 1{,}4\text{ s}$$

22. Datos: m = 50 g = 0,05 kg; T = 1,5 s

Hallamos la constante recuperadora del resorte a partir de la expresión del período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}};\; T^2 = 4\pi^2\,\frac{m}{K};\; K = 4\pi^2\,\frac{m}{T^2}$$

$$K = 4\pi^2\,\frac{0{,}05\text{ kg}}{(1{,}5\text{ s})^2} = 0{,}88\,\frac{N}{m}$$

23. Datos: m = 2 kg; K = 65 N/m; A = 0,3 m

a) Inicialmente el cuerpo está en reposo. Por tanto, su energía potencial inicial coincide con su energía mecánica:

$$Ep = E = \frac{1}{2}K\,A^2 = \frac{1}{2}\cdot 65\,\frac{N}{m}\cdot(0{,}3\text{m})^2 = 2{,}925\text{ J}$$

b) La velocidad máxima se alcanzará cuando la energía potencial sea nula. Entonces, toda la energía mecánica es energía cinética, Ec = E:

$$E = Ec = \frac{1}{2} m\, v^2 ; v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}925\ J}{2\ kg}} = \pm 1{,}7\ \frac{m}{s}$$

24. Datos: m = 1,5 kg; K = 1,5 N/m; v_{max} = ±3 m/s

a) Por la conservación de la energía mecánica, la energía del bloque parado es igual a su energía en cualquier otro instante de tiempo. Cuando la velocidad es máxima, la energía potencial es cero y la energía mecánica coincide con la energía cinética.

$$E = Ec_{max} = \frac{1}{2} m\, v_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\ kg \cdot \left(\pm 3\ \frac{m}{s}\right)^2 = 6{,}75\ J$$

b) Despejamos la amplitud de la expresión de la energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2} K\, A^2 ; A = \sqrt{\frac{2E}{K}} ; A = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}75\ J}{1{,}5\ \frac{N}{m}}} = 3\ m$$

c) Calculamos la pulsación y determinamos la aceleración máxima:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1{,}5\ \frac{N}{m}}{1{,}5\ kg}} = 1\ \frac{rad}{s}$$

$$a_{max} = \pm A\omega^2 ; a_{max} = \pm\left(1\ \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 3\ m = \pm 3\ \frac{m}{s^2}$$

25. Datos: x_1 = 5 cm = 0,05 m; m_1 = 1,0 kg;

m_2 = 500 g = 0,5 kg; A = 3 cm = 0,03 m

a) Calculamos la constante de recuperación del resorte a partir de los datos para la primera masa que colgamos. La posición de equilibrio x_1 es aquélla para la cual el peso del cuerpo que colgamos y la fuerza del muelle son iguales y de sentido contrario:

$$m_1\, g = Kx_1 ; K = \frac{m_1\, g}{x_1} ;$$

$$K = \frac{1\ kg \cdot 9{,}8\ \frac{N}{kg}}{0{,}05\ m} = 196\ \frac{N}{m}$$

b) Calculamos la energía potencial del resorte en el punto de máxima deformación (x = A), donde toda la energía será energía potencial:

$$Ep = E = \frac{1}{2} K\, A^2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 196 \frac{N}{m} \cdot (0{,}03\ m)^2 = 0{,}088\ J$$

c) La energía mecánica se conserva, por lo que es igual a la energía potencial en el punto de máxima deformación, donde el cuerpo está en reposo. En otra posición, como en x = 2 cm, la energía cinética será la energía mecánica menos la potencial. Determinamos la energía potencial del resorte en x = 2 cm = 0,02 m:

$$Ep = \frac{1}{2} K\, x^2 ; Ep = \frac{1}{2} \cdot 196 \frac{N}{m} \cdot (0{,}02\ m)^2 = 0{,}039\ J$$

Entonces, la energía cinética en este punto es:

$$Ec = E - Ep ; Ec = 0{,}088\ J - 0{,}039\ J = 0{,}049\ J$$

d) Determinamos la velocidad en este punto a partir de la energía cinética:

$$Ec = \frac{1}{2} m\, v^2 ; v = \sqrt{\frac{2Ec}{m}} ; v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}049\ J}{0{,}5\ kg}} = 0{,}443\ \frac{m}{s}$$

26. Si tenemos un reloj de péndulo que adelanta, hemos de aumentar la longitud del péndulo. De esta forma, el período de oscilación será más largo y las manecillas del reloj avanzarán más lentamente.

— Si un péndulo simple tiene un período de T = 2 s con L = 1 m, otro con T = 5 s tendrá una longitud mayor, ya que el período es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del péndulo. Concretamente, la longitud del segundo péndulo será de 6,25 m. Para encontrarla, despejamos el valor de la gravedad en el lugar del experimento a partir de la longitud y el período del primer péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} ; g = 4\pi^2\, \frac{L}{T^2} ; g = 9{,}87\ \frac{m}{s^2}$$

Utilizamos este valor de g para hallar la longitud del segundo péndulo:

$$L = \frac{g\, T^2}{4\pi^2} ; L = 6{,}25\ m$$

27. *a)* Datos: L = 0,556 m; g = 9,75 m/s²

Determinamos el período del péndulo en este lugar:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} ; T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}556\ m}{9{,}75\ \frac{m}{s^2}}} = 1{,}5\ s$$

b) Datos: g_L = 1,96 m/s²; T_T = 2 s; g_T = 9,8 m/s²

Con los datos del péndulo en la Tierra, determinamos su longitud:

$$T_T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}} ; L = \frac{g_T\, T_T^{\,2}}{4\pi^2}$$

$$L = \frac{9{,}8\ \frac{m}{s^2} \cdot (2\ s)^2}{4\pi^2} = 0{,}99\ m$$

Conociendo la longitud, hallamos el período en la Luna:

$$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_L}} ; T_L = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}99\ m}{1{,}96\ \frac{m}{s^2}}} = 4{,}47\ s$$

3. OTROS MOVIMIENTOS OSCILATORIOS (pág. 111)

28. La frecuencia de un oscilador amortiguado permanece constante, no disminuye. Lo único que disminuye es la amplitud. La frecuencia no puede variar porque es una magnitud propia del oscilador, esté o no amortiguado. El amortiguamiento depende de las características del oscilador y del agente amortiguador, y de la velocidad del oscilador en cada momento.

29. Un oscilador entra en resonancia cuando actúa sobre él una fuerza externa periódica de frecuencia igual a la frecuencia propia del oscilador. Si además de esta fuerza periódica existe otra fuerza amortiguadora que disipe más energía que la suministrada por la fuerza periódica, las oscilaciones serán amortiguadas. En cambio, si la energía disipada es inferior a la suministrada por la fuerza periódica, la amplitud de las oscilaciones, en vez de amortiguarse, aumentará.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 112)

a) Resonancia, osciladores forzados y osciladores amortiguados.

Un oscilador sobre el que actúe una fuerza disipativa realizará oscilaciones amortiguadas. En cada ciclo, el oscilador irá perdiendo energía, y por ello la amplitud del movimiento irá disminuyendo. El movimiento será periódico, con la misma frecuencia natural del oscilador, pero, a diferencia del MAS, la amplitud no es constante, sino que decrece.

Si además de la fuerza disipativa existe alguna otra fuerza externa que proporcione energía al oscilador, hablamos de oscilaciones forzadas. En el caso que la energía suministrada compense exactamente la que el oscilador pierde a causa de la amortiguación, el movimiento tiene el mismo período natural y amplitud constante, como el MAS.

Una manera de introducir esta energía es mediante una fuerza periódica. La absorción de energía por parte del oscilador será máxima cuando esta fuerza tenga un período igual o casi igual al período natural del oscilador. En este caso, no sólo se mantendrán las oscilaciones sin disminuir su amplitud, sino que la amplitud del movimiento irá en aumento, llegando incluso a sobrepasar los límites de resistencia de la estructura del oscilador. Se trata de un fenómeno de resonancia. El período del movimiento es el natural del sistema, pero en este caso la amplitud tampoco es constante, sino que aumenta.

b) Tres ejemplos de resonancia:

Cuando nos impulsamos en un columpio, estamos forzando las oscilaciones. Si nos impulsamos en el momento adecuado en cada ciclo (es decir, con la frecuencia natural del columpio), la amplitud del movimiento va creciendo.

La mayoría de los instrumentos musicales tiene lo que se llama una caja de resonancia. Así, por ejemplo, la forma de una guitarra o de un violín es la adecuada para que el aire de su interior entre en resonancia con las notas producidas por la vibración de las cuerdas. De esta forma, se amplifica la intensidad del sonido.

Otro ejemplo de resonancia poco visible pero muy útil es el microondas. En este caso, los osciladores son las moléculas de agua que todos los alimentos contienen. Como la temperatura de un material es consecuencia de las vibraciones de sus átomos y moléculas, si conseguimos hacer vibrar con mayor amplitud las moléculas de agua de los alimentos, conseguiremos que su temperatura aumente. Para hacer oscilar la molécula de agua, el microondas emite radiación electromagnética de una frecuencia igual o parecida a la frecuencia propia de la molécula de agua, la cual entra en resonancia y vibra cada vez con más amplitud.

En la industria y en la construcción en necesario prevenir el fenómeno de resonancia y tomar medidas para evitarlo. Por ejemplo, en los puertos, la distancia entre los diques no debe ser un múltiplo de la longitud de onda de las olas de los temporales más frecuentes en esa costa. Si lo fuera, las oscilaciones del agua dentro del puerto entrarían en resonancia con las olas del temporal y su altura iría en aumento. Otro ejemplo es la construcción de grandes edificios. Algunos rascacielos disponen de un sistema amortiguador para reducir las oscilaciones cuando soplan fuertes vientos. El sistema oscila con la misma frecuencia que el edificio pero con un desfase de 180°, de modo que amortigua las oscilaciones.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 114 y 115)

30. Datos: $x\ (t = 5\ s) = 3{,}36\ m$; $v\ (t = 5\ s) = 0{,}216\ m/s$;

$\omega = 0{,}1\ rad/s$

a) Determinamos la frecuencia a partir de la pulsación:

$$\omega = 2\pi\, f;\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0{,}1\ \frac{rad}{s}}{2\pi};\ f = \frac{0{,}05}{\pi}\ Hz$$

b) Determinamos la amplitud a partir de la relación entre la elongación y la velocidad para t = 5 s:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2};\ v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right);\ A^2 = \frac{v^2}{\omega^2} + x^2$$

$$A = \sqrt{\frac{v^2}{\omega^2} + x^2};\ A = \sqrt{\frac{\left(0{,}216\ \frac{m}{s}\right)^2}{\left(0{,}1\ \frac{rad}{s}\right)^2} + (3{,}36\ m)^2} = 4\ m$$

c) Escribimos la ecuación de la elongación en t = 5 s, cuando la velocidad es positiva, para determinar la fase inicial:

$$x = A\ sen\ (\omega t + \varphi_0)$$

$$3{,}36 = 4\ sen\ (0{,}1 \cdot 5 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}\,(0{,}5+\varphi_0)=\frac{3{,}36\ \text{m}}{4\ \text{m}}=0{,}84$$

$$0{,}5+\varphi_0=\text{arcsen}\ 0{,}84=1\ \text{rad o}\ (\pi-1)\ \text{rad}$$

Como la velocidad, que varía con el coseno del ángulo de fase, es positiva:

$$(0{,}5+\varphi_0)=1\ \text{rad};\ \varphi_0=(1-0{,}5)\ \text{rad}=0{,}5\ \text{rad}$$

d) La aceleración en t = 5 s será:

$$a=-A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2 x$$

$$a=-(0{,}1\ \text{rad/s})^2\cdot 3{,}36\ \text{m}=-0{,}03\ \text{m/s}^2$$

e) Determinamos la elongación, la velocidad y la aceleración para t = 0 s:

$$x=A\,\text{sen}(\omega t+\varphi_0)=4\,\text{sen}\,(0{,}1\cdot 0+0{,}5)=1{,}9\ \text{m}$$

$$v=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)=4\cdot 0{,}1\cos(0{,}1\cdot 0+0{,}5)$$

$$v=0{,}35\ \text{m/s}$$

$$a=-\omega^2 x=-(0{,}1\ \text{rad/s})^2\cdot 1{,}9\ \text{m}=-0{,}02\ \text{m/s}^2$$

f) Las expresiones de la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo son:

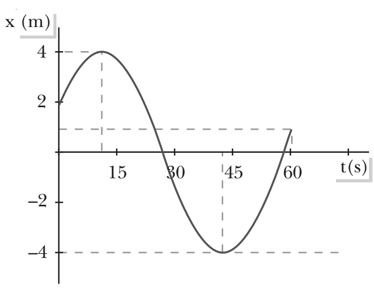
$$x=A\,\text{sen}(\omega t+\varphi_0)=4\,\text{sen}\,(0{,}1t+0{,}5)$$

$$v=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)=0{,}4\cos(0{,}1t+0{,}5)$$

$$a=-A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t+\varphi_0)=-0{,}04\cos(0{,}1t+0{,}5)$$

g) Para representar la elongación en función del tiempo, hallamos varios puntos y los representamos. Escogemos los puntos de elongación máxima, mínima y cero:

t (s)	*x (m)*
0	1,9
10,7	A = 4
26,4	0
42,1	–A = –4
57,8	0
60	0,86



31. Datos: m = 1 g = 0,001 kg; f = $10^3/\pi$ Hz;

a_{max} = ± 8,0· 10^3 m/s²

a) Determinamos la pulsación a partir de la frecuencia:

$$\omega=2\pi f=2\pi\cdot\frac{10^3}{\pi}\ \text{Hz}=2\cdot 10^3\ \text{rad/s}$$

b) Hallamos la amplitud a partir de la aceleración en el extremo del recorrido, punto donde la elongación coincide con la amplitud del movimiento:

$$|a_{max}|=A\omega^2;\ A=\frac{|a_{max}|}{\omega^2};\ A=\frac{8{,}0\cdot 10^3\ \text{m/s}^2}{(2\cdot 10^3\ \text{rad/s})^2}$$

$$A=2\cdot 10^{-3}\,\text{m}=2\ \text{mm}$$

c) Utilizamos la relación entre la velocidad y la elongación para determinar la velocidad de la partícula cuando su elongación es de x = 1,2 mm = 1,2 · 10^{-3} m:

$$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

$$v=\pm 2\cdot 10^3\ \text{rad/s}\sqrt{(2\cdot 10^{-3}\text{m})^2-(1{,}2\cdot 10^{-3}\text{m})^2}$$

$$v=\pm 3{,}2\ \text{m/s}$$

d) Determinamos la fase inicial a partir de la velocidad para t = 2 s:

$$v=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$4=2\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^3\cos(2\cdot 10^3\cdot 2+\varphi_0)$$

$$4=4\cos(4\cdot 10^3+\varphi_0);\ \cos(4\cdot 10^3+\varphi_0)=1$$

$$(4\cdot 10^3+\varphi_0)=0;\ \varphi_0=-4\cdot 10^3\ \text{rad}$$

Escribimos las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración:

$$x=A\,\text{sen}(\omega t+\varphi_0)=2\cdot 10^{-3}\,\text{sen}\,(2\cdot 10^3 t-4\cdot 10^3)$$

$$v=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)=4\cos(2\cdot 10^3 t-4\cdot 10^3)$$

$$a=-A\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t+\varphi_0)=-8\cdot 10^3\,\text{sen}\,(2\cdot 10^3 t-4\cdot 10^3)$$

32. Datos: m = 0,6 kg; K = 10 N/m; A = 5 cm = 0,05 m

Hay que tener en cuenta que se trata de un MAS de energía constante, ya que no existe rozamiento.

a) Calculamos la energía total del sistema:

$$E=\frac{1}{2}K\,A^2;\ E=\frac{1}{2}\cdot 10\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\,(0{,}05\ \text{m})^2=0{,}0125\ \text{J}$$

b) El cuerpo tendrá velocidad máxima cuando toda su energía sea cinética, lo que sucede en el punto de equilibrio:

$$Ec_{max}=E=\frac{1}{2}m\,v_{max}^{\ 2};\ v_{max}=\pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$v_{max}=\pm\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}012\ \text{J}}{0{,}6\ \text{kg}}}=\pm 0{,}2\ \text{m/s}$$

c) Determinamos la energía potencial del cuerpo en x = 2 cm = 0,02 m:

$$Ep=\frac{1}{2}K\,x^2;\ Ep=\frac{1}{2}\cdot 10\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\,(0{,}02\ \text{m})^2=2\cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

La energía cinética es la energía total menos la potencial:

$$E = Ep + Ec$$

$$Ec = E - Ep;\ Ec = 0{,}012\ J - 2 \cdot 10^{-3}\ J = 0{,}01\ J$$

33. Datos: m = 0,5 kg; A = 10 cm = 0,1 m; T = 2 s

a) Determinamos la energía total del sistema, que coincidirá con la energía potencial máxima en los extremos de la trayectoria, y con la cinética máxima en el punto de equilibrio. Para ello, calculamos primero la pulsación a partir del período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ \omega = \frac{2\pi}{2\ s} = \pi\ \frac{rad}{s}$$

$$Ec_{max} = Ep_{max} = E = \frac{1}{2} K\ A^2 = \frac{1}{2} m\ \omega^2 A^2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\ kg \cdot \left(\pi\ \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot (0{,}1\ m)^2$$

$$Ec_{max} = Ep_{max} = E = 0{,}02\ J$$

b) La velocidad del cuerpo será máxima cuando sea máxima su energía cinética. Por tanto:

$$Ec = \frac{1}{2} m\ v^2;\ v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2Ec_{max}}{m}}$$

$$v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}02\ J}{0{,}5\ kg}} = \pm 0{,}3\ m/s$$

c) En este sistema, la energía sólo depende de las características del muelle (K) y del movimiento (A). Es independiente de la masa del cuerpo. Por tanto, con un cuerpo de m = 2 kg tendríamos los mismos resultados.

34. Datos: m = 0,5 kg; L = 1 m; α = 8° = 0,14 rad; g = 9,8 m/s^2

a) Hallamos la pulsación y la amplitud para determinar la energía potencial máxima, Ep:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}};\ \omega = \sqrt{\frac{9{,}8\ \frac{m}{s^2}}{1\ m}} = 3{,}1\ rad/s$$

$$A = \alpha\ L = 0{,}14\ rad \cdot 1\ m = 0{,}14\ m$$

$$Ep_{max} = E = \frac{1}{2} K\ A^2 = \frac{1}{2} m\ \omega^2 A^2$$

$$Ep_{max} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\ kg \cdot \left(3{,}1\ \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot (0{,}14\ m)^2 = 0{,}05\ J$$

b) Calculamos la velocidad máxima a partir de la energía cinética máxima:

$$Ec = \frac{1}{2} m\ v^2;\ Ec_{max} = Ep_{max};\ v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2Ec_{max}}{m}}$$

$$v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}05\ J}{0{,}5\ kg}} = \pm 0{,}45\ m/s$$

35. Datos: L = 0,248 m; T = 1 s; α = 18° = 0,314 rad;

m = 5 g = 0,005 kg

a) Determinamos g en ese punto a partir del período del movimiento:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};\ g = 4\pi^2\ \frac{L}{T^2}$$

$$g = 4\pi^2\ \frac{0{,}248\ m}{(1\ s)^2};\ g = 9{,}79\ m/s^2$$

b) Hallamos la amplitud y la pulsación del movimiento para calcular la velocidad máxima:

$$A = \alpha\ L = 0{,}314\ rad \cdot 0{,}248\ m = 0{,}078\ m$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1\ s} = 2\pi\frac{rad}{s}$$

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm 0{,}078\ m \cdot 2\pi\ rad/s = \pm 0{,}49\ m/s$$

c) La fuerza que tiende a llevarlo a la posición de equilibrio es máxima en los puntos de máxima elongación:

$$|F| = Kx;\ F_{max} = \pm KA = \frac{m\ g}{L}\ A$$

$$F_{max} = \pm\frac{0{,}005\ kg \cdot 9{,}79\ \frac{m}{s^2}}{0{,}248\ m} \cdot 0{,}078\ m = \pm 0{,}015\ N$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 116 y 117)

36. *a)* La aceleración de un oscilador armónico, en el punto donde la velocidad es máxima, es nula (esto ocurre en el punto de equilibrio, de elongación nula).

b) Cuando la elongación es máxima, la aceleración es también máxima, mientras que la velocidad es nula.

37. $x = A\ sen\ (\omega t + \varphi_0)$

a) Si el movimiento comienza en el centro de la oscilación, x = 0 para t = 0. Por tanto:

$$0 = A\ sen\ \varphi_0;\ sen\ \varphi_0 = 0;\ \varphi_0 = 0 \text{ ó } \pi$$

b) Si el movimiento empieza en el punto extremo de las elongaciones positivas:

$$A = A\ sen\ \varphi_0;\ sen\ \varphi_0 = 1;\ \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

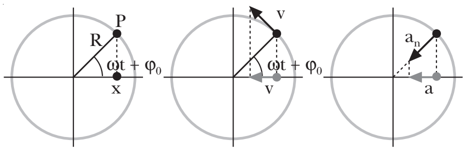
c) En el caso que comience en el extremo de las elongaciones negativas:

$$-A = A\ sen\ \varphi_0;\ sen\ \varphi_0 = -1;\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

38. Una partícula que describe un MAS en un período recorre una distancia igual al doble de la amplitud, x = 2A.

— Si sabemos que en un instante la velocidad de una partícula en una MAS es nula, podemos decir que la partícula está en uno de los puntos extremos, pero no podemos saber si está en x = A o en x = –A. Tampoco podemos conocer el sentido de su desplazamiento.

39. La proyección sobre un diámetro de un MCU corresponde a la elongación de un MAS. El radio del MCU es igual a la amplitud del MAS. La frecuencia y el período del MCU y del MAS son los mismos. La velocidad del MAS corresponde a la proyección de la velocidad lineal del MCU, y la aceleración del MAS es la proyección de la aceleración normal del MCU.



$x = R \cos(\omega t + \varphi_0) = A \text{ sen } (\omega t + \varphi'_0)$

40. La fuerza que aplicamos para estirar el extremo de un muelle debe ser igual pero de signo opuesto a la fuerza elástica del resorte en el punto en que lo soltamos. No es la fuerza elástica, porque la aplicamos nosotros y no el muelle, pero debe ser igual en módulo y de sentido opuesto.

41. El período de oscilación de un resorte depende de la masa colgada en el extremo y de la constante del muelle. Por tanto, si cambiamos la masa, cambiará el período.

— En particular, si duplicamos la masa, m' = 2 m:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}} = \sqrt{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}};\ T' = \sqrt{2}T$$

42. Como la energía total del sistema es la cinética más la potencial, los puntos de la trayectoria de un MAS en los que la energía potencial y la cinética sean iguales verificarán que $Ep = Ec = \frac{1}{2}E$:

$$Ep = \frac{1}{2}K\,x^2 = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}K\,A^2\right) = \frac{1}{4}K\,A^2$$

$$\frac{1}{2}K\,x^2 = \frac{1}{4}K\,A^2;\ x^2 = \frac{1}{2}A^2;\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A$$

43. Como el período de un péndulo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la gravedad, en la Luna, donde la gravedad es menor, el péndulo oscilará más lentamente que en la Tierra; es decir, el período será más largo. En cambio, en Júpiter, donde la gravedad es mucho mayor, el período del péndulo será mucho más pequeño y oscilará más rápido.

44. Un sistema real, con fuerzas de rozamiento, sólo podrá tener un MAS si existe algún dispositivo que fuerce las oscilaciones, proporcionando al sistema justamente la energía que disipa la fuerza de rozamiento.

45. Datos: MAS; f = 150 Hz; A = 5 cm = 0,05 m

a) Hallamos el período a partir de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f};\ T = \frac{1}{150\ \text{Hz}} = 6{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

b) Calculamos la pulsación:

$$\omega = 2\pi\,f;\ \omega = 2\pi\cdot 150\ \text{Hz};\ \omega = 300\pi\ \text{rad/s}$$

c) Escribimos la ecuación de la elongación:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}05\ \text{sen}\ (300\pi t + \varphi_0)$$

Si en t = 0 la elongación es x = 0, podemos determinar la fase inicial:

$$0 = 0{,}05\ \text{sen}\ (300\pi\cdot 0 + \varphi_0);\ \text{sen}\ \varphi_0 = 0;\ \varphi_0 = 0\ \text{ó}\ \pi$$

Como en t = 0 es v > 0, tenemos:

$$v = A\cos\varphi_0 > 0$$

Por lo tanto, $\varphi_0 = 0$:

$$x = 0{,}05\,\text{sen}\,(300\pi t)$$

46. Datos: MAS; $x = 0{,}20$ sen $(10t + \pi/2)$, unidades SI

De la expresión de la elongación deducimos que A = 0,20 m, ω = 10 rad/s y $\varphi_0 = \pi/2$.

Determinamos la velocidad máxima a partir de la ecuación de la velocidad:

$$v_{max} = \pm\omega\,A;\ v_{max} = \pm 10\ \text{rad/s}\cdot 0{,}20\ \text{m};\ v_{max}$$
$$v_{max} = \pm 2\ \text{m/s}$$

— Cuando la velocidad es máxima, sabemos que la partícula está exactamente en x = 0. Sin más información, no podemos saber el sentido del movimiento.

47. *a)* Datos: MAS; a = –90 m/s² cuando x = 0,10 m

Determinamos la pulsación a partir de la relación entre la aceleración y la elongación:

$$a = -\omega^2 x;\ \omega = \sqrt{\frac{-a}{x}};\ \omega = \sqrt{\frac{-\left(-90\ \frac{m}{s^2}\right)}{0{,}10\ \text{m}}} = 30\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Hallamos el período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{30\ \text{rad/s}} = 0{,}21\ \text{s}$$

b) Datos: MAS; x = –0,01 m; f = 5 Hz

Calculamos la pulsación y relacionamos la aceleración con la elongación:

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi\cdot 5\ \text{Hz};\ \omega = 10\pi\ \text{rad/s}$$

$$a = -\omega^2 x;\ a = -(10\pi\ \text{rad/s})^2\cdot(-0{,}01\ \text{m}) = \pi^2\ \text{m/s}^2$$

c) Datos: MAS; a = –2x; A = 0,01 m

De la relación entre a y x hallamos la pulsación y el período:

$$a = -\omega^2 x = -2x;\ \omega = \sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\ \text{rad/s}} = \sqrt{2}\pi\ \text{s}$$

Con ello, podemos escribir la ecuación de la elongación, excepto la fase inicial, que supondremos nula:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = 0{,}01\,\text{sen}(\sqrt{2}\,t)$$

48. Datos: MAS; $a = -16\,\pi^2\,x$; $A = 0{,}04$ m

A partir de la elongación máxima, encontramos el valor de la aceleración máxima:

$$a_{max} = \pm\omega^2 A = \pm 16\pi^2\,\frac{rad^2}{s^2}\cdot 0{,}04\,m = \pm 0{,}64\,\pi^2\,\frac{m}{s^2}$$

Calculamos la velocidad máxima:

$$v_{max} = \pm\omega\,A = \pm\sqrt{16\pi^2}\,A = \pm 4\pi\cdot 0{,}04\,\frac{m}{s^2} = \pm 0{,}16\,\pi\,\frac{m}{s}$$

49. Datos: $K = 20$ N/m; $m = 300$ g $= 0{,}3$ kg

La posición de equilibrio del cuerpo será aquélla en que la fuerza recuperadora del muelle y el peso del cuerpo sean iguales:

$$m\,g = -Kx$$

$$x = -\frac{m\,g}{K};\ x = -\frac{0{,}3\,kg\cdot 9{,}8\,\frac{N}{kg}}{20\,\frac{N}{m}} = -0{,}15\,m$$

a) La amplitud de las oscilaciones será la distancia desde el punto en que lo soltamos (longitud natural del muelle) hasta el punto de equilibrio, $A = 0{,}15$ m. Es decir, la amplitud coincidirá con el alargamiento del muelle. Entonces, la posición más baja estará a $-2A$ de donde lo hemos soltado, a una distancia $x = -A$ del punto de equilibrio y centro de las oscilaciones. Así, la posición más baja será $x = -0{,}15$ m respecto a la posición de equilibrio.

b) Determinamos el período del movimiento:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}3\,kg}{20\,N/m}} = 0{,}77\,s$$

50. Datos: $m = 1{,}8$ kg; $K = 20$ N/m; $A = 30$ cm $= 0{,}3$ m

En la posición de equilibrio, la energía cinética y la velocidad son máximas, mientras que la energía potencial es nula. Calculamos la energía total del sistema, que coincidirá con la energía cinética en la posición de equilibrio:

$$Ec = E = \frac{1}{2}K\,A^2;\ E = \frac{1}{2}\cdot 20\,\frac{N}{m}\cdot(0{,}3\,m)^2 = 0{,}9\ J$$

$$Ec = E = 0{,}9\ J$$

Hallamos la velocidad:

$$Ec = \frac{1}{2}m\,v^2;\ v = \pm\sqrt{\frac{2Ec}{m}};\ v = \pm\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}9\ J}{1{,}8\,kg}};\ v = \pm 1{,}0\,\frac{m}{s}$$

51. Datos: $T = 10$ s

Despejamos la longitud del péndulo de la expresión del período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};\ T^2 = 4\pi^2\,\frac{L}{g};\ L = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

$$L = \frac{(10\,s)^2\cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{4\pi^2} = 24{,}8\,m$$

52. Datos: MAS; $x = 4\cos(\pi t + \pi/4)$, unidades SI

a) La pulsación del movimiento es $\omega = \pi$ rad/s. Por tanto, el período y la frecuencia serán:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,s;\ f = \frac{1}{T} = 0{,}5\,Hz$$

b) Calculamos la posición, la velocidad y la aceleración para $t = 1$ s:

$$x = 4\cos\left(\pi\cdot 1\,s + \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{5\pi}{4} = -2{,}83\,m$$

$$v = -4\pi\,\text{sen}\left(\pi\cdot 1\,s + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4} = 8{,}89\,\frac{m}{s}$$

$$a = -4\pi^2\cos\left(\pi\cdot 1\,s + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi^2\cos\frac{5\pi}{4} = 27{,}9\,\frac{m}{s^2}$$

53. Datos: MAS; $t_1 = 0{,}75$ s, $x_1 = 2$ m; $t_2 = 3{,}75$ s; $v_2 = 0$ m/s;

$T = 6$ s

a) Determinamos primero la pulsación a partir del período, para escribir la ecuación de la elongación para t_1 y la ecuación de la velocidad para t_2:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6\,s} = \frac{\pi}{3}\,\frac{rad}{s}$$

$$x_1 = A\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t_1 + \varphi_0\right);\ 2 = A\,\text{sen}\,(0{,}25\pi + \varphi_0)$$

$$v_2 = A\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t_2 + \varphi_0\right);\ 0 = A\frac{\pi}{3}\cos\,(1{,}25\pi + \varphi_0)$$

A partir de la segunda ecuación determinamos parcialmente la fase inicial:

$$0 = A\frac{\pi}{3}\cos\,(1{,}25\pi + \varphi_0);\ \cos\,(1{,}25\pi + \varphi_0) = 0$$

$$1{,}25\pi + \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_0 = -0{,}75\pi\ rad\ \text{o}\ \varphi_0 = -1{,}75\pi\ rad$$

Como la elongación en t_1 es positiva:

$$\text{sen}\ (0{,}25\pi + \varphi_0) > 0\ \text{y}\ \varphi_0 = -1{,}75\pi\ rad$$

Hallamos ahora la amplitud despejándola de la ecuación de la elongación para t_1:

$$2 = A\,\text{sen}\,(0{,}25\pi - 1{,}75\pi) = A\,\text{sen}\,(-1{,}5\pi) = A$$

$$A = 2\,m$$

b) En t_2 = 3,75 s, como sabemos que la velocidad es nula, la partícula se encuentra en uno de los extremos de su movimiento y la aceleración es máxima. Por tanto:

$$|a_{max}| = \omega^2 A;\ a_{max} = \left(\frac{\pi}{3}\ \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 2\ m = 2{,}2\ \frac{m}{s^2}$$

c) Calculamos la velocidad máxima:

$$v_{max} = \pm\omega\ A = \pm\left(\frac{\pi}{3}\ \frac{rad}{s}\right) \cdot 2\ m = \pm 2{,}1\ \frac{m}{s}$$

d) Escribimos las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo:

$$x = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} t - 1{,}75\pi\right)$$

$$v = \frac{2\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} t - 1{,}75\pi\right)$$

$$a = -\frac{2\pi^2}{9}\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} t - 1{,}75\pi\right)$$

54. Datos: Δx = 10 cm = 0,1 m; m = 2 kg; A = 3 cm = 0,03 m

a) Determinamos la constante del resorte a partir de la nueva posición de equilibrio para la masa de 2 kg:

$$m\ g = K\ \Delta x;\ K = \frac{m\ g}{\Delta x} = \frac{2\ kg \cdot 9{,}8\ \frac{N}{kg}}{0{,}1\ m} = 196\ \frac{N}{m}$$

Hallamos la pulsación y el período del MAS del resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{196\ \frac{N}{m}}{2\ kg}};\ \omega = 9{,}90\ \frac{rad}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9{,}90\ \frac{rad}{s}};\ T = 0{,}63\ s$$

b) La velocidad máxima es:

$$v_{max} = \pm A\ \omega = \pm 0{,}03\ m \cdot 9{,}90\ rad/s$$
$$v_{max} = \pm 0{,}30\ m/s$$

c) Determinamos la energía mecánica, que será constante para todo el movimiento:

$$E = \frac{1}{2} K\ A^2;\ E = \frac{1}{2} \cdot 196\ \frac{N}{m} \cdot (0{,}03\ m)^2 = 0{,}088\ J$$

55. Datos: K = 250 $N{\cdot}m^{-1}$; x = –10 cm = –0,1m; m = 0,5 kg

a) Inicialmente, cuando el muelle está comprimido, toda su energía es potencial, y es:

$$Ep = \frac{1}{2} K\ x^2 = \frac{1}{2} \cdot 250\ \frac{N}{m} \cdot (0{,}1\ m)^2;\ Ep = 1{,}25\ J$$

En ese instante, el cuerpo está en reposo y su energía cinética es nula. Cuando el resorte empieza a estirarse, pierde paulatinamente energía potencial y la cede al cuerpo, que adquiere energía cinética. Finalmente, el cuerpo sale despedido con una energía cinética igual a la energía potencial inicial del resorte:

$$Ec = 1{,}25\ J$$

b) Calculamos la velocidad del cuerpo a partir de su energía cinética:

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2;\ v = \sqrt{\frac{2Ec}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}25\ J}{0{,}5\ kg}};\ v = 2{,}2\ \frac{m}{s}$$

56. Datos: L = 155 cm = 1,55 m; 100 vibraciones en 250 s; $\alpha = 20° = 0{,}35$ rad

Determinamos el período del péndulo:

$$f = \frac{100\ \text{vibraciones}}{250\ s} = 0{,}4\ Hz;\ T = \frac{1}{f} = 2{,}5\ s$$

Hallamos la aceleración de la gravedad en ese lugar a partir de la fórmula del período del péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};\ g = 4\pi^2\ \frac{L}{T^2}$$

$$g = 4\pi^2\ \frac{1{,}55\ m}{(2{,}5\ s)^2} = 9{,}79\ \frac{m}{s^2}$$

— Calculamos la amplitud del movimiento, para determinar a continuación la velocidad máxima:

$$A = \alpha\ L = 0{,}35 \cdot 1{,}55\ m = 0{,}54\ m$$

$$v_{max} = A\ \omega;\ v_{max} = A \cdot 2\pi\ f = 0{,}54\ m \cdot 2\pi \cdot 0{,}4\ Hz;$$
$$v_{max} = 1{,}4\ m/s$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO
(pág. 117)

1. En un MAS el vector posición y la aceleración nunca tienen el mismo sentido, ya que la aceleración siempre apunta hacia el punto de equilibrio, y este mismo punto es el origen de las posiciones.

   La aceleración y la velocidad, en cambio, sí pueden tener el mismo sentido, pero no lo tienen siempre. Sólo tienen el mismo sentido cuando el oscilador se desplaza desde uno de los extremos hasta el punto de equilibrio. Pero mientras se mueve del centro a los extremos, la velocidad y la aceleración tienen sentidos opuestos.

   La velocidad y el desplazamiento tienen el mismo sentido en el tramo del centro de las oscilaciones a los extremos, pero tienen sentido opuesto en el movimiento de vuelta desde los extremos al punto de equilibrio.

2. Escribimos primero la ecuación de la velocidad y determinamos el valor de la fase cuando $v = \frac{1}{2} v_{max}$:

$$v = \frac{1}{2} v_{max} = \frac{1}{2} A\ \omega = A\ \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{1}{2} = \cos(\omega t + \varphi_0);\ \omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

Conocida la fase, hallamos la elongación correspondiente:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = A \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 0{,}86\ A$$

3. *a)* Si un oscilador lineal duplica su amplitud, su energía total se cuadruplicará, ya que si $A_1 = 2A$:

$$E_1 = \frac{1}{2} K\ A_1^2 = \frac{1}{2} K\ (2A)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} K\ A^2 = 4\ E$$

b) Si se duplica la frecuencia, la energía también se cuadruplica, ya que es proporcional a la constante recuperadora K, y $K = m\omega^2$. Así, si $\omega_1 = 2\omega$:

$$E_1 = \frac{1}{2} K_1\ A^2 = \frac{1}{2} m\ \omega_1^2 A^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} m\ \omega^2 A^2 = 4\ E$$

c) Si se duplica la amplitud y se reduce la frecuencia a la mitad, la energía permanece constante, ya que si $A_1 = 2A$ y $\omega_1 = \omega/2$:

$$E_1 = \frac{1}{2} K_1\ A_1^2 = \frac{1}{2} m\ \omega_1^2 A_1^2 = \frac{1}{2} m\ \frac{\omega^2}{4} \cdot 4A^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m\ \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} K\ A^2 = E$$

4. El período de un péndulo simple de longitud L que oscila en un lugar con gravedad g es, independientemente de la masa colgada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Para otro péndulo de longitud L' = 2L, tendremos:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,L}{g}} = \sqrt{2}\ 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{2}\ T$$

$$T' = \sqrt{2}\ T$$

5. Datos: MAS; $x_0 = -A$; $T/4 = 0{,}1$ s; $2A = 0{,}2$ m

a) El tiempo que tarda en ir de un extremo de la trayectoria al centro es una cuarta parte del período:

$$T = 4 \cdot 0{,}1\ \text{s} = 0{,}4\ \text{s}$$

b) Hallamos la pulsación a partir del período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ \omega = \frac{2\pi}{0{,}4\ \text{s}} = 5\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

c) Escribimos la ecuación de la elongación:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0{,}1 \operatorname{sen}(5\pi t + \varphi_0)$$

Sabiendo que en t = 0 la posición es $x_0 = -A$, determinamos la fase inicial:

$$-A = A \operatorname{sen}(5\pi \cdot 0 + \varphi_0);\ \operatorname{sen}\varphi_0 = -1$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Hallamos la posición para t = 1 s:

$$x = 0{,}1 \operatorname{sen}\left(5\pi \cdot 1\,\text{s} - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 0{,}1\ \text{m}$$

6. Datos: $m_1 = 5$ kg; K = 500 N/m; A = 10 cm = 0,1m

a) Calculamos la pulsación del resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{500\ \frac{\text{N}}{\text{m}}}{5\ \text{kg}}} = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Escribimos la ecuación de la elongación tomando como origen de posiciones el punto de equilibrio, después de haber colgado la masa, y el sentido positivo hacia arriba:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0);\ x = 0{,}1 \operatorname{sen}(10t + \varphi_0)$$

Teniendo en cuenta que la posición inicial (para t = 0) es $x_0 = -A$, determinamos la fase inicial:

$$-0{,}1 = 0{,}1 \operatorname{sen}(10 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\operatorname{sen}\varphi_0 = -1;\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 0{,}1 \operatorname{sen}\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

b) La aceleración de la masa es nula en la posición de equilibrio, para x = 0.

c) La energía total del oscilador es constante a partir del momento en que soltamos la masa:

$$E = \frac{1}{2} K\ A^2 = \frac{1}{2} \cdot 500\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}1\ \text{m})^2$$

$$E = 2{,}5\ \text{J}$$

En los puntos extremos de la trayectoria, la masa queda momentáneamente en reposo, y toda la energía es potencial elástica, debida a la compresión o alargamiento del resorte.

En el punto de equilibrio, la energía potencial elástica es nula, y toda la energía del sistema está en forma de energía cinética.

En este problema, como los desplazamientos son pequeños, podemos considerar que la energía potencial gravitatoria es constante en todo momento. Escogemos el origen de forma que sea nula.