Relación Problemas Tema 5: Campo Gravitatorio

1. La tabla adjunta relaciona el periodo T y el radio de las órbitas de cinco satélites que giran alrededor del mismo astro:

T (años)	***0,44***	***1,61***	***3,88***	***7,89***
R ($\cdot 10^5$)km	***0,88***	***2,08***	***3,74***	***6,00***

a) Mostrar si se cumple la tercera ley de Kepler. ¿Cuál es el valor de la constante?
b) Se descubre un quinto satélite, cuyo periodo de revolución es 6,20 años. Calcula el radio de su órbita.

a) La ley 3ª ley de Kepler dice que "El cuadrado del periodo de revolución de un planeta alrededor del sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol".

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = cte$$

Por tanto para estos datos:

T (seg)	$1{,}388\cdot10^7$	$5{,}077\cdot10^7$	$1{,}224\cdot10^8$	$2{,}488\cdot10^8$
R (m)	$8{,}800\cdot10^4$	$2{,}080\cdot10^5$	$3{,}740\cdot10^5$	$6{,}000\cdot10^5$
$\frac{T^2}{R^3}$ ($s^2\cdot m^{-3}$)	$2{,}86\cdot10^{-10}$	$2{,}86\cdot10^{-10}$	$2{,}86\cdot10^{-10}$	$2{,}86\cdot10^{-10}$

A la vista de estos datos podemos decir que la ley de Kepler se cumple, y el valor de la constante es $2{,}86\cdot10^{-10}$ ($s^2\cdot m^{-3}$)

b) Los datos para el quinto satélite son:

T	$1{,}955\cdot10^8$ seg	6,2 (años)
R	$5{,}11\cdot 10^8$ m	$5{,}11\cdot(10^5$ km)
$\frac{T^2}{R^3}$	$2{,}86\cdot10^{-10}$ ($s^2\cdot m^{-3}$)	$2{,}86\cdot10^{-16}$ $años^{-2}\cdot km^{-3}$

2. Una masa de 8 kg está situada en el origen. Calcular: A) Intensidad del campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el punto (2,1) m. B) Fuerza con que atraería a una masa m de 2 kg, y energía almacenada por dicha masa. C) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar la masa m desde el punto (2,1) m al punto (1,1) m.

a) La intensidad del campo gravitatorio la calculamos mediante: $\vec{g} = \frac{-G\cdot m}{r^2}\hat{r}$, por tanto:

$$\vec{g} = \frac{-G\cdot m}{r^2}\hat{r} = 1{,}0672\cdot10^{-10}\hat{r}\ \ N\cdot Kg^{-1}$$

El vector $\hat{r}$, es el vector unitario en la dirección de $\vec{r}$.

$$\vec{r} = (2,1) \Rightarrow r = \sqrt{5} \Rightarrow \hat{r} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Por tanto $\vec{g}$ será:

$$\vec{g}=\frac{-G\cdot m}{r^2}\hat{r}=\frac{-G\cdot m}{r^2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i},\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}\right)=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 8kg}{5m^2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i},\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}\right)=\left(-9,55\cdot 10^{-11}\hat{i}-4,77\cdot 10^{-11}\hat{j}\right)N\cdot Kg^{-1}$$

El potencial gravitatorio vendrá dado por:

$$V=\frac{-G\cdot m}{r}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 8kg}{\sqrt{5}m}=-2,386\cdot 10^{-10}J\cdot kg^{-1}$$

b) Para calcular la fuerza con la que atraería a una masa de dos kilos colocada en dicho punto, aplicamos la ley de la gravitación universal:

$$\vec{F}=\frac{-G\cdot M\cdot m}{r^2}\cdot\hat{r}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 8kg\cdot 2kg}{5m^2}\hat{r}=2,134\cdot 10^{-10}\hat{r}\ N$$

Que al igual que antes, nos dará:

$$\vec{F}=\frac{-G\cdot M\cdot m}{r^2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i},\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}\right)=\left(-1,909\cdot 10^{-10}\hat{i}-9,541\cdot 10^{-10}\hat{j}\right)N$$

c) El trabajo realizado para desplazar la masa de 2kg desde le punto (2,1) hasta el punto (1,1), será la variación de la energía potencial entre los dos puntos.

$$W=-\Delta E_p=-(E_{p2}-E_{p1})$$

Calculamos primero la energía potencial en el (2,1), aquí:

$$E_{p_1}=\frac{-G\cdot M\cdot m}{r_1}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 8kg\cdot 2kg}{\sqrt{5}m}=-4,772\cdot 10^{-10}J$$

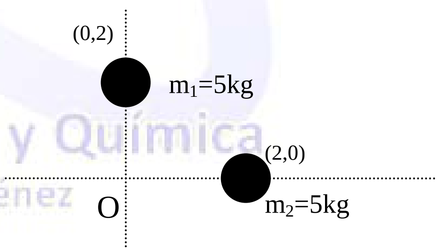
En el punto (1,1) valdrá:

$$E_{p_1}=\frac{-G\cdot M\cdot m}{r_1}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 8kg\cdot 2kg}{\sqrt{2}m}=-7,546\cdot 10^{-10}J$$

Y el trabajo será:

$$W=-\Delta E_p=-(E_{p2}-E_{p1})=-\left(-7,546\cdot 10^{-10}+4,772\cdot 10^{-10}\right)=2,774\cdot 10^{-10}J$$

3. Dos masas de 5 kg se encuentran en los puntos (0,2) m y (2,0) m. Calcular: A) Intensidad de campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el origen. B) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar al trasladar una masa de 1 kg desde el infinito hasta el origen.



a) Calculamos primero el campo creado por cada una de ellas en el origen de coordenadas:

$$\vec{g}_{m_1}=\frac{-G\cdot m}{y^2}\hat{j}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 5kg}{4m^2}\hat{j}=8,334\cdot 10^{-11}\hat{j}\quad N\cdot kg^{-1}$$

$$\vec{g}_{m_2}=\frac{-G\cdot m}{x^2}\hat{i}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 5kg}{4m^2}\hat{i}=8,334\cdot 10^{-11}\hat{i}\quad N\cdot kg^{-1}$$

Aplicando el principio de superposición, tenemos:

$$\vec{g} = \vec{g}_{m_1} + \vec{g}_{m_2} = 8,334 \cdot 10^{-11}\left(\hat{i} + \hat{j}\right)\ N \cdot kg^{-1}$$

El potencial gravitatorio en el origen viene dado por la suma de los potenciales creados por cada una de las masas en el origen:

$$V_{m_1} = \frac{-G \cdot m_1}{r_1} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 5kg}{2m} = -1,668 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

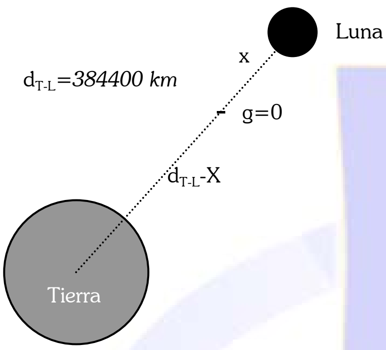
$$V_{m_2} = \frac{-G \cdot m_2}{r_2} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 5kg}{2m} = -1,668 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

Por tanto, en el origen de coordenadas:

$$V_o = V_{m_1} + V_{m_2} = -3,335 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

b) Para calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para trasladar una masa de 1 kg desde el infinito hasta el origen de coordenadas, utilizamos:

$$W = -\Delta E_p = -m(V_o - V_\infty) = -1kg \cdot \left(-3,335 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1} - 0 J \cdot kg^{-1}\right) = 3,335 \cdot 10^{-10} J$$



4.- a) ¿En qué punto se equilibran las atracciones que ejercen la Luna y La Tierra sobre un cuerpo de masa m? (Datos: distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna = 384400 km; $\frac{M_T}{M_L} = 81$ b) Si en dicho punto la atracción gravitatoria que sufre la masa m es nula, ¿podemos decir también que su energía potencial también es nula? Razonar.

a) En el punto en cuestión, ocurrirá que la intensidad del campo gravitatorio será nula debido a que en dicho punto se igualaran ambas atracciones.

Por tanto, calculamos el valor del campo gravitatorio de la tierra y de la luna en ese punto y los igualamos:

$$\vec{g}_T = \frac{-G \cdot M_T}{r^2}\hat{r} = \frac{-G \cdot 81 M_L}{\left(d_{T-L} - x\right)^2}\hat{r} \qquad \vec{g}_L = \frac{-G \cdot M_L}{r^2}\hat{r} = \frac{-G \cdot M_L}{\left(x\right)^2}\hat{r}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{-G \cdot 81 M_L}{\left(d_{T-L} - x\right)^2} = \frac{-G \cdot M_L}{\left(x\right)^2} \quad \text{Operando un poco:} \quad \frac{-G \cdot 81 M_L}{-G \cdot M_L} = \frac{\left(d_{T-L} - x\right)^2}{\left(x\right)^2} = \left(\frac{d_{T-L} - x}{x}\right)^2$$

Tomando la raíz cuadrada a cada uno de los miembros de esta igualdad y simplificando, tenemos:

$$9 = \frac{d_{T-L} - x}{x}$$

De donde:

$$9x = d_{T-L} - x$$

Y de aquí:

$$10x = d_{T-L}$$

de donde:

$$x = \frac{d_{T-L}}{10} = 3,844 \cdot 10^7 m$$

Y la distancia desde la tierra donde se anulan los campos gravitatorios será:

$$d_{T-L} - x = 3{,}459\cdot10^{8}\,m$$

b) Su energía potencial no es nula, porque tanto para la tierra como para la luna, esta masa está a una determinada altura, y por tanto en virtud de su posición tendrá energía potencial.

5.- Un objeto que pesa 70 kp en la superficie de la Tierra, se encuentra en la superficie de un planeta cuyo radio es el doble del terrestre y cuya masa es ocho veces la de la Tierra. Calcular:

a) Peso del objeto en dicho lugar.

b) Tiempo que tarda en caer desde una altura de 20 m hasta la superficie del planeta, si lo dejamos caer con $v_o = 0$.

a) Lo primero será calcular el campo gravitatorio en la superficie del planeta.

$$\vec{g}_p = \frac{-G\cdot M_p}{{R_p}^2}\hat{r} = \frac{-G\cdot 8M_T}{(2R_T)^2}\hat{r} = \frac{-8\cdot G\cdot M_T}{4\cdot R_T^2} = 2\cdot\left(\frac{-G\cdot M_T}{R_T^2}\right)\hat{r} = 2g_o\hat{r}$$

Por tanto el cuerpo pesa el doble en la superficie de dicho planeta con respecto a la tierra.

$$P = 2\cdot 70kp = 140kp = 1373{,}4N$$

b) Aplicando las ecuaciones de la caída libre de graves:

$$h = h_0 + v_o\cdot t + \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

Y las restricciones iniciales, tenemos:

$$h = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

Por tanto despejando t, nos queda:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20m}{2.9{,}81m\cdot s^{-2}}} = 1{,}43\ segundos$$

6.- Calcular: a) Altura sobre la superficie terrestre en la que el valor de g se ha reducido a la mitad. b) Potencial gravitatorio terrestre en un punto situado a 6370 km de distancia de la Tierra. (Datos: Masa de la Tierra = $6\cdot10^{24}$ kg ; R_T= 6370 km.)

a) El campo gravitatorio terrestre viene dado por: $\vec{g}_o = \frac{-G\cdot M_T}{{R_T}^2}\hat{r}$

A una altura h, vendrá dado por: $\vec{g}_T = \frac{-G\cdot M_T}{(R_T + h)^2}\hat{r}$

Como dice que su valor se verá reducido a la mitad:

$$\vec{g}_T = \frac{\vec{g}_o}{2} \qquad \text{Tenemos que} \qquad \frac{-G\cdot M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-G\cdot M_T}{R_T^2}$$

Operando encontramos que:

$$\frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{2}$$

Tomando raíces:

$$\frac{R_T}{(R_T + h)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Y de aquí,

$$h = R_T\left(\sqrt{2}-1\right) = 6370\left(\sqrt{2}-1\right) = 0,41 \cdot R_T = 2639\ km$$

c) A 6370 km de la superficie terrestre, el potencial gravitatorio terrestre será:

$$V_T = \frac{-G \cdot M_T}{2R_T} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24} kg}{2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 m} = -3,141 \cdot 10^7 J \cdot kg^{-1}$$

7.- Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 1000 m/s. Calcular: A) Altura máxima que alcanzará. B) Repetir lo anterior despreciando la variación de g con la altura. Comparar ambos resultados.

a) La energía mecánica en la superficie de la tierra viene dada por:

$$E_{M_o} = E_c - E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$$

Mientras que a la altura máxima será:

$$E_M = E_c - E_p = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h}$$

Según el principio de conservación de la energía:

$$E_{M_o} = E_M$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h}$$

Operando un poco, tenemos que:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$$

O lo que es lo mismo, una ecuación que nos dice que lo que varia la energía cinética, es lo mismo que lo que varía la potencial.
Sacando factor común y eliminando m:

$$v^2 = 2G \cdot M_T\left(-\frac{1}{R_T + h} + \frac{1}{R_T}\right)$$

Operando un poco:

$$v^2 = 2G \cdot M_T\left(\frac{R_T - R_T + h}{(R_T + h) \cdot R_T}\right) = 2G \cdot M_T\left(\frac{h}{R_T^2 + h \cdot R_T}\right) = \frac{2G \cdot M_T \cdot h}{R_T^2 + h \cdot R_T}$$

Multiplicando en cruz:

$$v^2\left(R_T^2 + h \cdot R_T\right) = 2G \cdot M_T \cdot h$$

Despejando h:

$$v^2 \cdot R_T^2 + v^2 \cdot h \cdot R_T = 2G \cdot M_T \cdot h \quad \Rightarrow \quad v^2 \cdot R_T^2 = 2G \cdot M_T \cdot h - v^2 \cdot h \cdot R_T = h\left(2G \cdot M_T - v^2 \cdot R_T\right)$$

$$h = \frac{v^2 \cdot R_T^2}{\left(2G \cdot M_T - v^2 \cdot R_T\right)} = \frac{10^6 \cdot \left(6,370 \cdot 10^6\right)^2 m^4 \cdot s^{-2}}{\left(2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} - 10^6 \cdot 6,370 \cdot 10^6\right) m^3 \cdot s^{-2}} = 51202\ m$$

b) Despreciando la variación de g con la altura, y utilizando la ecuación independiente del tiempo que tenemos de cinemática:

$$v_f^2 - v_o^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

Tenemos:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10^6 m}{2 \cdot 9,81 m \cdot s^{-2}} = 50968\ m$$

8.- Calcular la velocidad de escape para un cuerpo situado en: A) La superficie terrestre. B) A 2000 km sobre la superficie.

La velocidad de escape la calculamos haciendo la energía mecánica nula.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h}$$

Y despejando v:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T + h}}$$

a) En un punto situado sobre la superficie terrestre, h=0, tenemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6,370 \cdot 10^6}} = 11209\ m \cdot s^{-1} = 11,2\ km \cdot s^{-1}$$

b) En un punto situado a 2000 km de la superficie terrestre, tenemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6,370 + 2) \cdot 10^6}} = 9779\ m \cdot s^{-1} = 9,8\ km \cdot s^{-1}$$

9.- Un satélite artificial describe una órbita circular a una altura igual a tres radios terrestres sobre la superficie de la Tierra. Calcular: A) Velocidad orbital del satélite. B) Aceleración del satélite

a) Cuando un satélite orbita alrededor de un planeta, la fuerza de atracción del planeta se compensa con la fuerza centrífuga del satélite, por tanto:

$$F_g = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} = F_c$$

De donde despejando v, nos queda:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 6,370 \cdot 10^6}} = 3963\ m \cdot s^{-1}$$

b) La aceleración del satélite será:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(3963 m \cdot s^{-1}\right)^2}{4 \cdot 6,37 \cdot 10^6 m} = 0,616\ m \cdot s^{-2} \rightarrow \boxed{a_n = 0,616\ m \cdot s^{-2}}$$

10.- a) ¿Cuál será la altura que alcanzará un proyectil que se lanza verticalmente desde el Sol a 720 km/h.? b)¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en el Sol que en la Tierra? (M_{SOL}/M_{TIERRA}= 324440 ; R_S/R_T= 108 ; R_T= 6370 km)

a) Para calcular la altura que alcanzará el proyectil, utilizaremos la ecuación de la caída libre independiente del tiempo, que viene dada por:

$$v_f^2 - v_o^2 = 2 \cdot g_s \cdot h$$

Donde g_s es el valor de la aceleración de la gravedad en las proximidades de la superficie solar.

Para calcular g_s, hacemos:

$$g_s = \frac{-G \cdot M_s}{R_s^2} = \frac{-G \cdot 324440 \cdot M_T}{(108 R_T)^2} = \frac{324440}{11664} \cdot \frac{-G \cdot M_T}{R_T^2} = 27{,}81 \cdot g_o = 272{,}87\ m/s^2$$

Por tanto, si despejamos h de la ecuación $v_f^2 - v_o^2 = 2 \cdot g_s \cdot h$, tenemos:

$$h = \frac{v_f^2 - v_o^2}{2 g_s} = \frac{40000 m^2 \cdot s^{-2}}{2 \cdot 272{,}89 m \cdot s^{-2}} = 73{,}3\ m$$

b) En el sol tenemos que:

$$g_s = \frac{G \cdot M_s}{R_S^2} = \frac{G \cdot 324440 M_T}{(108 R_T)^2} = \frac{324440}{11664} \cdot \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} = \frac{324440}{11664} \cdot g_o = 27{,}82 \cdot g_o$$

Por tanto el peso de un cuerpo de masa m será 27,82 veces mas grande.

11.- Si la gravedad en la superficie lunar es aproximadamente 1/6 de la terrestre, calcular la velocidad de escape de la Luna ¿En qué medida importa la dirección de la velocidad? (dato R_{LUNA}= 1740 km)

Sabemos que la velocidad de escape viene dada por $v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_L}{R_L}}$, nos dicen que $g_L = \frac{1}{6} g_o$, entonces:

$\frac{GM_L}{R_L^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{GM_T}{R_T^2}$, si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por R_L, nos queda:

$$\frac{GM_L}{R_L^2} \cdot R_L = \frac{1}{6} \cdot \frac{GM_T}{R_T^2} \cdot R_L$$

Tenemos:

$$\frac{GM_L}{R_L} = \frac{1}{6} \cdot \frac{GM_T}{R_T^2} \cdot R_L$$

Por tanto, sustituyendo en la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{2GM_T}{R_T^2} \cdot R_L} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot g_o \cdot R_L} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 1{,}74 \cdot 10^6}{3}} = 2385 m \cdot s^{-1} = 2{,}4 km \cdot s^{-1}$$

$$\boxed{v_e = 2{,}4\ km \cdot s^{-1}}$$

12.- El planeta Marte tiene un radio R_M=0,53 R_T. Su satélite Fobos describe una órbita casi circular de radio igual a 2,77 veces R_M , en un tiempo de 7 h 39' 14". Calcula el valor de g en la superficie de Marte. (Dato: R_T= 6370 km)

La orbita de Fobos tiene un radio: $R = 2{,}77 \cdot 0{,}53 R_T = 9352 km = 9{,}35 \cdot 10^6 m$

Sabemos que el periodo de Fobos viene dado por:

$$T=\frac{s}{v}=\frac{2\cdot\pi\cdot R}{v_{orb}}=\frac{2\cdot\pi\cdot R}{\sqrt{\dfrac{G\cdot M_M}{R}}}$$, donde R es el radio calculado con anterioridad.

Operando un poco (multiplicando y dividiendo por R en el denominador):

$$T^2=\frac{4\cdot\pi^2\cdot R^2}{\dfrac{G\cdot M_M}{R}}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot R^2}{\dfrac{G\cdot M_M}{R^2}\cdot R}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot R^2}{g_{Mf}\cdot R}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot R}{g_{Mf}}$$

Donde g_{Mf} es el valor de la intensidad del campo gravitatorio de Marte a la altura de Fobos.

Despejando g_{Mf}, tenemos:

$$T^2=\frac{4\cdot\pi^2\cdot R}{g_{Mf}} \rightarrow g_{Mf}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot R}{T^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot 9{,}35\cdot 10^6\,m}{(27554\ s)^2}=0{,}486\ m\cdot s^{-2}$$

Sabemos además que:

$$g_{Mf}=\frac{G\cdot M_M}{R_f^2}=\frac{G\cdot M_M}{(2{,}77R_M)^2}=\frac{G\cdot M_M}{7{,}67R_M^2}=\frac{1}{7{,}67}\cdot\frac{G\cdot M_M}{R_M^2}=\frac{1}{7{,}67}\cdot g_M$$

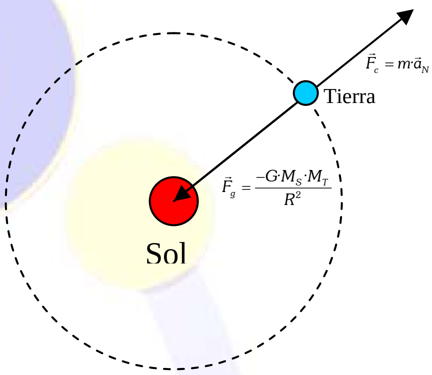
Por tanto:

$$g_{Mf}=\frac{1}{7{,}67}\cdot g_M$$

De donde despejando g_M tenemos:

$$\boxed{g_M=7{,}67g_{Mf}=3{,}73\ m\cdot s^{-2}}$$

13.- Calcular la aceleración respecto al Sol de la Tierra si el radio de la órbita es 1,5·10⁸ km. Deducir la masa del Sol. (Datos M_T= 6 · 10²⁴ kg, R_T= 6370 km, T_{Tierra}=1 año)



Sabemos que la tierra, tarda un año en dar una vuelta alrededor del sol, también sabemos que la fuerza gravitatoria entre el Sol y la tierra comunica a ésta una aceleración centrípeta que viene dada por:

$a_c=\dfrac{v^2}{R}$ o lo que es lo mismo: $a_c=\omega^2\cdot R$

Como $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, y T es conocido, entonces la aceleración de la Tierra será:

$$a_c=\omega^2\cdot R=\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R=\frac{4\pi^2\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}\,m}{(365\cdot 24\cdot 3600)^2\,s^2}=\frac{5{,}92\cdot 10^{12}\,m}{1{,}079\cdot 10^{15}\,s^2}=5{,}95\cdot 10^{-3}\,m\cdot s^{-2}$$

Por otra parte, como el periodo viene dado por: $T=\dfrac{s}{v}=\dfrac{2\cdot\pi\cdot R}{\sqrt{\dfrac{G\cdot M_s}{R}}}$

Operando llegamos a: $T^2=\dfrac{4\cdot\pi^2\cdot R^3}{G\cdot M_S}$

De donde si despejamos la masa del sol, obtenemos:

$$M_S = \frac{4\cdot\pi^2\cdot R^3}{G\cdot T^2} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot 1,5\cdot 10^{11}}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot(365\cdot 24\cdot 3600)^2} = 2\cdot 10^{30}\ kg$$

14.- Calcular: A) Trabajo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra. B) Velocidad a la que habría que lanzarlo para que alcanzara dicha altura. (Datos: $M_T = 6\cdot 10^{24}$ kg ; R_T= 6370 km)

a) El trabajo gravitatorio viene dado por la variación de la energía potencial.

$$W_g = -\Delta E_p$$

$$W_g = -m(\Delta V) = -m\left(\frac{-GM_T}{2R_T} - \frac{-GM_T}{R_T}\right) = m\cdot G\cdot M_T\left(\frac{1}{2R_T} - \frac{1}{R_T}\right) = \frac{m\cdot G\cdot M_T}{R_T}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{G\cdot m\cdot M_T}{2R_T}$$

$$W_g = -\frac{G\cdot m\cdot M_T}{2R_T} = -\frac{6,67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 20kg\cdot 6\cdot 10^{24}\,kg}{2\cdot 6,37\cdot 10^6\,m} = -6,28\cdot 10^8\,J$$

El trabajo de extracción desde la superficie terrestre hasta h, viene dado por:

$$W_{ext} = -W_g$$

Por tanto:

$$W_{ext} = 6,28\cdot 10^8\,J$$

b) Para calcular la velocidad necesaria que habría que comunicarle a la masa para que ascienda a esa altura, utilizamos el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{M_a} = E_{M_b}$$

$$\frac{1}{2}m\cdot v_0^2 - \frac{G\cdot m\cdot M_T}{R_T} = \frac{1}{2}m\cdot v_f^2 - \frac{G\cdot m\cdot M_T}{2\cdot R_T}$$

De donde:

$$\frac{1}{2}m\cdot v_f^2 - \frac{1}{2}m\cdot v_0^2 = -\frac{G\cdot m\cdot M_T}{2\cdot R_T} + \frac{G\cdot m\cdot M_T}{R_T}$$

O lo que es lo mismo:

$$\Delta E_c = \Delta E_p$$

Por tanto, y haciendo $v_o = 0$, tenemos:

$$\frac{1}{2}m\cdot v^2 = \Delta E_p$$

Despejando v:

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot\Delta E_p}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6,28\cdot 10^8\,J}{20kg}} = 7925\ m\cdot s^{-1}$$

15. Un satélite de comunicaciones está situado en órbita geoestacionaria circular en torno al ecuador terrestre. Calcule: A) Radio de la trayectoria, B)Aceleración tangencial del satélite, C) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria durante un semiperiodo, D) Campo gravitatorio y aceleración de la gravedad en cualquier punto de la órbita.
(G = 6,67 · 10^{-11} Nm^2 kg^{-2} M_T = 5,98 · 10^{24} kg)

a) Un satélite geoestacionario es un satélite que tiene un periodo de revolución igual al de la tierra, por tanto:

$$T = 24h$$

Como el periodo viene dado por:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\cdot\pi\cdot R}{\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R}}}$$

Operando llegamos a:

$$T^2 = \frac{4\cdot\pi^2}{G\cdot M_T}R^3$$

Y de esta ecuación despejamos el radio de la órbita:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M_T\cdot T^2}{4\cdot\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot6\cdot10^{24}kg\cdot(24\cdot3600s)^2}{4\cdot\pi^2}} = 4,23\cdot10^7 m$$

b) La aceleración tangencial viene dada por la derivada del vector velocidad, pero como un satélite de estas características tarda siempre el mismo tiempo en dar una vuelta completa, su velocidad será constante. Por tanto:

$$a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$$

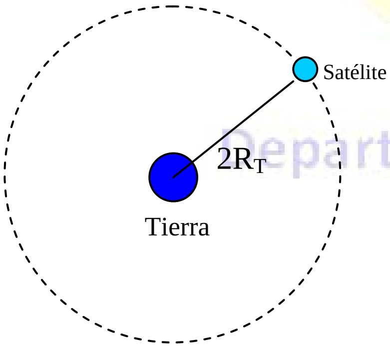
c) El trabajo viene dado por la variación de la energía potencial cambiada de signo, pero en una órbita circular, no hay variación de energía potencial ya que siempre se encuentra a una misma distancia, por tanto si no hay variación de energía potencial, no hay trabajo.

$$W = -\Delta E_p = 0$$

d) El campo gravitatorio en cualquier punto de la órbita vendrá dado:

$$g = \frac{-G\cdot M_T}{R^2} = \frac{-G\cdot M_T}{(R_T+h)^2} = \frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot6\cdot10^{24}kg}{(6,37\cdot10^6+4,23\cdot10^7)^2 m^2} = 0,17\ m\cdot s^{-2}$$

16. Un satélite describe una órbita circular de radio 2 R_T en torno a la Tierra. A) Determine su velocidad orbital. B) Si el satélite pesa 5000 N en la superficie terrestre, ¿cuál será su peso en la órbita? Explique las fuerzas que actúan sobre el satélite.
(R_T = 6400 km ; M_T = $6\cdot10^{24}$ kg ; G = $6,67\cdot10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})



a) Para calcular la velocidad orbital, igualamos la fuerza gravitatoria de atracción de la Tierra con la Fuerza centrípeta del satélite:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c$$

$$\frac{-G\cdot M_T\cdot m}{R^2} = m\cdot\frac{v^2}{R}$$

Despejando v, tenemos:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R}} = \sqrt{\frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot6\cdot10^{24}kg}{2\cdot6,4\cdot10^6 m}} = 5592\ m\cdot s^{-1}$$

b) Si pesa 5000N en la superficie terrestre, quiere decir que su masa es: $m = \frac{P}{g_0} = 510\ kg$

Ahora calculamos el valor del campo gravitatorio en esta órbita:

$$g_{2R_T} = \frac{G \cdot M_T}{R^2} = \frac{G \cdot M_T}{4 \cdot R_T^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}{4 \cdot 6,37 \cdot 10^6 m^2} = 2,36\ N/kg$$

Por tanto el peso en la órbita será:

$$P = m \cdot g = 510\ kg \cdot 2,46\ N \cdot kg^{-1} = 1256\ N$$

17. Un satélite describe una órbita en torno a la Tierra con un periodo de revolución igual al terrestre. A) Explique cuántas órbitas son posibles y calcule su radio. B) Determine la relación entre la velocidad de escape en un punto de la superficie terrestre y la velocidad orbital del satélite. (R_T = 6400 km ; g_T = 10 m s^{-2} ; G = 6,67 · 10^{-11} Nm^2 kg^{-2})

a) Sabemos que un satélite con un periodo igual al de la Tierra es un satélite geoestacionario, por tanto:

$$T = 24h$$

Como el periodo viene dado por:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}}$$

Operando llegamos a:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_T} R^3$$

Y de esta ecuación despejamos el radio de la órbita:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24} kg \cdot (24 \cdot 3600 s)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4,23 \cdot 10^7 m$$

Vemos que la solución es única, por tanto solo es posible una órbita.

b) La velocidad de escape es aquella en la que se anula la Energía mecánica: $v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R}}$

Mientras que la velocidad orbital es aquella en la que se compensan la fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta del satélite debida a la rotación en su órbita: $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$.

Dividiendo una entre otra:

$$\frac{v_e}{v_o} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}}{\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}}$$

Elevando ambas al cuadrado y simplificando:

$$\frac{v_e^2}{v_o^2} = \frac{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R}}{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = 2 \frac{R_T + h}{R_T}$$

Por tanto:

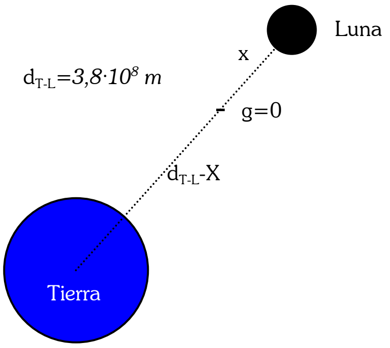
$$v_e^2 = 2 \frac{R_T + h}{R_T} v_o^2$$

Y de aquí:

$$v_e = \sqrt{2\cdot\frac{R_T + h}{R_T}}v_o$$

Sustituyendo los valores nos da:

$$v_e = \sqrt{2\cdot\frac{6,37\cdot10^6\,m + 4,23\cdot10^7\,m}{6,37\cdot10^6\,m}}v_o = 3,9\cdot v_o$$



18. Si con un cañón suficientemente potente se lanzara hacia la Luna un proyectil. A) ¿En qué punto de la trayectoria hacia la Luna la aceleración del proyectil sería nula? B) ¿Qué velocidad mínima inicial debería poseer para llegar a ese punto? ¿Cómo se movería a partir de esa posición? (R_T = 6400 km ; M_T = 6 · 10^{24} kg ; G = 6,67 · 10^{-11} Nm^2 kg^{-2} ; R_L = 1600 km ; M_L = 7 · 10^{22} kg ; d_{T-L} = 3,8 · 10^8 m)

a) En el punto en cuestión, ocurrirá que la intensidad del campo gravitatorio será nula debido a que en dicho punto se igualaran ambas atracciones.

Por tanto, calculamos el valor del campo gravitatorio de la tierra y de la luna en ese punto y los igualamos:

$$\vec{g}_T = \frac{-G\cdot M_T}{r^2}\hat{r} = \frac{-G\cdot M_T}{(d_{T-L} - x)^2}\hat{r} \qquad \vec{g}_L = \frac{-G\cdot M_L}{r^2}\hat{r} = \frac{-G\cdot M_L}{(x)^2}\hat{r}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{-G\cdot M_T}{(d_{T-L} - x)^2} = \frac{-G\cdot M_L}{(x)^2}$$ Operando un poco: $$\frac{-G\cdot M_T}{-G\cdot M_L} = \frac{(d_{T-L} - x)^2}{(x)^2} = \left(\frac{d_{T-L} - x}{x}\right)^2$$

Tomando la raíz cuadrada a cada uno de los miembros de esta igualdad y simplificando, tenemos:

$$\sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \frac{d_{T-L} - x}{x} \rightarrow \sqrt{\frac{6\cdot10^{24}}{7\cdot10^{22}}} = 9,26 = \frac{d_{T-L} - x}{x}$$

De donde:

$$9,26x = d_{T-L} - x$$

Y de aquí:

$$10,26x = d_{T-L}$$

de donde:

$$x = \frac{d_{T-L}}{10,26} = 3,704\cdot10^7\,m$$

Y la distancia desde la tierra donde se anulan los campos gravitatorios será:

$$d_{T-L} - x = 3,43\cdot10^8\,m$$

Como podemos ver, esta primera parte es prácticamente igual al apartado a) del ejercicio 4.

b) En ese punto el proyectil ha escapado de la interacción gravitatoria terrestre, por tanto, lo que nos piden es la velocidad de escape. Sabemos que la velocidad de escape se calcula igualando la Energía Cinética y la Energía Potencial.

$$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6,67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 6\cdot10^{24}\,kg}{6,4\cdot10^6\,m}} = 11,18\ km\cdot s^{-1}$$

A partir de ese momento, empezará a moverse en órbitas estacionarias alrededor de la tierra.

19. La masa de la Luna es 0,01 veces la de la Tierra y su radio es 0,25 veces el radio terrestre. Un cuerpo, cuyo peso en la Tierra es de 800 N, cae desde una altura de 50m sobre la superficie lunar. A) Determine la masa del cuerpo y su peso en la Luna. B) Realice el balance energético en el movimiento de caída y calcule la velocidad con que el cuerpo llega a la superficie.

a) Sabemos que la intensidad del campo gravitatorio en la Tierra y en la Luna, se calcula mediante:

$$\vec{g}_T = \frac{-G\cdot M_T}{R_T^2}\hat{r} \qquad \vec{g}_L = \frac{-G\cdot M_L}{R_L^2}\hat{r}$$

Sustituyendo los datos del problema en el valor del campo gravitatorio de la luna, tenemos:

$$g_L = \frac{G\cdot M_L}{R_L^2} = \frac{G\cdot 0,01 M_T}{(0,25\cdot R_T)^2} = \frac{G\cdot M_T}{R_T^2}\cdot\frac{10^{-2}}{\frac{1}{16}} = g_o\cdot 0,16 = 9,81\cdot 0,16 = 1,57\ N/kg$$

Como su peso en la tierra es de 800 N, conocido el valor de la gravedad terrestre, podemos conocer la masa del cuerpo:

$$P = m\cdot g \quad ➔ \quad m = \frac{P}{g} = \frac{800N}{9,81N\cdot kg^{-1}} = 81,5\ kg$$

Entonces con esto, el peso del cuerpo en la superficie lunar será: $P = m\cdot g = 81,5kg\cdot 1,67N\cdot kg^{-1} = 136\ N$

b) Como la altura desde la que cae el cuerpo es de 50m, podemos considerar que no hay variación de g, por tanto planteamos este problema desde el enfoque de la mecánica clásica.

Planteando la conservación de la energía mecánica: $E_M = E_C + E_p$ entre los puntos h=50m y h=0m, llegamos a:

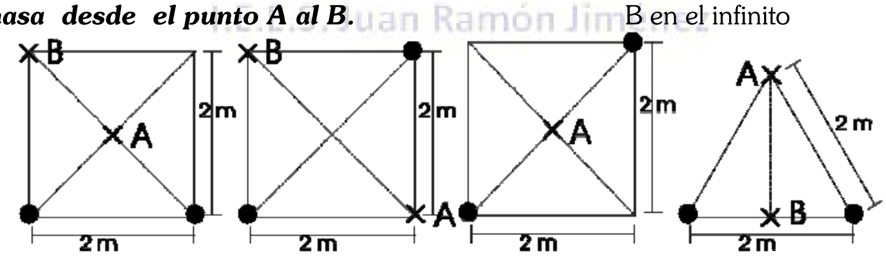
$$E_{M_a} = E_{c_a} + E_{p_q} = m\cdot g_L\cdot h \qquad y \qquad E_{M_b} = E_{c_b} + E_{p_b} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$$

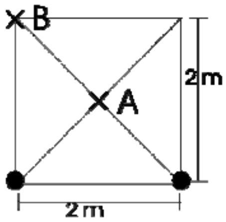
Y despejando v, llegamos a:

$$m\cdot g_L\cdot h = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \quad ➔ \quad v = \sqrt{2\cdot g_L\cdot h} = \sqrt{2\cdot 1,67 m\cdot s^{-2}\cdot 50m} = 12,93\ m\cdot s^{-1}$$

Por tanto la velocidad con la que el cuerpo cae al suelo lunar es de 12,93 m/s.

20. Dadas las siguientes distribuciones de masa (todas de 10 kg), calcular para cada caso campo y potencial gravitatorios en el punto A, así como el trabajo necesario para llevar la unidad de masa desde el punto A al B. B en el infinito





a) En el primer caso, tenemos:

$$\vec{g}_{m_1} = \frac{-G\cdot m}{r^2}\cdot\hat{r}_1 = \frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot10kg}{2m^2}\hat{r}_1 = -3,335\cdot10^{-10}\hat{r}_1 \quad N\cdot kg^{-1}$$

$$\vec{g}_{m_2} = \frac{-G\cdot m}{r^2}\hat{r}_2 = \frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot10kg}{2m^2}\hat{r}_2 = -3,335\cdot10^{-10}\hat{r}_2 \quad N\cdot kg^{-1}$$

Como $\hat{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, entonces: $\vec{g}_{m_1} = -3,335\cdot10^{-10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-2,358\cdot10^{-10}\ \hat{i} - 2,358\cdot10^{-10}\ \hat{j}\ \right)N\cdot kg^{-1}$

y $\hat{r}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, tenemos que: $\vec{g}_{m_1} = -3,335\cdot10^{-10}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2,358\ \hat{i} - 2,358\ \hat{j}\ \right)\cdot10^{-10}N\cdot kg^{-1}$

Aplicando el principio de superposición, tenemos:

$$\vec{g}_A = \vec{g}_{m_1} + \vec{g}_{m_2} = -4,716\cdot10^{-10}\hat{j}\ \ N\cdot kg^{-1}$$

El potencial gravitatorio en punto A viene dado por la suma de los potenciales creados por cada una de las masas en A:

$$V_{m_1} = \frac{-G\cdot m_1}{r_1} = \frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot10kg}{\sqrt{2}m} = -4,716\cdot10^{-10}J\cdot kg^{-1}$$

$$V_{m_2} = \frac{-G\cdot m_2}{r_2} = \frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot10kg}{\sqrt{2}m} = -4,716\cdot10^{-10}J\cdot kg^{-1}$$

Por tanto, en el punto A:

$$V_A = V_{m_1} + V_{m_2} = -9,433\cdot10^{-10}J\cdot kg^{-1}$$

Para calcular el trabajo realizado para desplazar la unidad de masa desde A a B, necesitamos calcular el potencial gravitatorio en el punto B.

El potencial gravitatorio en el punto B viene dado por la suma de los potenciales creados por cada una de las masas en B:

$$V_{m_1} = \frac{-G\cdot m_1}{r_1} = \frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot10kg}{2m} = -3,335\cdot10^{-10}J\cdot kg^{-1}$$

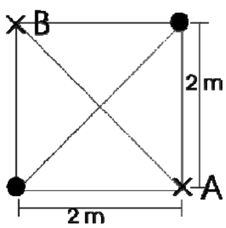
$$V_{m_2} = \frac{-G\cdot m_2}{r_2} = \frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot10kg}{\sqrt{8}m} = -2,358\cdot10^{-10}J\cdot kg^{-1}$$

Por tanto, en el punto B:

$$V_B = V_{m_1} + V_{m_2} = -5,693\cdot10^{-10}J\cdot kg^{-1}$$

El trabajo viene dado por:

$$W = -m\Delta V = -m\cdot\left(V_B - V_A\right) = -1kg\cdot(-5,693 + 9,433)\cdot10^{-10}\cdot J\cdot kg^{-1} = -3,74\cdot10^{-10}J$$



b) En el segundo caso, tenemos:

$$\vec{g}_{m_1} = \frac{-G\cdot m}{r^2}\cdot\hat{r}_1 = \frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot10kg}{4m^2}\hat{r}_1 = -1,668\cdot10^{-10}\hat{r}_1 \quad N\cdot kg^{-1}$$

$$\vec{g}_{m_2} = \frac{-G\cdot m}{r^2}\hat{r}_2 = \frac{-6,67\cdot10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot10kg}{4m^2}\hat{r}_2 = -1,668\cdot10^{-10}\hat{r}_2 \quad N\cdot kg^{-1}$$

Como $\hat{r}_1 = (1,0) = \hat{i}$, entonces: $\vec{g}_{m_1} = \frac{-G \cdot m}{r^2} \cdot \hat{r}_1 = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10 kg}{4m^2} \hat{i} = -1,668 \cdot 10^{-10} \hat{i} \quad N \cdot kg^{-1}$

Como $\hat{r}_2 = (0,-1) = -\hat{j}$, entonces: $\vec{g}_{m_2} = \frac{-G \cdot m}{r^2} \hat{r}_2 = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10 kg}{4m^2} (-\hat{j}) = 1,668 \cdot 10^{-10} \hat{r}_2 \quad N \cdot kg^{-1}$

Aplicando el principio de superposición, tenemos:

$$\vec{g}_A = \vec{g}_{m_1} + \vec{g}_{m_2} = -1,668 \cdot 10^{-10} \left(\hat{\text{i}} \text{-} \hat{\text{j}} \right) \quad N \cdot kg^{-1}$$

El potencial gravitatorio en punto A viene dado por la suma de los potenciales creados por cada una de las masas en A:

$$V_{m_1} = \frac{-G \cdot m_1}{r_1} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10 kg}{2m} = -3,335 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

$$V_{m_2} = \frac{-G \cdot m_2}{r_2} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10 kg}{2m} = -3,335 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

Por tanto, en el punto A:

$$V_A = V_{m_1} + V_{m_2} = -6,67 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

Para calcular el trabajo realizado para desplazar la unidad de masa desde A a B, necesitamos calcular el potencial gravitatorio en el punto B.

El potencial gravitatorio en el punto B viene dado por la suma de los potenciales creados por cada una de las masas en B:

$$V_{m_1} = \frac{-G \cdot m_1}{r_1} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10 kg}{2m} = -3,335 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

$$V_{m_2} = \frac{-G \cdot m_2}{r_2} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10 kg}{2m} = -3,335 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

Por tanto, en el punto B:

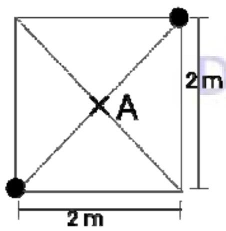
$$V_B = V_{m_1} + V_{m_2} = -6,67 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

El trabajo viene dado por:

$$W = -m \Delta V = -m \cdot (V_B - V_A) = -1 kg \cdot (-6,67 + 6,67) \cdot 10^{-10} \cdot J \cdot kg^{-1} = 0 J$$

Cosa evidente porque en el punto A y en el punto B el potencial es el mismo, así que trasladar una partícula de masa unidad de A a B no supone ningún trabajo.

B en el infinito



c) En el tercer caso

$$\vec{g}_{m_1} = \frac{-G \cdot m}{r^2} \cdot \hat{r}_1 = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10 kg}{2m^2} \hat{r}_1 = -3,335 \cdot 10^{-10} \hat{r}_1 \quad N \cdot kg^{-1}$$

$$\vec{g}_{m_2} = \frac{-G \cdot m}{r^2} \hat{r}_2 = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10 kg}{2m^2} \hat{r}_2 = -3,335 \cdot 10^{-10} \hat{r}_2 \quad N \cdot kg^{-1}$$

Como $\hat{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, tenemos que:

$$\vec{g}_{m_1} = -3,335 \cdot 10^{-10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(-2,358 \cdot 10^{-10} \ \hat{i} - 2,358 \cdot 10^{-10} \ \hat{j} \ \right) N \cdot kg^{-1}$$

y $\hat{r}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, tenemos que:

$$\vec{g}_{m_1} = -3,335 \cdot 10^{-10}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2,358\ \hat{i} + 2,358\ \hat{j}\right) \cdot 10^{-10}\ N \cdot kg^{-1}$$

Aplicando el principio de superposición, tenemos:

$$\vec{g}_A = \vec{g}_{m_1} + \vec{g}_{m_2} = 0\ \ N \cdot kg^{-1}$$

El potencial gravitatorio en punto A viene dado por la suma de los potenciales creados por cada una de las masas en A:

$$V_{m_1} = \frac{-G \cdot m_1}{r_1} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10kg}{\sqrt{2}m} = -4,716 \cdot 10^{-10}\ J \cdot kg^{-1}$$

$$V_{m_2} = \frac{-G \cdot m_2}{r_2} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10kg}{\sqrt{2}m} = -4,716 \cdot 10^{-10}\ J \cdot kg^{-1}$$

Por tanto, en el punto A:

$$V_A = V_{m_1} + V_{m_2} = -9,433 \cdot 10^{-10}\ J \cdot kg^{-1}$$

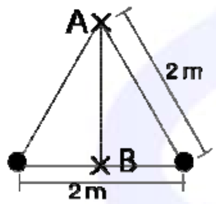
Para calcular el trabajo realizado para desplazar la unidad de masa desde A a B en el infinito, necesitamos calcular el potencial gravitatorio en el punto B.

El potencial gravitatorio en el punto B es cero porque está en el infinito, y ahí la distancia es infinita, por tanto en B:

$$V_B = V_{m_1} + V_{m_2} = 0\ J \cdot kg^{-1}$$

El trabajo viene dado por:

$$W = -m\Delta V = -m \cdot \left(V_B - V_A\right) = -1kg \cdot (+9,433) \cdot 10^{-10} \cdot J \cdot kg^{-1} = -9,433 \cdot 10^{-10}\ J$$



d) En el último caso:

e) $$\vec{g}_{m_1} = \frac{-G \cdot m}{r^2} \cdot \hat{r}_1 = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10kg}{4m^2}\hat{r}_1 = -1,668 \cdot 10^{-10}\hat{r}_1\ \ N \cdot kg^{-1}$$

f) $$\vec{g}_{m_2} = \frac{-G \cdot m}{r^2}\hat{r}_2 = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10kg}{4m^2}\hat{r}_2 = -1,668 \cdot 10^{-10}\hat{r}_2\ \ N \cdot kg^{-1}$$

Como $\hat{r}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, tenemos que:

$$\vec{g}_{m_1} = -1,668 \cdot 10^{-10}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-8,338 \cdot 10^{-11}\ \hat{i} - 1,445 \cdot 10^{-10}\ \hat{j}\right) N \cdot kg^{-1}$$

y $\hat{r}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, tenemos que:

$$\vec{g}_{m_2} = -1,668 \cdot 10^{-10}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(8,338 \cdot 10^{-11}\ \hat{i} - 1,445 \cdot 10^{-10}\ \hat{j}\right) N \cdot kg^{-1}$$

Aplicando el principio de superposición, tenemos:

$$\vec{g}_A = \vec{g}_{m_1} + \vec{g}_{m_2} = -2,89 \cdot 10^{-10}\,\hat{j}\ \ N \cdot kg^{-1}$$

El potencial gravitatorio en punto A viene dado por la suma de los potenciales creados por cada una de las masas en A:

$$V_{m_1} = \frac{-G \cdot m_1}{r_1} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10kg}{2m} = -3,335 \cdot 10^{-10}\ J \cdot kg^{-1}$$

$$V_{m_2} = \frac{-G \cdot m_2}{r_2} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10kg}{2m} = -3,335 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

Por tanto, en el punto A:

$$V_A = V_{m_1} + V_{m_2} = -6,67 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

Para calcular el trabajo realizado para desplazar la unidad de masa desde A a B en el infinito, necesitamos calcular el potencial gravitatorio en el punto B.

El potencial gravitatorio en el punto B viene dado por la suma de los potenciales creados por cada una de las masas en B:

$$V_{m_1} = \frac{-G \cdot m_1}{r_1} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10kg}{1m} = -6,67 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

$$V_{m_2} = \frac{-G \cdot m_2}{r_2} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 10kg}{1m} = -6,67 \cdot 10^{-10} J \cdot kg^{-1}$$

El potencial gravitatorio en el punto B es cero porque está en el infinito, y ahí la distancia es infinita, por tanto en B:

$$V_B = V_{m_1} + V_{m_2} = -1,334 \cdot 10^{-9} \ J \cdot kg^{-1}$$

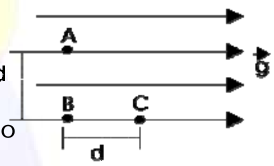
El trabajo viene dado por:

$$W = -m\Delta V = -m \cdot (V_B - V_A) = -1kg \cdot (-1,334 \cdot 10^{-9} + 6,67 \cdot 10^{-10}) J \cdot kg^{-1} = 6,67 \cdot 10^{-10} J$$

5.11.- Cuestiones:

1. a) Si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia infinita de la Tierra? b) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?, ¿Puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?

2. En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g, representado en la figura por sus líneas de campo.
a) Razone el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde el B al C.
b) Analice las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.



3. a) Explique el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.
b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

4. a) Escriba la ley de Gravitación Universal y explique su significado físico. b) Según la ley de Gravitación, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste, ¿por qué o caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

5. Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando a más alejado del Sol que B. a) Haga un análisis energético del movimiento del cometa y compare los valores de las energías cinética y potencial en a y en B. b) ¿En cuál de los puntos A o B es mayor el módulo de la velocidad? ¿y el de la aceleración?

6. Se suele decir que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m situado a una altura h viene dada por Ep = m g h.
   a) ¿Es correcta dicha afirmación? ¿Por qué?
   b) ¿En qué condiciones es válida dicha fórmula?