1.- Un movimiento viene dado por $s = 10t^2 + 5t + 4$ (S.I.). Calcular:

a) Posición al cabo de 2 segundos.

Al cabo de dos segundos; t=2, lo sustituimos en la ecuación y obtenemos S=40+10+4 =54 m.

b) Espacio recorrido durante los dos primeros segundos.

El espacio recorrido en los dos primeros segundos se calcula haciendo S(2) – S(0), por tanto S_2=54-4= 4 m.

c) Espacio recorrido durante el cuarto segundo.

El espacio recorrido durante el cuarto segundo, es el espacio recorrido a lo largo del segundo 4. Por tanto es S(5)-S(4)=90 m.

2.- La función de cierto movimiento es: $s = 3t^3 - 5t^2 + 6$ (SI). Calcular el valor de la aceleración tangencial en el instante t=3s.

$$a_t = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d}{dt}(9t^2 - 10t) = 18t - 10 = 44 m/s^2$$

3.- Sea un proyectil disparado verticalmente hacia arriba cuya posición al punto de partida viene dada por $s = 80t - 5t^2$ (SI). Calcular:

a) La expresión correspondiente a su celeridad.

$$V = \frac{dS}{dt} = 80 - 10t \text{ (m/s)}$$

b) Su aceleración.

$$a = \frac{dV}{dt} = -10 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

c) El tiempo en llegar a la altura máxima.

Al llegar a su altura máxima, V=0, por tanto $80 - 10t = 0$ de donde t=8 seg.

4.- La trayectoria descrita por un móvil viene definida por el vector de posición $\vec{r} = 4t\ \hat{i} + 2t^2\hat{j}$ (SI). Determinar:

a) Los vectores velocidad y aceleración el móvil, así como sus módulos respectivos.

El vector velocidad es la derivada del vector de posición, por tanto:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(4t\ \hat{i} + 2t^2\hat{j})}{dt} = 4\hat{i} + 4t\hat{j} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (4t)^2} = \sqrt{16 + 16t^2} = 4\sqrt{1 + t^2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

El vector aceleración es la derivada del vector velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(4\hat{i} + 4t\hat{j})}{dt} = 4\hat{j} \qquad \|\vec{a}\| = 4m\cdot s^{-2}$$

b) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

$$a_t = \frac{d}{dt}\|\vec{v}\| = \frac{d}{dt}4\sqrt{1+t^2} = 4\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t = \frac{4t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Como $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, si despejamos a_n:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{16 - \frac{16t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{16 + 16t^2 - 16t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{16}{1+t^2}} = \frac{4}{\sqrt{1+t^2}}$$

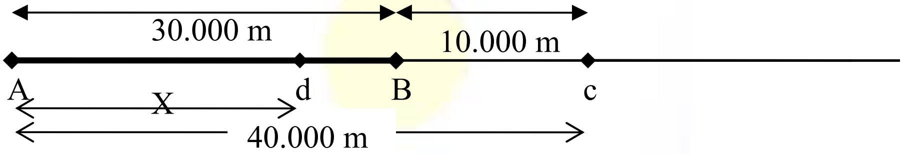
c) El radio de curvatura de la trayectoria.

Como $a_n = \dfrac{v^2}{R}$; si despejamos el radio: $R = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{16(1+t^2)}{\dfrac{4}{\sqrt{1+t^2}}} = 4\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}$ m.

5.- ¿Es posible que un móvil posea aceleración y su celeridad sea constante? ¿Podrá ser constante su velocidad?. Razona la respuesta.

Si, supongamos una moneda que depositamos sobre un disco de vinilo que rueda en nuestro giradiscos a 33 r.p.m. la moneda está girando con una velocidad constante, pero posee aceleración normal, y por tanto aceleración.

6.- Deducir las velocidades, supuestas constantes, de dos móviles A y B, separados 30 km, sabiendo que si se mueven en la misma dirección y sentido se encuentran a 10 km de B, pero que si se mueven en sentidos opuestos tardan 40 minutos en encontrarse.



Si ambos móviles tienen velocidades del mismo sentido se encuentran en el punto c, cuando el móvil A ha recorrido 40.000 metros y el móvil B 10.000 m.

Por tanto como se trata de un MRU, entonces el espacio recorrido por cada uno es:

$$S_A = V_A \cdot t \,, \Rightarrow 40.000 = V_A \cdot t$$
$$S_B = V_B \cdot t \Rightarrow 10.000 = V_B \cdot t$$

Despejando t de la primera y sustituyendo en la segunda, obtengo $V_A = 4 \cdot V_B$

Si el sentido de sus velocidades es opuesto, entonces se encontrarán en el punto d, y ahí el móvil A habrá recorrido una distancia X y el móvil B 30.000-X.

Para este movimiento tenemos:

$$S_A = V_A \cdot t \Rightarrow X = V_A \cdot t$$
$$S_B = V_B \cdot t \Rightarrow 30.000 - X = V_B \cdot t$$

Como sabemos que $V_A = 4 \cdot V_B$ y que tardan en encontrarse 240 segundos, entonces:

$$X = 4 \cdot V_B \cdot 240$$
$$30.000 - X = V_B \cdot 240$$

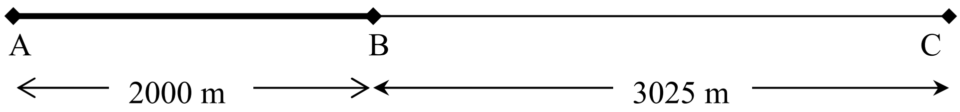
De donde resolviendo el sistema obtenemos X=24 km, V_B=2,5 m/s y V_A=10 m/s

7.- Dos móviles A y B, separados por una distancia de 2 km. Salen simultáneamente en la misma dirección y sentido, ambos con M.R.U.A. siendo la aceleración del más lento de 0,32 cm/s^2. El encuentro se realiza a 3,025 km de distancia del punto de partida de B. Calcular:

a) El tiempo invertido por ambos móviles.

b) La aceleración de A.

c) Las velocidades de ambos en el punto de encuentro.



Supongamos que se encuentran en el punto C. Tomamos $a_B = 0{,}32 cm/s^2 = 32{\cdot}10^{-4} m/s^2$ y no a_A porque si no, ambos móviles no se encontrarían nunca.

Nos dicen que el movimiento es un MRUA. Entonces:

$$S_A = \tfrac{1}{2} a_A{\cdot}t^2 \;\rightarrow\; 5025 = \tfrac{1}{2} a_A{\cdot}t^2$$
$$S_B = \tfrac{1}{2} a_B{\cdot}t^2 \;\rightarrow\; 3025 = \tfrac{1}{2} 32{\cdot}10^{-4}{\cdot}t^2$$

Si de la primera ecuación despejo t: $t^2 = \dfrac{10050}{a_A}$ y lo meto en la segunda:

$$3025 = \tfrac{1}{2}{\cdot}32{\cdot}10^{-4}{\cdot}\frac{10050}{a_A}$$

De donde: $a_A = \dfrac{3{,}2{\cdot}10^{-4}{\cdot}10050}{3025{\cdot}2} = 53{\cdot}10^{-4} m/s^2$

y si lo sustituyo en la ecuación de t:

$$t = \sqrt{\frac{10050}{5{,}3{\cdot}10^{-4}}} = 1.375 seg$$

Las velocidades de ambos móviles son:

$$V_A = a_A{\cdot}t = 5{,}3{\cdot}10^{-4} m/s^2{\cdot}1375 s = 7{,}3 m/s$$
$$V_B = a_B{\cdot}t = 3{,}2{\cdot}10^{-4} m/s^2{\cdot}1375 s = 4{,}4 m/s$$

8.- Un coche A que se desplaza a una velocidad de 108 km/h, pasa al lado de otro B que se encuentra en reposo. Dos segundos después de pasar A, arranca B con una aceleración de 5 m/s^2 hasta alcanzar una velocidad de 180 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzarlo y a que distancia del punto de partida?. Sol: t=13,74 s; x=412,2 m

9.- Se lanza desde el suelo verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad inicial de 45 m/s.

a) ¿Qué altura alcanzará al cabo de 2 seg?

Al cabo de 2 segundos la altura alcanzada es: $h = v_o{\cdot}t - \tfrac{1}{2} g{\cdot}t^2 = 45{\cdot}2 - \tfrac{1}{2}10{\cdot}4 = 90 - 20 = 70 m$

b) ¿Qué altura máxima alcanzará?

La altura máxima es alcanzada cuando la velocidad final se anula. (se hace 0)

$$v = v_0 - gt \;\rightarrow\; t = \frac{0 - v_0}{-g} = \frac{-45 m/s}{-10 m/s^2} = 4{,}5 s$$

Por tanto la velocidad se anula al cabo de 4,5 segundos, si lo introducimos en la ecuación:

$$h = v_o{\cdot}t - \tfrac{1}{2} g{\cdot}t^2 = 45{\cdot}4{,}5 - \tfrac{1}{2}10{\cdot}(4{,}5)^2 = 202{,}5 - 101{,}25 = 101{,}25 m$$

Obtenemos la altura máxima alcanzada por la pelota.

c) ¿Cuanto tiempo tardará en pasar por un punto situado a 5 metros sobre el suelo?. Interpretar físicamente los resultados obtenidos.

Por un punto situado a 5 metros de altura la pelota tardará en pasar:

$$h = v_o \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow 5 = 45 \cdot t - \tfrac{1}{2} 10 \cdot t^2 \text{ de donde obtenemos: } \begin{cases} t_1 = 0{,}11s \\ t_2 = 8{,}88s \end{cases}$$

Como se puede observar obtenemos dos valores para t, esto es físicamente correcto porque un valor corresponde a la subida y otro a la bajada.

10.- Se deja caer una piedra en un pozo de 50 m de profundidad. ¿Al cabo de cuanto tiempo se oirá el sonido del choque contra el fondo?

En este ejercicio tenemos dos tipos de movimientos, uno MRUA que es el de caída libre y un MRU que es de subida del sonido, ya que su velocidad es constante y vale 340m/s.

Por tanto, en la caída (MRUA)

$h = h_o + v_o \cdot t + \tfrac{1}{2} g t^2$, de donde $50 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2} 10 t^2$ y de aquí despejamos t:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{100}{9{,}81}} = 3{,}19s$$

En la subida (MRU) la velocidad del sonido es v=340 m/s

$$s = v \cdot t \text{ de donde } t_2 = \frac{s}{v} = \frac{50m}{340m/s} = 0{,}15s$$

Si sumamos el tiempo que tarda en bajar la pelota más el tiempo que tarda en subir el sonido, obtenemos el tiempo que tardará en oírse llegar la piedra al fondo.

$$t = t_1 + t_2 = 3{,}19s + 0{,}15s = 3{,}24s$$

11.- Un estudiante ve aparecer una pelota por la parte baja de su ventana, al cabo de 0,5 segundos la ve desaparecer por la parte de arriba y 0,2 segundos después de desaparecer, la vuelve a ver aparecer por la parte de arriba de su ventana. ¿Cómo le explicarías a dicho estudiante la forma de calcular la altura de su ventana?. Sol: y=1,73 m

12.- La velocidad angular de una rueda disminuye uniformemente desde 1000 hasta 500 rpm en 10 seg. Hallar:

a) Su aceleración angular.

Vamos a calcular ambas velocidades en rad/seg, para ello:

$$\varpi_0 = 1000 \ \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}} = \frac{1000 \cdot 2\pi}{60} \tfrac{rad}{seg} = \frac{200\pi}{6} \tfrac{rad}{seg} = 104{,}72 \tfrac{rad}{seg}$$

$$\varpi_f = 500 \ \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}} = \frac{500 \cdot 2\pi}{60} \tfrac{rad}{seg} = \frac{100\pi}{6} \tfrac{rad}{seg} = 52{,}35 \tfrac{rad}{seg}$$

La aceleración angular vendrá dada por :

$$\alpha = \frac{\varpi_f - \omega_0}{t} = \frac{\frac{100\pi}{6} - \frac{200\pi}{6}}{10} = \frac{-100\pi}{60} = \frac{-10\pi}{6} = -5{,}24 \tfrac{rad}{seg^2}$$

b) Número de vueltas efectuadas en esos 10 segundos.

El número de vueltas efectuadas en esos 10 segundos es:

$$\phi = \varpi_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = \frac{200\pi}{6} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-10\pi}{6} \cdot 100 = \frac{2000\pi}{6} - \frac{1000\pi}{12} = \frac{3000\pi}{12} = 250\pi \text{ rad}$$

Si dividimos por 2π obtenemos el número de vueltas.

$$\phi = 250\pi \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}} = 125 \text{ vueltas}$$

13.- Un barco efectúa un servicio de pasajeros entre dos ciudades A y B, situadas en la misma ribera de un río y separadas por 75 km. Se supone que la velocidad del barco y del río es constante. Si en ir de A a B tarde 3 horas y en volver de B a A tarda 5 horas, deducir las velocidades del barco y de la corriente.

Cuando el barco va en sentido de la corriente: $V_{barco} + V_{rio} = \frac{s}{t} = \frac{75km}{3h} = 25km/h$

Y cuando va en sentido contrario: $V_{barco} - V_{rio} = \frac{s}{t} = \frac{75km}{5h} = 15km/h$

Sumando ambas ecuaciones: $2 \cdot V_{barco} = 40km/h$ ➔ $V_{barco} = 20km/h$ y de aquí $V_{rio} = 5km/h$

14.- Se dispara un proyectil con una velocidad de 600 m/s formando un ángulo de 60° con la horizontal.

a) Componentes de la velocidad en el instante de salida.
b) ¿Qué altura máxima alcanzará?
c) ¿Cuanto tiempo tardará en alcanzarla?
d) ¿Qué velocidad tendrá en ese punto?.
e) Calcula el alcanza máximo del proyectil.

Calculamos las componentes de la velocidad: $\begin{cases} V_{ox} = V_o \cdot Cos\alpha = 600m/s \cdot \frac{1}{2} = 300m/s \\ V_{oy} = V_o \cdot Sen\alpha = 600m/s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3}m/s \end{cases}$

En el punto de mayor altura (altura máxima), ocurre que la velocidad en el eje y es nula, por tanto como en el eje tenemos un MRUA, entonces:

$$V = V_o - g \cdot t \quad ➔ \quad t = \frac{V - V_o}{-g} = \frac{0 - 300\sqrt{3}m/s}{-10m/s^2} = 30\sqrt{3}seg$$

En ese instante la altura será:

$$h = h_o + V_o \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 = 0 + 300\sqrt{3}m/s \cdot 30\sqrt{3}s - \tfrac{1}{2} 10m/s^2 \cdot \left(30\sqrt{3}\right)^2 s^2 = 27000 - 13500 = 13500m$$

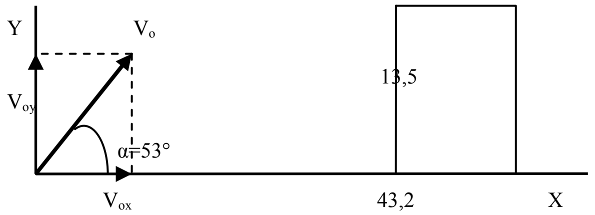
En ese punto tendrá una velocidad de: $V = V_x + V_y = 300m/s \ \hat{\imath}$

15.- Un proyectil disparado formando un ángulo de 53° por encima de la horizontal alcanza un edificio alejado 43,2 m en un punto que se encuentra 13,5 m por encima del punto de lanzamiento.

a) Calcular la velocidad del disparo.
b) Hallar el tiempo de vuelo del proyectil.

c) ¿Cuál es la celeridad del proyectil cuando choca con el edificio?.

Considerando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento del proyectil, el punto de impacto sobre el edificio será (43'2,13'5)m. Si metemos estos datos en la ecuación de la trayectoria:



$$y = x\cdot tg\alpha - \frac{g\cdot x^2}{2V_o^2\cdot Cos^2\alpha}$$

Y despejamos V_o:

$$V_0 = \sqrt{\frac{-g\cdot x^2}{(y - x\cdot tg\alpha)\cdot 2Cos^2\alpha}} \cong 24m/s$$

La componente horizontal de la velocidad cuando golpea el edificio es la misma que al principio, porque en el eje x el movimiento es uniforme.

$$V_x = V_{ox} = V_o\cdot Cos\alpha = 24\cdot\cos 53 = 14,4m/s$$

El tiempo de vuelo del proyectil lo calculamos: $t = \frac{x}{V_x} = \frac{43,2m}{14,4m/s} = 3s$

Nos falta calcular le velocidad en el eje y en el punto de impacto:

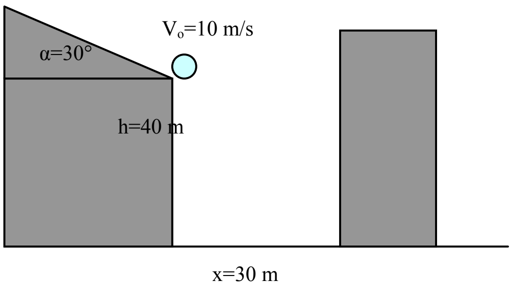
$$V_y = V_o\cdot Sen53 - gt = 24m/s\cdot 0,7986 - 9,8m/s^2\cdot 3s = -10,2m/s$$

El menos es porque está bajando.

Por tanto el módulo de la velocidad es:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(14,4)^2 + (-10,2)^2} = 17,65m/s$$

16.- Una pelota se desliza por un tejado que tiene un ángulo de inclinación de 30° sobre la horizontal, de manera que llega a su extremo con una velocidad de 10 m/s. La altura del edificio es de 40 m y la anchura de la calle a la que vierte el tejado, 30m. Determinar si la pelota llegará directamente al suelo o chocará antes con la pared opuesta.



Si descomponemos la velocidad de la pelota: $\begin{cases} V_{ox} = V_o \cdot Cos\alpha = 5\sqrt{3} m/s \\ V_{oy} = V_o \cdot Sen\alpha = 5 m/s \end{cases}$

Como la pelota cae desde una altura de 40m, voy al calcular el tiempo que tarda en caer:

$$\begin{cases} h = h_o + V_o \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ 40 = 5 \cdot t + \frac{1}{2} 10 \cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow \text{De donde } t = 2{,}37 \text{ s}$$

El alcance horizontal es: $X = V_x \cdot t = 5\sqrt{3} m/s \cdot 2{,}37 s = 20{,}5 m$

Como la anchura de la calle es 30 metros, entonces la pelota cae directamente al suelo sin dar antes en la pared del otro edificio.

17.- Se golpea una pelota de golf de manera que su velocidad inicial forma un ángulo de 45° con la horizontal. La pelota alcanza el suelo a una distancia de 180 m del punto que se lanzó. Calcular su velocidad inicial y el tiempo durante el cual la pelota ha estado en el aire.

El alcance horizontal en un tiro oblicuo viene dado por :

$$X_{max} = \frac{V_o^2 \cdot Sen2\alpha}{g}$$

Sustituyendo:

$$V_o^2 = \frac{X_{max} \cdot g}{Sen2\alpha}$$

V_o=42,4 m/s

El tiempo de alcance máximo es (tiempo de vuelo) es:

$$t_v = \frac{2V_o Sen\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 42{,}5 \cdot \sqrt{2}/2}{10} = 6 \text{ segundos}$$

18.- ¿De qué forma se puede alcanzar un blanco con dos ángulos de tiro diferentes?.
Modificando la velocidad inicial de la bala.

19.- ¿Puede el vector aceleración tener sentido opuesto al vector velocidad, siendo su dirección la misma?. Razona la respuesta.

Si puede, por ejemplo esto ocurre cuando un móvil lleva una velocidad y empieza a frenar, entonces el vector velocidad tiene una dirección a favor del movimiento mientras que la aceleración tiene una dirección en contra del movimiento, lo cual hace que al cabo de un tiempo el móvil se detenga.