Funciones cuadráticas

1.- Identifica cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas:

a) $y=-5$ **c)** $y=1-x^2$ **e)** $y=0,04+23x$

b) $y=-2x^2$ **d)** $y=0,3x$ **f)** $y=2-0,5x$

Sol: b y c.

2.- Representa las siguientes funciones en un mismo gráfico:

a) $y=-x^2$ b) $y=-3x^2$ c) $y=-5x^2$

3.- Representa ayudándote de las transformaciones de funciones las siguientes parábolas, a partir de $y=x^2$:

a) $y=x^2+3$ **e)** $y=(x+1)^2+3$

b) $y=x^2-2$ **f)** $y=(x-4)^2-2$

c) $y=(x+1)^2$ **g)** $y=(x+1)^2-3$

d) $y=(x-4)^2$ **h)** $y=(x+4)^2-1$

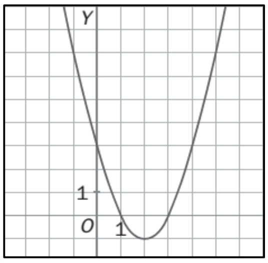
4.- Representa las siguientes parábolas:

a) $y=2x^2-4x-6$ **e)** $y=x^2-4x+3$

b) $y=-x^2-6x+27$ **f)** $y=x^2+6x+10$

c) $y=2x^2-6$ **g)** $y=x^2-5x+6$

d) $y=x^2-5x$ **h)** $y=2x^2-10x$



5.- Dada la parábola:

a) ¿Cuál es su vértice?

b) Halla la ecuación de su eje de simetría.

c) ¿Cuál es la ordenada del punto de abscisa $x=4$?

d) Escribe su ecuación.

Sol: a) (2,-1); b) x=2; c) 4; d) $y=x^2-4x+3$

6.- Una función cuadrática tiene su vértice en el punto (4,4). Completa la tabla utilizando la simetría de la función:

x	2	6	5	-3
y	0	0	-3	-3

7.- La parábola de ecuación $y=(x+a)^2-5$, tiene el vértice en el punto V (-3, b). Halla el valor de a y b.

Sol: a=3; b=-5

8.- Dadas las siguientes parábolas:

$f(x)=2x^2$ $h(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$

$g(x)=2x^2-3$ $i(x)=5(x+2)^2$

Indica:

a) Cuál es la parábola cuyas ramas se abren hacia abajo.

b) Cuáles tienen igual abertura.

c) Cuál es la más cerrada.

d) Cuál tiene el vértice en el punto (2, 0).

Sol: a) h(x); b) f(x) y g(x); c) h(x); d) h(x).

9.- La ecuación del espacio recorrido por un móvil es $S=5+3t+2t^2$, donde s se expresa en metros y t en segundos. **a)** ¿Qué longitud ha recorrido el móvil al cabo de 5 segundos de iniciar el movimiento? **b)** ¿Cuál es la longitud recorrida durante el quinto segundo? **c)** ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando ha recorrido 157 metros desde el inicio?

Sol: a) 70 m; b) 49 m; c) 8 segundos.

10.- Indica las condiciones que debe tener una parábola para que: **a)** No corte al eje de abscisas. **b)** Corte una sola vez al eje de abscisas. **c)** No corte al eje *OY*.

Sol: a) Que la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tenga solución. b) Que la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tenga una única solución. c) No es posible que una parábola no corte al eje *OY*. La condición debería ser que no pasase por x 0, es decir, que no fuera continua.

11.- Dada la parábola de ecuación $y=-2x^2-4x-5$, comprueba si también se puede expresar de la forma $y=-2(x+1)^2-3$.¿Qué ventajas observas en esta forma de expresar la ecuación?

12.- Expresa el área de un triángulo equilátero en función de su lado. ¿De qué tipo de función se trata?

$Sol: A=\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$, se trata de una parábola.

13.- Averigua cuál es el punto simétrico del punto (-2,-5) con respecto al eje de simetría de la parábola $y=-2x^2-16x-29$.

Sol: el punto (-6,-5)

14.- Una parábola pasa por los puntos (-1, 3) y (-5, 3). Escribe la ecuación de su eje.

Sol: x=-3

15.- Averigua la ecuación de la función cuadrática que cumple las siguientes condiciones:

- El eje es x = -2.
- El recorrido es el intervalo [-4,∞).
- La gráfica pasa por el punto (0, 8).

Sol: $y=3x^2+12x+8$

16.- La temperatura, en grados centígrados, durante el 21 de mayo en París se puede expresar mediante la función: $f(x)=\dfrac{-9x^2+200x+1000}{100}$ Donde x es la hora comprendida en el intervalo [0, 24].

a) Calcula la temperatura que había al comenzar y al terminar el día. **b)** Calcula la hora en la que hubo mayor temperatura y el valor de esta. **c)** Indica la hora en que hubo menor temperatura y el valor de esta. **d)** ¿Cómo varió la temperatura entre las 12.00 y las 18.00?

Sol: a) 10 °C y 6 °C; b) 21 °C; c) 6 °C; d) 28,2 °C

17.- Determina la ecuación de la parábola que resulta de trasladar el vértice de la parábola $y=x^2$ al punto (2, 1).

Sol: $y=x^2-4x+5$.

18.- Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y=x^2+ax+a$ y pasa por el punto (1, 9). Calcular el valor de a.

Sol: a=4.

19.- Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (-1,1). Calcula a, b y c.

Sol: a=1; b=c=0.

20.- Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad R(x), en miles de euros, viene dada en función de la cantidad, x, que se invierte, también en miles de euros, por la expresión: $R(x)=-0,001x^2+0,4x+3,5$ con x ≥ 10. **a)** Calcule la rentabilidad para una inversión de 100000 euros. **b)** Deduzca y razone qué cantidad habría que invertir para obtener la máxima rentabilidad. **c)** ¿Qué rentabilidad máxima se obtendría?

Sol: a) 33.500 €; b) y c) La máxima rentabilidad es de 43.500 €, y se obtiene con una inversión de 200.000 €.

21.- Una parábola tiene su vértice en el punto V(1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

Sol: $y=x^2-2x+2$

22.- Tras un test realizado a un nuevo modelo de automóvil, se ha observado que el consumo de gasolina, c(x), expresado en litros, viene dado por la función $c(x)=7{,}5-0{,}05x+0{,}00025x^2$ siendo x la velocidad en km/h y $25 \le x \le 175$. **a)** Determine el consumo a las velocidades de 50 km/h y 150 km/h. **b)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función c(x). **c)** ¿A qué velocidades de ese intervalo se obtiene el mínimo consumo y el máximo consumo y cuáles son estos?

Sol: a) 5,625 litros; b) c(x) dec en [25,100] y c(x) crece en [100,175]; c) El máx es 6'40625 litros y se alcanza a 25 km/h y a 175 km/h y el mín es 5 litros y se alcanza a la velocidad de 100 km/h.

23.- En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x)=0{,}5x^2-4x+6$, siendo "x" la inversión en publicidad, en miles de euros, con *x* en el intervalo [0,10]. **a)** ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas? **b)** ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible? **c)** ¿Cuál es el beneficio si no se invierte nada en publicidad? ¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?

Sol: a) tiene pérdidas entre 2.000 y 6.000 €; b) El beneficio máximo que se obtiene es de 16.000 euros y se alcanza para x = 10 mil euros; c) Se obtienen 6.000 euros no invirtiendo nada ó invirtiendo 8.000 €.

24.- Las funciones $I(t)=-2t^2+51t$ y $G(t)=t^2-3t+96$ con $0 \le t \le 18$ representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, t, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años. **a)** ¿Para qué valores de t, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos? **b)** Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de t y represéntela gráficamente. **c)** ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueran máximos? Calcule el valor de ese beneficio.

Sol: a) En los años 2 y 16; b) B(t) = -3t2 + 54t – 96; c) los beneficios fueron máximos al cabo de 9 años y fueron de 147. 000 euros

25.- Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes. La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas, t, que lleva abierto el consultorio es $N(t)=4t-t^2$

a) ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?; **b)** Sabiendo que el consultorio cierra cuando no hay pacientes. ¿a qué hora cerrará?; **c)** ¿Cuál es la pendiente de la recta que une el origen de coordenadas y el máximo?

Sol: a) a las 19:00 h y es de 4 pacientes; b) 21:00 h; c) y=7/4x.

26.- Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial V_o en metros por segundo. Su altura h(t), en metros viene dada por la expresión $h(t)=-16t^2+v_o \cdot t$. Calcula su velocidad inicial V_o de manera que la altura máxima que el objeto puede alcanzar es de 300 metros sobre el suelo.

$Sol: V_o = 80\sqrt{3}\ m/s$

27.- Una función cuadrática viene dada por la tabla:

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	17	10	5	2	1	2	5	10	17

a) Completa la tabla teniendo en cuenta la simetría.
b) ¿Puedes determinar la fórmula que define esta función?
c) ¿Tiene valores negativos esta función?

Sol: b) $y=x^2+1$; c) No.

28.- Encuentra los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas: **a)** $f(x) = x^2$; **b)** $h(x) = (x + 3)^2$ **c)** $g(x) = x^2 - 4$; **d)** $t(x) = (x - 1)^2 - 9$.

Sol: a) O; b) (0,9) y (-3,0); c) (0,-4), (-2,0) y (2,0); d) (0,-8), (-2,0) y (4,0)

29.- Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función $R(t)=7{,}2t-0{,}16t^2$, donde t es el tiempo y $t \in [0,45]$, expresado en minutos. **a)** ¿Cuál es el máximo rendimiento del jugador? ¿En qué momento lo consigue?; **b)** ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?; **c)** Escribe la ecuación de la recta que une los puntos del apartado a) y del b).

Sol: a) El máx a los 22 minutos y 30 segundos y es de 81; b) a los 5 y a los 40 segundos. c) Existen dos rectas: $y_1=\frac{14}{5}x+18$ $\quad y_2=-\frac{14}{5}x+144$

30.- Sara es la propietaria de un negocio que vende y repara teléfonos móviles. El ingreso, I(n), en dólares de la venta de los móviles se determina mediante la expresión $I(n)=n(50-0{,}2n)$ donde n es el número de teléfonos vendidos, y con $n \le 50$. **a)** Determine los ingresos cuando se venden 20 teléfonos; **b)** para obtener 480 $ de ingresos, ¿Cuántos teléfonos ha de vender Sara?

Sol: a) 1320 $; b) 10 teléfonos.

31.- Un jugador de fútbol se encuentra a 8 metros de la portería. El portero está a 4 metros y puede cubrir saltando hasta 2'5 metros de altura. El jugador puede escoger para hacer el lanzamiento entre dos trayectorias, las correspondientes a las funciones $y=0{,}4x-0{,}05x^2$ y $y=1{,}6x-0{,}2x^2$. ¿Cuál es mejor?, ¿Por qué?

Sol: la mejor es la segunda porque así mete gol.

32.- Un granjero tiene 72 metros de valla para hacer un corral de gallinas de forma rectangular. **a)** Expresa el área del corral en función de la variación de uno de los lados y representa gráficamente la función. **b)** ¿Qué dimensiones debe tener el corral para que su superficie sea la máxima posible?, **c)** ¿Qué superficie tiene el corral si uno de los lados mide 10 metros? **d)** El granjero ha construido un corral que tiene 315 m², ¿qué dimensiones tiene?

Sol: a) $A=36x-x^2$; b) Cuadrado de lado 18; c) 260 m²; d) 15 x 21 m.

33.- Expresa la función cuadrática en cada caso:

a) El coeficiente de x^2 vale -1 y la gráfica pasa por los puntos (1, 0) y (2, 1).

b) Su expresión es de la forma $y=x^2+ax+a$ y pasa por el punto (1, 9).

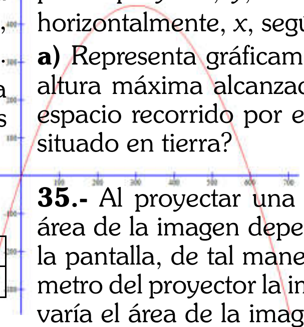
c) Pasa por los puntos (0, 1), (1, 2) y (2, 5).

d) Pasa por el punto (0, 1) y tiene el vértice en (-1, -1).

e) Corta al eje *Y* en el punto (0, 3) y al eje *X* en los puntos (1, 0) y (3, 0).

Sol: a) x^2+4x-3; b) x^2+4x+4; c) x^2+1; d) $2x^2+4x+1$; e) x^2-4x+3.

34.- En el manual de instrucciones de un cañón de artillería podemos leer que la altura alcanzada en metros por el proyectil, *y*, está en función del espacio recorrido horizontalmente, *x*, según la ecuación $y=-0{,}005x^2+3x$. **a)** Representa gráficamente dicha función. **b)** ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil? **c)** ¿Cuál es el espacio recorrido por el proyectil hasta dar a un objetivo situado en tierra?



Sol: b) 450 m; c) 600 m

35.- Al proyectar una diapositiva sobre una pantalla, el área de la imagen depende de la distancia del proyector a la pantalla, de tal manera que cuando la pantalla está a 1 metro del proyector la imagen mide 20 cm x 20 cm. ¿Cómo varía el área de la imagen cuando se aleja el proyector de la pantalla? Representa la función "distancia a la pantalla – área de la imagen".

Sol: lado diapositiva $l(x)=0{,}35+19{,}65x$; Área $A(x)= (0{,}35+19{,}65x)^2$