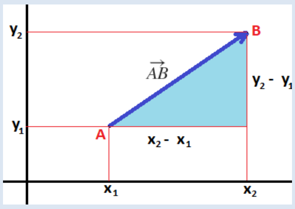
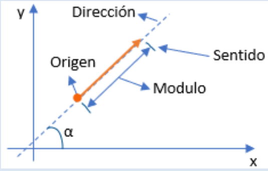
Vectores y Rectas

Un **vector** es un segmento orientado determinado por dos puntos, un **origen** A, de coordenadas (x_1,y_1), y un **extremo** B de coordenadas (x_2,y_2).



El vector que une los puntos A y B se denomina vector $\overrightarrow{AB}$ y sus coordenadas o componentes vienen determinadas por la diferencia entre las coordenadas del extremo menos las del origen.



Así pues, **todo vector viene caracterizado por un módulo, una dirección y un sentido.**

- **Módulo:** es la longitud del segmento AB, y coincide con la distancia entre los puntos A y B y se representa por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ y se calcula:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\left(b_x - a_x\right)^2 + \left(b_y - a_y\right)^2}$$

- **Dirección:** es la recta sobre la que está situada el vector. Una recta y todas sus paralelas determinan la misma dirección.

- **Sentido:** es la forma de recorrer el segmento AB, es decir de fijar el origen y el extremo. (queda determinado por la punta de la flecha)

01.- a) Representa los puntos A(−1, 3) y B(2, 0). b) Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$. c) Dibuja otro vector CD, equipolente a AB, con origen en C(−2, 1); determina las coordenadas de su extremo D. Sol: b) $\overrightarrow{AB}$ = (3, −3). c) D(1, −2).

02.- Representa gráficamente los vectores $\vec{a}=(-1,-3)$, $\vec{b}=(3,1)$ y $\vec{c}=(2,1)$, y además, halla y representa gráficamente el resultado de las operaciones: $a)\ \vec{a}+\vec{b}$; $b)\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $c)\ \vec{a}-2\cdot\vec{c}$; $d)\ \vec{b}-\vec{c}$

Sol: a) (2, −2), b) (4, −1), c) (−5, −4), d) (1, 0).

03.- a) Halla el módulo de los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ del ejercicio anterior. b) Halla el módulo de $\vec{a}+\vec{b}$. ¿Hay alguna relación entre $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|$ y $\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|$? c) ¿Qué tendría que pasar para que $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|$ = $\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|$? d) ¿Puede ser $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=0$, ¿En qué casos?

Sol: a) $\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{10}, \left\|\vec{b}\right\|=\sqrt{10}, \left\|\vec{c}\right\|=\sqrt{5}$, $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=\sqrt{8}$. No hay relación. c) Misma dirección y sentido. d) Si; cuando son opuestos.

04.- Halla la distancia entre los siguientes pares de puntos: a) (3, 1) y (5, 3); b) (−1, −2) y (−5, 3); c) (−1, 2) y (5, 2) y d) (3, −2) y (3, 4) Sol: a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{41}$; c) 6; d) 6

05.- Halla el punto medio de los pares de puntos dados en el ejercicio anterior. Sol: a) (4, 2); b) (−3, 1/2); c) (2, 2); d) (3, 1)

06.- Determina la distancia entre los puntos A(−4,4) y B(2,−2), el punto medio del segmento AB y el punto simétrico de A con respecto a B. Sol: a) $d_{AB}= 6\sqrt{2}$; b) M(−1,1); c) S(8,−8)

07.- Demuestra que el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,2), B(4,6) y C(7,2) es isósceles. Sol: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=5$

08.- Halla las coordenadas de un vector de la misma dirección que el vector $\vec{v}(3,4)$ y cuyo módulo sea 1. Sol: $\vec{r}=(3/5, 4/5)$

09.- Halla un vector director de la recta r que pasa por los puntos A(3,2) y B(3,5), así como la pendiente de dicha recta. Sol: $\vec{r}=(0,3)$; $m=\infty$

10.- Dado el triángulo de vértices A(3,3), B(0,0) y C(0,4), calcula el punto medio del lado AB, y la longitud de la mediana de ese mismo lado (la mediana es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto).

Sol: M_{AB}=(3/2,3/2); longitud mediana = $\frac{\sqrt{34}}{2}$

11.- El punto medio de A(−1, 3) y (x, y) es M(2, 1). ¿Cuáles son las coordenadas de B? Sol: B(5,−1)

12.- Calcular las coordenadas del punto S, simétrico del punto A(2, 6) con respecto B(4, 5) Sol: S (6,4)

13.- Los vértices de un triángulo son A(−7,3), B(1,1) y C(−1,5). Halla los puntos medios de sus lados. Comprueba que el triángulo que determinan tiene los lados paralelos al primero y que la medida de sus lados es la mitad. Sol: P(−3,2), Q(0,3) y R(−4,4)

14.- Si dos vectores tienen la misma longitud, ¿podemos asegurar que son iguales? Razona la respuesta.

15.- a) ¿Cuántos sentidos pueden existir en una dirección dada? b) ¿Es posible que dos vectores tengan la misma dirección, punto de aplicación e intensidad y que sean distintos? Razona la respuesta. Pon ejemplos.

16.- a) Si las direcciones de dos vectores convergen ¿podrán ser iguales los vectores?, b) Dos vectores son paralelos y tienen la misma intensidad, ¿Han de ser iguales? Razona las respuestas y ayúdate de ejemplos. Sol: a) No; b) Si.

17.- Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (3,5). Si B =(0,1) hallar las coordenadas de A. Sol: A=(6,9)

18.- Determina si los vectores son o no Ortogonales:

$a)\ \vec{u}=(3,-2)$ y $\vec{v}=(6,4)$ $\quad b)\ \vec{x}=(5,1)$ e $\vec{y}=(3,-15)$

Sol: a) No, b) Si

19.- Hallar las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento de extremos A(−5,3) y B(8,6) en tres partes iguales. Sol: P=(−2/3, 4); Q=(11/3, 5)

20.- Calcula el valor de a para que el punto P(a, 7) esté a 10 unidades de distancia del punto Q(5, 1). Sol: a=13 y a=−3

21.- Divide el segmento de extremos A(−2,3) y B(0,−1)en tres partes iguales. Sol: P_1(−4/3, 5/3) y P_2(−2/3, 1/3)

22.- Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{v}=(7,-2)$ y $\vec{u}=(m,6)$ a) Sean paralelos; b) Tengan el mismo módulo y c) Sean perpendiculares. Sol: a) m=−21; b) $m=\pm\sqrt{17}$; c) m= 12/7

23.- Si A(3,1), B(5,7) y C(6,4) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, ¿cuál es el cuarto vértice? Sol: D(4,−2)

24.- Determina si el triángulo de vértices A(12,10), B(20,16) y C(8,32) es rectángulo. Sol: Si, porque verifica Pitágoras.

25.- Dados los puntos A(3,0) y B(−3,0), obtén un punto C sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo que determinan sea equilátero. ¿Hay una solución única? Halla el área de los triángulos que resultan.

Sol: $C_1(0,3\sqrt{3})$ y $C_2(0,-3\sqrt{3})$ $\quad A=9\sqrt{3}\ u^2$

26.- Determina el valor de a, sabiendo que la distancia entre Q(−6,2) y P(a,7) es 13. Escribe también las coordenadas y el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$. Sol: a_1=6 y a_2=−18 $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=13$

27.- Dados los vectores $\vec{a}$ (3,−2), $\vec{b}$ (−1,2) y $\vec{c}$ (0,−5), calcula m y n de modo que $\vec{c}=m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}$. Sol: m=−5/4; n= −15/4

28.- Si M(7,4) y N(−2,1), hallar un punto P en el segmento MN tal que la distancia de M a P sea la mitad de la distancia de P a N. Sol: P (4,3)

29.- Dadas las rectas **r: ax + y − 2 = 0** y **s: x + 2y + b = 0**, halla los valores que deben tomar a y b para que: a) Sean paralelas. b) Sean coincidentes. c) Sean perpendiculares.

Sol: a) a=1/2; b) a=1/2 y b=−4; c) a=− 2

Vectores y Rectas

30.- Una recta que pasa por el punto A(1,1) tiene por pendiente m=-2. Halla sus ecuaciones a) implícita y b) explícita.

Sol: a) y=-2x+3; b) 2x+y-3=0

31.- Hallar las ecuaciones paramétricas, continua, general, punto-pendiente, explícita y segmentaria de la recta que pasa por el punto A(-2,3) y cuyo vector de director es $\vec{v}=(3,4)$. Hallar, si existe, un punto de la recta que su abscisa sea 6. Hallar también, si existe, un punto de la recta con ordenada -4.

32.- Hallar la ecuación general de la recta r que pasa:

a) Por los puntos A(3,-1) y B(5,2). 3x-2y-19=0
b) Por A(-2,4) y tiene de pendiente -2. 2x+y=0
c) Por el punto A(1,-3) y es paralela a la recta s: x+3=0.
d) Por el punto A(-1,2) y es paralela al eje de abscisas.
e) Por el punto A(4,2) y es perpendicular a 2x-3y+2=0

Sol: c) x-1=0; d) y=2; e) 3x+2y-16=0

33.- Hallar el valor de k para que:

a) El punto (1,2) pertenezca a la recta x – 3ky + 3 = 0.
b) El punto (k,1) pertenezca a la recta x + 2y – 4 = 0.
c) Los puntos (1,2), (5,-6) y (7,k) estén alineados.
d) La recta 2x+ky=1 tenga de vector director $\vec{v}=(-5,3)$.
e) La recta kx – 3y + 2 = 0tenga dependiente m= -3/2.
f) Las rectas r: y=9kx+2 y s:4x-ky+1=0 sean paralelas.
g) Las rectas $r: 2x+3ky+2=0$ y $s: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{k}$ se corten en un punto.

Sol: a) 2/3; b) 2; c) -10; d) 10/3; e) -9/2; f) ±2/3; g) $k \neq \pm\sqrt{4/3}$

34.- Un paralelogramo tiene un vértice en el punto A(2,3) y dos de sus lados están sobre las rectas $r: x+y=20$ y $s: 2x-3y=10$. Calcular las ecuaciones de los otros dos lados y las coordenadas de sus vértices.

Sol: B(11,9); C(14,6); D(5,0); AB: 2x- 3y=-5; AD: x+y=5

35.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(-5,0), y por el punto de corte de las rectas r y s.

$$r: x-2y+2=0 \qquad s: \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \end{cases}$$

Sol: x - 5y + 25 = 0

36.- Hallar la ecuación continua de la recta paralela a la recta s: $y=\frac{-1}{2}x+3$ y que corta al eje de ordenadas en y =-3.

Sol: $\frac{y+3}{1}=\frac{x}{-2}$

37.- Encontrar la ecuación de la recta r, que es paralela a la recta **r': 2x-3y+15=0** que pasa por el punto de intersección de las rectas **s: y =3x-1** y **t: x+2y+3=0.** Sol: 2x-3y-4=0

38.- Halla el vector director y un punto de cada una de las siguientes rectas:

$a)\ 3x+y-1=0 \quad b)\ -2x+2y-4=0 \quad c)\ x-3y+3=0$

Sol: a) $\vec{a}(-1,3); A(0,1)$. b) $\vec{b}=(-2,2); B(-2,0)$. c) $\vec{c}=(-3,1); C(0,1)$

39.- Representa gráficamente las siguientes rectas:

$$r: (x,y)=(1,0)+\lambda(1,1)$$

$$s: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases} \qquad t: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}$$

40.- Halla la ecuación en forma explícita de cada una de las rectas dadas en el ejercicio 38. Determina la pendiente de cada una de ellas.

Sol: a) y=x-1; m= 1. b) y=-2x+4; m= -2. c) y=-2x=; m= -2.

41.- Halla la posición relativa de las siguientes rectas:

$$a) \begin{cases} r: x+2y-5=0 \\ s: 2x-y=0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} r: 3x-y-2=0 \\ y=3x+1 \end{cases}$$

Represéntalas gráficamente para confirmar el resultado

Sol: a) Secantes en (1, 2). b) Paralelas.

42.- Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1, 2) y cuyo vector director es $\vec{r}=(2,1)$.

Sol: Ec. Vectorial: $(x,y)=(1,2)+\lambda(2,1)$; Ecs. Paramétricas: $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases}$

Continua: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}$; General: $x-2y+3=0$; Explícita: $y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{2}$

43.- Averigua si la recta s de ecuaciones paramétricas $s: \begin{cases} x=1-2t \\ y=3+t \end{cases}$ pasa por los puntos: a) M(5,1) b) N(-1,3)

Sol: Por M sí, pero por N no.

44.- Halla la ecuación de cada una de las rectas que pasan por los vértices del triángulo de vértices A(0, 0) y B(5, 1) y C(1, 4).

Sol: $A-B: x-5y=0$; $A-C: 4x-y=0$; $B-C: 3x+4y-19=0$

45.- Calcula las ecuaciones, vectorial, paramétricas y explícita de las rectas bisectrices de los cuatro cuadrantes.

Sol: a) x-y=0; b) x+y=0

46.- Calcula la recta que pasa por el punto A (2,7) y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60°. Sol: $y=\sqrt{3}x+\left(7-2\sqrt{3}\right)$

47.- La recta que pasa por el punto A (2,3) y es paralela a la recta **r: 3x+2y-12=0**, forma un triángulo con los ejes cartesianos. Calcula su área. Sol: A=12 u²

48.- Calcula el valor del parámetro k para que las tres rectas **r: 2x+5y-1=0**, **s: -x+2y+k=0** y **t: 4x+7y-5=0** se corten en el mismo punto. Determina dicho punto. Sol: K=5, P(3,-1)

49.- El segmento AB está sobre la recta x-4y+10=0. Su mediatriz es la recta 4xy-11 = 0. ¿Cuáles serán las coordenadas de B si las de A son (-2, 2)? Sol: B(6,4)

50.- Halla el circuncentro del triángulo de vértices A(-1, 1), B(3, 4), y C(3, 0). Sol: C (11/8, 2)

51.- Comprueba que el triángulo de vértices A(4,4), B(-2,3) y C(3,-2) es isósceles y calcula su área. Sol: A=35/2

52.- Por el punto A (1,6) trazamos la perpendicular a la recta **r: 2x+y-2=0.** Halla un punto de esta recta perpendicular que equidiste de A y de la recta *r.* Sol: (-1/5, 27/5)

53.- Halla el simétrico del punto P(3,4) respecto de la recta *r:* 2x-y+3=0 Sol: P' (-1,6)

54.- Encuentra el simétrico del punto P(2,6) respecto de la bisectriz del primer cuadrante. Sol: P' (6,2)

55.- Calcula el área del triángulo de vértices A=(2,1), B=(6,2) y C=(3,5) Sol: 15/2 u. de área

56.- Escribir el vector $\vec{w}=\left(3,\frac{8}{3}\right)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=\left(0,\frac{7}{3}\right)$ y $\vec{v}=(1,4)$ Sol: $\vec{w}=-4\vec{u}+3\vec{v}$

57.- Calcula la recta que pasa por el punto P(5,6) y corta a los ejes coordenados según segmentos iguales. Sol: x+ y -11 = 0

58.- Representa las rectas 3x + 6 = 0 y 2y – 6 = 0 y halla su punto de intersección. Sol: P (2,3)

59.- Halla el punto simétrico de A (1, 1) respecto de la recta s: x – 2y – 4 = 0. Sol: A' (3, -3)

60.- Comprueba, sin usar el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices A(-2, -1), B(3, 1) y C(1, 6) es rectángulo.

61.- Los puntos A(4, 5) y B(7, 0) son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X. Dibuja el trapecio y halla: a) Las ecuaciones de sus lados. b) Su perímetro. c) Su área.

Sol: a) OC: x=0 OB: y=0 AC: y=5; AB: 5x + 3y – 35 = 0; b) 21,83; c) 55/2

62.- Halla el valor de k para que los puntos A (1, -5), B (3, 0) y C (6, k) estén alineados. Sol: k=15/2