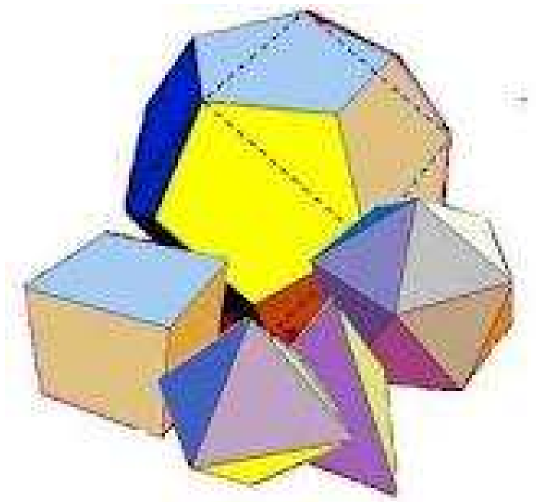
CUADERNO DE ACTIVIDADES

MATEMÁTICAS 4º E.S.O. opc. B



I.E.S. FERNANDO DE MENA
DPTO. DE MATEMÁTICAS
CURSO 2011-2012
Profesor: Alfonso González López

Alumno/a: ____________________________

MATEMÁTICAS 4º ESO opc. B
PROFESOR: ALFONSO GONZÁLEZ

1º) TEMARIO:

1. NÚMEROS REALES
2. POTENCIAS
3. RADICALES

– 1ª evaluación

4. ECUACIONES Y SISTEMAS
5. POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS
6. INECUACIONES.

– 2ª evaluación

7. TRIGONOMETRÍA
8. FUNCIONES

– 3ª evaluación

9. PROBABILIDAD
10. ESTADÍSTICA

– A lo largo del curso

2º) CRITERIOS DE CALIFICACIÓN: La programación oficial del dpto. de Matemáticas para el presente curso contempla que, para obtener la nota del alumno en cada evaluación en esta materia, se utilizarán los siguientes porcentajes:

COMPETENCIA MATEMÁTICA	80 %	*ver Anexo I (Tabla indicadores Competencia matemática)*
RESTO DE COMPETENCIAS	20 %	*ver Anexo II (Tabla indicadores Competencia no matemática)*

Teniendo en cuenta que:

Competencia matemática:

- La nota en la competencia matemática se obtendrá atendiendo a lo largo de la evaluación a los indicadores que figuran seguidamente en el Anexo I. Se llevarán a cabo, al menos, dos pruebas escritas cada evaluación. En cada prueba se evaluarán una serie de indicadores de la competencia matemática de la evaluación, como se indica en el Anexo I. Naturalmente, habrá indicadores que sean evaluados en ambas pruebas, en cuyo caso se hará la media del indicador en ambas pruebas, y la nota de la competencia matemática (el 80% de la nota de la evaluación) será la media obtenida de todos los indicadores de la evaluación en cuestión.
- También se tendrá muy en cuenta si el alumno ha alcanzado los indicadores de grado mínimo, que figuran en negrita en el Anexo I.

Resto de competencias:

- La nota en el resto de competencias se obtendrá atendiendo a lo largo de la evaluación a los indicadores que figuran en el Anexo II.
- Por supuesto, el alumno deberá conseguir un grado mínimo en las competencias.

Evaluaciones:

- Un alumno habrá superado la evaluación si su nota global, atendiendo a los porcentajes indicados, es igual o superior a 5. En caso contrario deberá presentarse a la recuperación de dicha evaluación con todos los indicadores de la competencia matemática.

Evaluación Ordinaria:

Los alumnos que superen las tres evaluaciones de que consta el curso habrán aprobado la materia, y su nota será la media de las tres evaluaciones. En caso contrario el profesor evaluará si el alumno alcanza los objetivos, competencias y contenidos mínimos del curso, superando para ello los criterios de evaluación del mismo, referidos puntualmente en la programación específica de cada curso. De no ser así, deberá presentarse en la convocatoria extraordinaria de septiembre con todos los indicadores.

Observaciones:

- En la realización de **PRUEBAS ESCRITAS** se tendrán en cuenta, entre otros aspectos, los siguientes:
  - Durante la realización de una prueba escrita, el alumno deberá mostrar un comportamiento adecuado y correcto; realizar cualquier alteración que perturbe el normal desarrollo de éste podrá suponer la total anulación del ejercicio, siendo éste valorado con una calificación de 0 puntos para el infractor o infractores de esta norma. Tal medida se refiere especialmente a aquel alumno que sea descubierto obteniendo información de forma fraudulenta, de sí mismo o de otro compañero. En los casos anteriores el profesor retirará automáticamente la prueba escrita al alumno o alumnos en cuestión.
  - Se indicará en cada pregunta del examen la valoración parcial de dicha pregunta.
  - Solo se podrá usar la calculadora si está permitido en la prueba en cuestión, y dándole el uso que en ella se indique.
  - A la hora de calificar cada una de las preguntas de que consta la prueba escrita, el profesor tendrá en cuenta tanto el planteamiento como el resultado final del ejercicio, dando a ambos aspectos el peso que él estime conveniente en cada caso. En el caso de que el resultado de un ejercicio sea correcto pero el planteamiento sea incorrecto, se valorará como nula tal pregunta.
  - Durante las pruebas y en todo el proceso de aprendizaje se tendrán en cuenta la ortografía, presentación cuidada, orden en el planteamiento, limpieza y corrección en el lenguaje matemático, ya que estos figuran entre los indicadores a evaluar.
  - Sólo se admitirán justificantes oficiales, debidamente acreditados, sellados y firmados por el profesional o autoridad competente, de tipo médico, administrativo, judicial, etc. a aquellos alumnos que falten a una prueba y soliciten realizarla en fecha posterior.
- Durante su aprendizaje, se evaluará el cuaderno del alumno (completitud de los contenidos, grado de corrección de los ejercicios, limpieza y orden, etc.), las intervenciones de éste en la pizarra, la entrega de eventuales baterías de ejercicios, su trabajo en casa y en clase, el respeto de los planteamientos del profesor y las opiniones de los demás compañeros, el saber valorar el trabajo en equipo, mostrar interés y esfuerzo diario, etc. Todo ello se contempla en los indicadores de la competencia no matemática (ver anexo II). Se tendrá en cuenta, en cualquier caso, que el alumno será evaluado todos los días con los instrumentos de observación sistemática habituales, y que, en caso de ausencia injustificada, podrá ser valorado negativamente por lo que respecta a ese día.
- Además, de acuerdo con el documento de *Normas de convivencia, organización y funcionamiento del centro*, se valorará positivamente en el alumno el cumplimiento de las normas del aula de Matemáticas.

RECUPERACIÓN DE EVALUACIONES

- Los alumnos recuperarán a lo largo del curso las dos primeras evaluaciones suspensas (no así, la tercera, que tiene carácter de final) por medio de un Plan de Trabajo Individualizado (P.T.I.) que contemplará los siguientes criterios:
  1. El alumno deberá realizar y entregar una serie de actividades de repaso y refuerzo de los indicadores de la competencia matemática vistos en la evaluación.
  2. Además, se llevará a cabo un examen de recuperación de todos los indicadores de la competencia matemática vistos durante la evaluación a través de ejercicios similares a los de su P.T.I. Esta será su nota de recuperación en la competencia matemática.
  3. Para el resto de indicadores se realizará una evaluación a lo largo del siguiente trimestre, atendiendo a lo indicado en su P.T.I. y al trabajo presentado en él.
  4. La nota de recuperación se obtendrá ponderando sus resultados en las competencias según los porcentajes de la tabla de arriba

  La nota de la recuperación pasará a ser la nota a tener en cuenta de cara a la media final en junio.
- Al final del curso el profesor podrá realizar una **prueba escrita final** en la que los alumnos que todavía tengan evaluaciones suspensas tengan la posibilidad de recuperarlas presentándose solamente a

dichas evaluaciones. Dicha prueba versará sobre todos los indicadores de la competencia matemática vistos en cada evaluación. Se tomará la calificación que en ésta obtenga para confeccionar la nota media (no la nota que obtuvo en su día en la evaluación en cuestión).

- Para la **convocatoria extraordinaria de septiembre**, los alumnos tendrán un PTI que contemplará los siguientes criterios:
  1. El alumno deberá realizar la prueba extraordinaria de septiembre, la cual se llevará a cabo el día, hora y lugar del mes de septiembre de 2012 que fije Jefatura de Estudios, en la que se examinará de todos los indicadores de la competencia matemática del curso.
  2. Además, el alumno deberá realizar todos los ejercicios de refuerzo del curso que se adjuntarán en el PTI, y entregarlos el día de la mencionada prueba con la finalidad de evaluar todos los indicadores de las competencias no matemáticas susceptibles de ser evaluados en él.
  3. Estas actividades se entregarán atendiendo a las indicaciones de su PTI
  4. La nota se obtendrá atendiendo a los indicadores evaluados durante el proceso y atendiendo a lo indicado en su P.T.I.

RECUPERACIÓN DE PENDIENTES

- Los alumnos de **E.S.O.** que tuvieran la materia de *Matemáticas* de un curso anterior suspensa podrán recuperar a lo largo del presente curso mediante el correspondiente PTI, el cual contemplará los siguientes criterios:
  1. Teniendo en cuenta que, dada la estructura cíclica de la etapa, los contenidos del curso actual son prácticamente los mismos que los del precedente, aunque, lógicamente, ampliados, el profesor de la materia llevará a cabo un seguimiento del alumno a lo largo de todo el curso para comprobar si éste supera los indicadores curso anterior. Dichos indicadores, que el alumno deberá alcanzar para poder superar la materia pendiente, estarán indicados en el PTI.
  2. El alumno, además, deberá realizar satisfactoriamente las **actividades de refuerzo** que puntualmente le serán entregadas durante el curso.
  3. Los alumnos que el profesor considere que, a través del seguimiento realizado hasta la fecha de la prueba, hayan superado los indicadores de su PTI, se considerarán aprobados, con una nota de 5.
  4. Por el contrario, los alumnos que no superen dichos indicadores realizarán una prueba escrita en la tercera evaluación que versará sobre los indicadores de la competencia matemática.
  5. La nota se pondrá atendiendo a los indicadores superados durante el proceso y evaluando la adquisición de las competencias
  6. De acuerdo con los criterios anteriores, el proceso de recuperación se llevará a cabo prácticamente durante todo el curso; en cualquier caso, la evaluación final de materias pendientes para toda la ESO será, en principio, a finales de mayo de 2012.
- Los alumnos de **E.S.O.** que tuvieran la materia de *Matemáticas* de un curso anterior suspensa podrán también recuperar en la convocatoria extraordinaria de **septiembre** de manera similar a aquellos alumnos que la suspendieron durante el curso, como se explicó arriba.

3º) En cuanto a la **metodología**, frecuentemente el profesor sacará a la pizarra de manera aleatoria a algunos alumnos para que realicen los ejercicios mandados como tarea para casa en la clase anterior; su calificación pasará a engrosar algunos indicadores de la competencia no matemática, como se indica en el anexo II. También, no se descarta que **el profesor pueda sacar** algún día a algún alumno **a la pizarra para preguntar o repasar sobre la parte teórica** de la materia. Lo que se pretende con esto es que el alumno lleve al día la asignatura, algo que es fundamental en Matemáticas, dada la especial naturaleza de la materia.

Las actividades que se harán en clase y/o se mandarán para casa, fundamentalmente serán las del **cuaderno de actividade**s que el profesor entregará a los alumnos en los primeros días de clase. Este cuaderno recogerá una amplia colección de actividades ordenadas por unidades didácticas, así como material de ayuda didáctica. Estas actividades contarán habitualmente con las soluciones de los ejercicios, para así favorecer la autoevaluación y el trabajo de los alumnos. Toda esta información también estará disponible durante todo el curso en la página Web del profesor de la asignatura:

www.alfonsogonzalez.es

Además de este cuaderno, también se trabajarán eventualmente las actividades del libro de texto (Matemáticas Opción B, Editorial Editex).

Se llevará a cabo en los primeros días del curso una **prueba de evaluación inicial**. Dicha prueba se realizará en dos sesiones. Su finalidad, obviamente, es que el profesor conozca el nivel de partida de la clase. La calificación obtenida por el alumno en tal prueba en ningún caso podrá ser tenida en cuenta para la nota media de la evaluación.

4º) NORMAS DEL AULA DE MATEMÁTICAS

1. Los alumnos se sentarán en el aula en sitio fijo durante todo el curso, y se responsabilizarán de la limpieza e integridad de su puesto. Este sitio fijo será asignado por el profesor durante los primeros días del curso, y sólo podrá ser modificado por éste. El profesor apuntará el puesto fijo de sus alumnos en la hoja de control a tal efecto, y colocará ésta en el corcho del aula.
2. Los alumnos están obligados a mantener esos puestos fijos también en las guardias.
3. El alumno tiene la obligación de comunicar al profesor, al comenzar la clase, cualquier incidencia, anomalía, desperfecto, etc. en su puesto. En caso contrario, el alumno pasará a ser el responsable de ello.
4. Los alumnos y el profesor velarán por la limpieza constante y diaria del aula, la ausencia de papeles en el suelo, la utilización de la papelera, etc. El profesor, cada cierto tiempo, se encargará de que cada alumno limpie su mesa.
5. Queda terminantemente prohibido consumir alimentos o bebidas de cualquier tipo en el aula.
6. El alumno deberá llegar puntualmente a clase, y no dejar de trabajar hasta que ésta finalice en su integridad. No podrá levantarse para salir de clase antes de tiempo.
7. Los alumnos deberán atender en clase y guardar silencio durante la explicación del profesor, traer el material necesario, y no perturbar el normal funcionamiento de la clase molestando a los compañeros y/o al profesor.
8. El alumno participará activamente en clase, preguntando dudas, colaborando en trabajos en equipo, etc. No podrá negarse a salir a la pizarra o a hacer las actividades que indique el profesor.
9. Durante la clase las ventanas del aula sólo podrán permanecer abiertas con permiso del profesor.
10. El alumno, caso de portar un móvil o similar, deberá tenerlo apagado durante toda la clase y sin mostrarlo. En caso contrario, podrá ser confiscado por el profesor.
11. Al finalizar la clase el profesor se cerciorará, con ayuda de los alumnos, de que el aula queda en orden: sillas y mesas bien colocadas, ventanas cerradas, luces apagadas, y la puerta cerrada. Si se trata de la última hora de utilización del aula ese día (no necesariamente la 6º hora; consultar cuadrante situado en la puerta del aula), habrá que bajar además las persianas y colocar cada silla encima de la correspondiente mesa.

Socuéllamos, septiembre de 2011

Fdo. El profesor de la asignatura

ANEXO I: INDICADORES DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA en 4º ESO opc. B

Bloque	Unidad	**INDICADORES COMPETENCIA MATEMÁTICA 4º ESO opc. B** (80% de la nota de la evaluación) *(Se resaltan en negrita los indicadores que obligatoriamente hay que conseguir para superar mínimamente la unidad)*	Evaluación
Bloque I: PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		Indicador 0: **Estructura el proceso de resolución de un problema utilizando las técnicas aprendidas para plantear y resolver problemas de nivel sencillo**, medio y alto. *(Observación: este indicador estará presente prácticamente en todas las unidades didácticas a lo largo del curso)*	
Bloque II: NÚMEROS Y ÁLGEBRA	unidad 1: NÚMEROS REALES (3 semanas)	Indicador 1.1: **Realiza correctamente, respetando la jerarquía, operaciones combinadas con fracciones y paréntesis anidados, de tipo sencillo** y más elaborados, así como con fracciones de términos racionales.	1ª EVALUACIÓN
		Indicador 1.2: **Distingue los diferentes tipos de números reales, y clasifica cada número en su correspondiente subconjunto de $\Re$.**	
		Indicador 1.3: **Representa números racionales e intervalos en la recta real,** así como irracionales e intervalos en los que aparece un valor absoluto, y determina la È e Ç de dos intervalos.	
		Indicador 1.4: **Calcula la fracción generatriz de un decimal**, y opera combinadamente con decimales pasándolos previamente a fracción generatriz.	
		Indicador 1.5: Calcula errores absolutos y relativos .	
	unidad 2: POTENCIAS (3 semanas)	Indicador 2.1: **Calcula cualquier potencia de base racional y exponente entero, realizando operaciones combinadas con ellas de tipo sencillo, aplicando en todo momento las propiedades de las potencias**, y de tipo más elaborado.	
		Indicador 2.2: **Interpreta** y opera **números en notación científica.**	
	unidad 3: RADICALES (4 semanas)	Indicador 3.1: **Pasa potencias de exponente fraccionario a forma radical, realizando operaciones combinadas de tipo sencillo aplicando en todo momento las propiedades de los números radicales**, y de tipo más elaborado.	
		Indicador 3.2: **Racionaliza expresiones sencillas en cuyo denominador aparece una raíz cuadrada**, una raíz de cualquier índice, o una expresión más elaborada (con paréntesis y/o identidades notables).	
	unidad 4: POLINOMIOS. FRACCIONES ALGEBRAICAS (4 semanas)	Indicador 4.1: **Realiza sumas, restas y productos combinados de polinomios, así como identidades notables en las que intervienen binomios.**	2ª EVALUACIÓN
		Indicador 4.2: Desarrolla potencias cuya base es un binomio sencillo, utilizando el triángulo de Tartaglia.	
		Indicador 4.3: **Efectúa divisiones de polinomios** *(Observación: no se considerará contenido de grado mínimo cuando aparecen*	
		Indicador 4.4: **Factoriza polinomios de cualquier grado con raíces enteras, aplicando fundamentalmente la regla de Ruffini**, y con raíces fraccionarias y/o términos cuadráticos irreducibles.	
		Indicador 4.5: **Simplifica fracciones algebraicas empleando identidades notables, sacando factor común** y/o factorización de polinomios.	
		Indicador 4.6: **Efectúa operaciones (sumas, productos y cocientes)** combinadas **de fracciones algebraicas**, simplificando cuando sea necesario.	
	unidad 5: ECUACIONES Y SISTEMAS (4 semanas)	Indicador 5.1: **Resuelve ecuaciones de 1^{er} grado y sistemas de ecuaciones de 1^{er} grado con paréntesis y denominadores, sistemas de ecuaciones de 2º grado sencillos** y sistemas de ecuaciones de 2º grado más elaborados.	
		Indicador 5.2: **Resuelve ecuaciones de 2º grado (completas e incompletas) y bicuadradas con paréntesis, denominadores y/o identidades notables,** así como ecuaciones polinomiales factorizadas cuyos factores son, a lo sumo, de 2º grado.	
		Indicador 5.3: **Resuelve ecuaciones con radicales en los que interviene un solo radical cuadrático**, o dos radicales cuadráticos, **y comprueba las posibles soluciones**.	
		Indicador 5.4: Resuelve ecuaciones cuya incógnita aparece en el denominador.	
		Indicador 5.5: **Plantea y resuelve problemas que requieren ecuaciones o sistemas, de tipo sencillo** o más elaborado, interpretando las soluciones obtenidas.	
	unidad 6: INECUACIONES (3 semanas)	Indicador 6.1: **Resuelve analíticamente inecuaciones de 1^{er} grado con una incógnita sencillas**, y con paréntesis y denominadores, e inecuaciones de 1^{er} grado con dos incógnitas gráficamente.	
		Indicador 6.2: **Resuelve analíticamente sistemas de inecuaciones de 1^{er} grado con una incógnita sencillos**, y de dos incógnitas gráficamente.	
		Indicador 6.3: **Resuelve inecuaciones de 2º grado sencillas**, y con denominadores, paréntesis y/o identidades notables.	
		Indicador 6.4: Resuelve inecuaciones racionales sencillas (con numerador y denominador de 1^{er} grado), inecuaciones de grado $\geq$ factorizando, e inecuaciones polinómicas factorizadas.	
Bloque III. GEOMETRÍA	unidad 7: TRIGONOMETRÍA (3 semanas)	Indicador 7.1: **Conoce la medida de ángulos en grados y radianes, y las razones trigonométricas de un ángulo agudo**.	3ª EVALUACIÓN
		Indicador 7.2: **Dada una razón de un ángulo agudo, halla las restantes aplicando las correspondientes identidades notables**.	
		Indicador 7.3: **Resuelve triángulos rectángulos aplicando razones trigonométricas y la calculadora**, y oblicuángulos trazando una de las alturas previamente.	
		Indicador 7.4: Plantea y resuelve problemas de la vida cotidiana en los que se aplican razones trigonométricas.	
Bloque IV: FUNCIONES Y GRÁFICAS	unidad 8: FUNCIONES (4 semanas)	Indicador 8.1: **Representa gráficamente, mediante tabla de valores apropiada en cada caso, las funciones más usuales -polinómicas,** irracionales o racionales sencillas, etc.-, **deduciendo su dominio**, recorrido, simetría, **cortes con los ejes**, crecimiento, **máximos y mínimos**, tendencia, asíntotas (horizontales o verticales), etc.	
		Indicador 8.2: Interpreta gráficas, fundamentalmente relacionadas con fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información.	
		Indicador 8.3: **Representa rectas y parábolas obteniendo analíticamente (no por tabla de valores) sus elementos más importantes: cortes con los ejes, y pendiente o vértice.**	
		Indicador 8.4: Representa funciones definidas a trozos cuyas ramas son funciones usuales (rectas, parábolas, hipérbolas, etc	
Bloque V: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	unidad 9: ESTADÍSTICA (3 semanas)	Indicador 9.1: **Distingue los tipos de variables estadísticas y construye la tabla estadística apropiada a cada caso con los distintos tipos de frecuencias, tanto en distribuciones discretas como continuas.**	
		Indicador 9.2: **Construye, a partir de la tabla, los gráficos más adecuados a cada caso: diagrama de barras, histograma, polígono de frecuencias, diagrama de sectores, etc.**	
		Indicador 9.3: **Calcula, a partir de la tabla, las medidas de centralización más habituales: media, moda, *mediana*** *(Observación: la mediana, en el caso de distribuciones continuas, no se considerará contenido de grado mínimo)* y de dispersión: varianza y desviación típica, y las interpreta.	
	unidad 10: PROBABILIDAD (3 semanas)	Indicador 10.1: **Distingue el espacio muestral y los distintos tipos de sucesos (elemental o compuesto, seguro e imposible, contrario, compatibles e incompatibles, etc.), y determina la $\cup$ e $\cap$ de sucesos.**	
		Indicador 10.2: **Aplica la ley de Laplace para calcular la probabilidad** cuando proceda, así como las fórmulas de la probabilidad de la $\cup$ de sucesos incompatibles y del suceso contrario. Utiliza, en ciertas situaciones, técnicas de recuento elementales (diagramas de árbol, etc.).	
		Indicador 10.3: **Aplica las fórmulas para calcular la probabilidad de sucesos independientes** y dependientes, así como la de la probabilidad condicionada.	

Indicador	¿Alcanza el mínimo? (SI/NO)	1^{er} examen	2º examen	media de los indicadores de ambos exámenes	promedio (80% nota evaluación)
1.1				---	---
1.2				---	
1.3				---	
1.4				---	
1.5				---	
2.1				---	
2.2				---	
3.1				---	
3.2				---	

NOTA: En principio, todos los indicadores vistos a lo largo de la evaluación tendrán el mismo peso, salvo que el profesor indique lo contrario.

ANEXO II: INDICADORES DE LA COMPETENCIA NO MATEMÁTICA en 4º ESO opc. B

EVALUACIÓN DE LAS COMPETENCIAS NO MATEMÁTICAS (20% de la nota de la evaluación)						
COMPETENCIAS (Decreto 69/2007)		INDICADORES	instrumento de evaluación	NOTA (0 a 4)	PESO DE LA NOTA	MEDIA (20% de la nota de la evaluación)
1	Competencia en comunicación lingüística	1.1: ¿En los exámenes, cuaderno, etc. escribe con corrección, cuidando la **ortografía, caligrafía y sintaxis**?	media de la nota obtenida en este apartado en los exámenes de la evaluación		5%	
		1.2: ¿En los exámenes, cuaderno, etc. cuida la corrección en el uso del **lenguaje matemático**?	media de la nota obtenida en este apartado en los exámenes de la evaluación		5%	
		1.3: ¿Se expresa **oralmente** con corrección en la pizarra, al exponer dudas, al responder a alguna cuestión planteada en clase, etc.?	nota subjetiva del profesor		1%	
3	Competencia en el conocimiento y la interacción con el medio físico	3.1: ¿Percibe la **presencia y utilidad de las Matemáticas** en determinados problemas en los que está presente **la naturaleza**, y los resuelve adecuadamente?	posible(s) pregunta(s) de examen		1%	
4	Tratamiento de la información y competencia digital	4.1: ¿Emplea adecuadamente la **calculadora?**	nota subjetiva del profesor		5%	
		4.2: ¿Utiliza a un nivel básico (en el aula Althia) algún **programa de tipo matemático** (Derive, Excel, Cabri, Geogebra, etc.)?	nota subjetiva del profesor		1%	
5	Competencia social y ciudadana	5.1: ¿Es responsable a la hora de realizar las **tareas diarias** y los trabajos?	media de todas las notas de clase a lo largo de la evaluación		50%	
		5.2: ¿Cuida la **limpieza y el orden** en el planteamiento en los exámenes, cuaderno, etc.?	media de la nota obtenida en este apartado en los exámenes de la evaluación		5%	
		5.3: **Trae diariamente el material** (fichas de trabajo, cuaderno, etc.) a clase.	nota subjetiva del profesor		5%	
		5.4: ¿Es regularmente **puntual** al llegar a clase de Matemáticas?	nota subjetiva del profesor		15%	
6	Competencia cultural y artística	6.1: ¿En determinados problemas de Geometría percibe la **presencia y utilidad de las Matemáticas** en ciertas manifestaciones del **arte,** y los enfoca adecuadamente?	posible(s) pregunta(s) de examen		1%	
7	Competencia para aprender a aprender	7.1: ¿Se esfuerza a la hora de abordar el análisis y resolución, **de forma autónoma y personal**, de determinados enunciados y problemas de cierta complejidad?	nota subjetiva del profesor		1%	
8	Autonomía e iniciativa					
9	Competencia emocional	9.1: ¿Expresa con **educación y corrección** en las formas sus ideas y opiniones, y escucha de igual modo las del profesor y el resto de compañeros?	nota subjetiva del profesor		5%	
					$\Sigma = 100\%$	

0: en absoluto
1: de forma insuficiente
2: " " suficiente
3: bien
4: perfectamente

TEMA 1: NÚMEROS REALES EJERCICIOS

Ejercicios libro: pág. 8: 1; pág. 22: 27 (expresar fracciones como decimales y clasificarlos)

1. Ordenar de menor a mayor los siguientes números, pasándolos previamente a común denominador:

a) $\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{6}$ **b)** $\frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{7}{15}$ **c)** $\frac{1}{5} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{2}{7} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{5}{6}$

2. a) Representar en la recta real los siguientes números racionales:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{16}{3} \quad -\frac{5}{7} \quad -\frac{18}{5} \quad 3 \quad \frac{5}{4} \quad -\frac{9}{2}$$

b) A la vista de lo anterior, ordenarlos de menor a mayor.

c) Utilizar la calculadora para comprobar el resultado anterior.

d) Construir $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ y $\sqrt{10}$ sobre la recta real, utilizando regla y compás, y aplicando el teorema de Pitágoras (se recomienda utilizar, también, papel milimetrado), y comprobar el resultado con la calculadora.

Ejercicios libro: ***pág. 10: 6; pág. 22: 36*** *(representar raíces)*

3. Hallar una fracción comprendida entre las dos siguientes. Comprobar el resultado con la calculadora:

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{3}$ **c)** $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ **e)** $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{4}$

***RECORDAR*:**

REGLA PRÁCTICA PARA AVERIGUAR SI UNA FRACCIÓN <u>IRREDUCIBLE</u> CONDUCE A UN DECIMAL EXACTO O PERIÓDICO (sin necesidad de efectuar la división): " Si los únicos divisores primos del denominador de una fracción **irreducible** de n^{os} enteros son el 2 y/o el 5, entonces su expresión decimal será necesariamente exacta; en caso contrario, será periódica"

4. Utilizando la regla anterior, indicar si las siguientes fracciones conducen a un decimal exacto o periódico. Comprobar el resultado haciendo la división directamente (¡sin usar la calculadora!):

a) $\frac{1}{2} \quad \frac{3}{20} \quad \frac{7}{50} \quad \frac{23}{12} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{21} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{23}{18} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{7}{35} \quad \frac{16}{9}$ *(Soluc: E, E, E, P, P, P, E, P, P, E, P)*

b) $\frac{3}{4} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{23}{20} \quad \frac{13}{25} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{23}{9} \quad \frac{132}{21} \quad \frac{7}{6}$ *(Soluc: E, E, E, E, P, P, P, P, P)*

5. Hallar la fracción generatriz de los siguientes números decimales. Comprobar el resultado con la calculadora:

a) $0,25$ *(Soluc: 1/4)*

b) $0,\widehat{6}$ *(Soluc: 2/3)*

c) $0,2\widehat{3}$ *(Soluc: 7/30)*

d) $0,12$ *(Soluc: 3/25)*

e) $0,1\widehat{2}$ *(Soluc: 11/90)*

f) $0,12\widehat{35}$ *(Soluc: 1223/9900)*

g) $1,125$ *(Soluc: 9/8)*

h) $0,\widehat{126}$ *(Soluc: 14/111)*

i) $0,34\widehat{5}$ *(Soluc: 311/900)*

j) $1,1\widehat{8}$ *(Soluc: 107/90)*

k) $1,2\widehat{3}$ *(Soluc: 37/30)*

l) 25,372 *(Soluc: 6343/250)*

m) $12,\widehat{20}$ *(Soluc: 1208/99)*

n) $5,13\widehat{5}$ *(Soluc: 2311/450)*

o) $12,13\widehat{40}$ *(Soluc: 120127/9900)*

p) $24,12\widehat{1}$ *(Soluc: 21709/900)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 8: 2; pág. 22: 28*** *(hallar la fracción generatriz)*

6. Razonar por qué no cabe considerar el período 9, es decir, no tiene sentido indicar $0,\widehat{9}$ o $0,0\widehat{9}$

7. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas, y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

1º Operando directamente en forma decimal (a partir del **i**, utilizar la calculadora)

2º Pasando previamente a fracción generatriz y operando a continuación las fracciones resultantes.

a) $0,\widehat{3}+0,\widehat{6}=$ *(Soluc: 1)*

b) $0,3-0,\widehat{15}=$ *(Soluc: 49/330=$0,1\widehat{48}$)*

c) $3,4\widehat{1}+2,37\widehat{8}=$ *(Soluc: 5,79)*

d) $0,\widehat{4}\cdot 0,1=$ *(Soluc: 2/45=$0,0\widehat{4}$)*

e) $3,\widehat{1}+2,0\widehat{3}=$ *(Soluc: 463/90=$5,1\widehat{4}$)*

f) $0,\widehat{3}+0,1\widehat{6}=$ *(Soluc: 1/2=0,5)*

g) $4\cdot 2,\widehat{5}=$ *(Soluc: 92/9=$10,\widehat{2}$)*

h) $4,\widehat{89}-3,\widehat{78}=$ *(Soluc: 10/9=$1,\widehat{1}$)*

i) $8-2,\widehat{7}=$ *(Soluc: 47/9=$5,\widehat{2}$)*

j) $4,5\cdot 0,0\widehat{2}+0,\widehat{4}=$ *(Soluc: 49/90=$0,5\widehat{4}$)*

k) $0,\widehat{6}:0,0\widehat{5}+0,25=$ *(Soluc: 43/4=12,25)*

l) $1,25-1,1\widehat{6}+1,\widehat{1}=$ *(Soluc: 43/36=$1,19\widehat{4}$)*

m) $2,\widehat{7}\cdot 1,8+2,\widehat{26}:0,1\widehat{13}=$ *(Soluc: 25)*

n) $1,9\widehat{2}+0,25(0,2\widehat{5}+0,\widehat{5})=$ *(Soluc: 17/8=2,125)*

o) $\sqrt{2,\widehat{7}}=$ *(Soluc: 5/3=$1,\widehat{6}$)*

p) $0,8\widehat{3}-0,8:0,\widehat{6}=$ *(Soluc: -11/30=$-0,3\widehat{6}$)*

q) $4,08\widehat{3}\cdot 11,\widehat{1}-0,1\widehat{5}:0,3=$ *(Soluc: 1211/27= $44,\widehat{851}$)*

r) $0,\widehat{6}+1,3\widehat{8}\cdot 0,72=$ *(Soluc: 5/3=$1,\widehat{6}$)*

s) $0,\widehat{5}-0,15+1,2\widehat{3}$ *(Soluc: 59/36=$1,63\widehat{8}$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 22: 32***

8. Separar los siguientes números en racionales o irracionales, indicando, de la forma más conveniente en cada caso, el porqué:

$$\frac{1}{8} \quad \frac{-}{3} \quad \sqrt{5} \quad 2,6 \quad 0 \quad -3 \quad -\frac{25}{3} \quad \sqrt{13} \quad 0,1 \quad 6,\widehat{4} \quad 534 \quad 1,414213\ldots$$

(Soluc: Q; I; I; Q; Q; Q; Q; I; Q; Q; Q; I)

9. Indicar cuál es el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números (IN, Z, Q o I*);* en caso de ser Q o I, razonar el porqué:

$$\frac{\pi}{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad 0,0015 \quad -10 \quad \frac{5}{6} \quad 2,\widehat{3} \quad 2,020020002\ldots$$

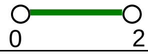
10. Señalar cuáles de los siguientes números son racionales o irracionales, indicando el porqué:

a) 3,629629629....
b) 0,128129130...
c) 5,216968888...
d) 0,123456789...
e) 7,129292929...
f) 4,101001000...
g) 0,130129128...

(Soluc: Q; I; Q; I; Q; I; Q)

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 9: 5; pág. 22: 33***

11. Rellenar la siguiente tabla (véase el primer ejemplo):

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
1		[-1,3]	{x∈IR/ -1≤x≤3}
2			
3			
4		[-2,1)	
5			{x∈IR/ 1<x≤5}
6			
7			{x∈IR/ x<2}
8		(0,∞)	
9			
10		(-1,5)	
11			{x∈R/ x≤0}
12		[2/3,∞)	
13			{x∈IR/ -2<x≤2}
14			{x∈IR/ |x|<3}
15			{x∈IR/ |x|K3}
16			
17		[-1,1]	
18			{x∈IR/ x<-1}
19			
20		(-∞,-2)U(2,∞)	
21		(-∞,2)U(2,∞)	
22			{x∈IR/ |x|≤5}

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
23		[-2,2]	
24			

☞ *Ejercicios libro: pág. 11: 7 y **8**; pág. 22: 38, **39, 40** (se da la def. matemática); **43** (se da la repres. gráfica); **44** (se da el intervalo)*

12. ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta:

a) Todo número real es racional.

b) Todo número natural es entero.

c) Todo número entero es racional.

d) Siempre que multiplicamos dos números racionales obtenemos otro racional.

e) Siempre que multiplicamos dos números irracionales obtenemos otro irracional.

f) Entre dos números reales existe siempre un racional.

g) " " " " " " " irracional.

13. Hallar la U e ∩ de los siguientes intervalos, dibujándolos previamente:

a) A=[-2,5) B=(1,7)	**c)** E=(0,3] F=(2,∞)	**e)** I=[-5,-1) J=(2,7/2]	**g)** M=(2,5) N=(5,9]	**i)** Q=(-3,7) R=(2,4]
b) C=(-1,3] D=(1,6]	**d)** G=(-∞,0] H=(-3,∞)	**f)** K=(-∞,0) L=[0,∞)	**h)** O=[-3,-1) P=(2,7]	**j)** S=[-3,2) T=(0,∞) U=[1,4]

¿Serías capaz de hacer la U e ∩ sin dibujar previamente los intervalos?

14. ¿Qué otro nombre recibe el intervalo [0,∞)? ¿Y (-∞,0]?

15. ¿A qué equivale IR^+ U IR^- ? ¿Y IR^+ ∩ IR^- ?

ERRORES:

16. Completar la siguiente tabla (Sígase en el primer ejemplo). ¿Cuál es, de todas ellas, la mejor aproximación de π?

	Aproximación de π	Aproximación decimal (a la cienmillonésima)	Error absoluto ε_a	Error relativo ε_r
Antiguo Egipto (>1800 a.C.)	$\left(\frac{4}{3}\right)^4$	3,16049383	0,018901…	0,006016…
Arquímedes (s. III a.C.)	$\frac{22}{7}$			
Ptolomeo (s. II d.C.)	$\frac{377}{120}$			
China (s. V d.C.)	$\frac{355}{113}$			

¿Algún día se podrá encontrar una fracción de enteros **exactamente** igual a π?

☞ *Ejercicios libro: pág. 17: 21 y 22; pág. 24: 57, 58 y 59*

17. Como muy bien sabemos, los números π o $\sqrt{3}$ son irracionales, es decir, no pueden ser expresados de manera exacta como un cociente de números enteros; ahora bien, los matemáticos babilonios, egipcios y griegos manejaban aproximaciones bastante precisas, como por ejemplo:

$$\pi \cong 3+\frac{17}{120}=\frac{377}{120} \qquad \text{(Ptolomeo)}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \cong \pi \qquad \text{(desconocido)}$$

$$\sqrt{3} \cong 3+\frac{265}{153}\text{, y mejor: } \sqrt{3} \cong 3+\frac{1351}{780} \qquad \text{(Arquímedes)}$$

Comprobar la precisión de dichas aproximaciones e indicar el error cometido.

18. El sabio griego *Eratóstenes* (siglo III a.C.) fue capaz de obtener un valor del radio de la Tierra de 6548 km. Hallar el error cometido, teniendo en cuenta que el valor real es 6378 km. *(Soluc: ≅ 2,67 %)*

19. **CURIOSIDAD MATEMÁTICA:** Comprobar, con la calculadora, la validez de la siguiente serie, debida al matemático alemán *Leibniz* (s. XVII-XVIII):

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

20. **CURIOSIDAD MATEMÁTICA:** Comprobar la siguiente fórmula, llamada "Método de la fracción continua infinita", debida al matemático italiano *Cataldi* (s. XVI-XVII):

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 22: 34, 35, 37 y 42*** *(teoría)*

25 EJERCICIOS DE FRACCIONES **HOJA 1**

Resolver las siguientes operaciones con fracciones, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $\frac{5}{4}-\frac{2}{4}=$ *(Soluc: 3/4)*

2. $\frac{5}{5}-\frac{4}{4}=$ *(Soluc: 0)*

3. $\frac{5}{5}-\frac{16}{4}=$ *(Soluc: -3)*

4. $-\frac{2}{3}-4=$ *(Soluc: -14/3)*

5. $\left(32+\frac{1}{2}-4\right)-\left(16-\frac{3}{2}-2\right)=$ *(Soluc: 16)*

6. $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: 13/20)*

7. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: 7/10)*

8. $1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=$ *(Soluc: 13/15)*

9. $\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}=$ *(Soluc: 1/15)*

10. $-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=$ *(Soluc: 0)*

11. $-2-\frac{1}{3}=$ *(Soluc: -7/3)*

12. $\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: -1)*

13. $-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: -8/15)*

14. $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}=$ *(Soluc: 1/3)*

15. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=$ *(Soluc: 19/30)*

16. $\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: -34/75)*

17. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{12}+\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{3}=$

(Soluc: 151/36)

18. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{12}+\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{3}=$

(Soluc: 157/36)

19. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}-\frac{2}{14}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}=$

(Soluc: -1/14)

20. $-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{7}-\frac{2}{14}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}=$

(Soluc: 1/7)

21. $\frac{21}{2}-\frac{19}{2}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}\right)-\frac{9}{2}:\frac{3}{4}=$

(Soluc: -11/2)

22. $\frac{17}{9}-\frac{15}{5}+\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{15}\right)+\frac{14}{3}:\frac{16}{8}=$

(Soluc: 26/9)

23. $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}:\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{9}+4\right)=$

(Soluc: 73/15)

24. $\frac{21}{2}-\frac{19}{2}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}\right)=$

(Soluc: 1/2)

25. $\frac{\left(\frac{3}{4}+2\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{5}-\frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}{4}=$

(Soluc: -3/4)

CURIOSIDAD MATEMÁTICA: *El matemático italiano Leonardo de Pisa (1ª mitad s. XIII), más conocido como* ***Fibonacci****, fue el primero en utilizar la notación actual para fracciones, es decir, dos números superpuestos con una barra horizontal entre medias.*

16 EJERCICIOS DE FRACCIONES HOJA 2

Resolver las siguientes operaciones con fracciones, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $\frac{2}{3}+\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]=$ *(Soluc: 13/12)*

2. $\frac{4}{5}-\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\left(2+\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{3}+4:\frac{6}{5}=$

(Soluc: 13/10)

3. $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{10}\right)-\frac{5}{4}+\left(\frac{3}{5}:4\right)+\frac{12}{5}=$

(Soluc: 193/60)

4. $2+\frac{1}{5}:\left(2+\frac{7}{3}-\frac{2}{4}+\frac{5}{3}\right)=$

(Soluc: 112/55)

5. $\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{5}+\frac{2}{8}\right)\cdot\frac{3}{2}-\frac{7}{5}:\frac{4}{7}=$

(Soluc: -797/280)

6. $\frac{17}{9}-\frac{15}{5}+\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{15}\right)+\frac{14}{3}:\frac{16}{8}=$

(Soluc: 26/9)

7. $\frac{21}{5}+\frac{15}{4}\cdot\frac{16}{3}-\frac{15}{30}+\frac{12}{4}:\frac{5}{4}+3=$

(Soluc: 291/10)

8. $\frac{2}{3}-\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=$

(Soluc: -37/20)

9. $2-\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\right]-\left(\frac{4}{3}+2\right)-\frac{1}{5}=$

(Soluc: -49/30)

10. $2+\left(\frac{5}{2}-3\right)-\left[\frac{7}{10}-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)\right]=$

(Soluc: 29/20)

11. $-\frac{3}{8}+\left(4-\frac{1}{2}\right)-\left[\left(2-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{8}\right)\right]=$

(Soluc: -1)

12. $\left(\frac{4}{3}-\frac{-1}{9}\right)+\left[2-\left(-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{7}{2}=$

(Soluc: 19/36)

13. $\left[\left(\frac{4}{6}+\frac{1/7}{2}\right):\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{12}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)=$

(Soluc: 31/165)

14. $\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot 3-\frac{1+2/5}{3}\right]=$

(Soluc: 259/225)

15. $\frac{4}{5}:\left[\frac{12}{16}\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{8}\right]-3\left[\frac{1}{6}:\left(1-\frac{2}{5}\right)\right]=$

(Soluc: 71/30)

16. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}:\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{8}+1\right)=$

(Soluc: 23/26)

17 EJERCICIOS DE FRACCIONES HOJA 3

Resolver las siguientes fracciones de términos racionales, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=$ *(Soluc: 33/5)*

2. $\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}}=$ *(Soluc: 7/24)*

3. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right):\frac{1}{6}}=$ *(Soluc: 1/16)*

4. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-4}{\left(3+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{3}}=$ *(Soluc: -39/17)*

5. $\dfrac{\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{2}{3}\right)}{1+\frac{5}{4}:\frac{3}{12}}=$ *(Soluc: 35/27)*

6. $\dfrac{1+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}}{1-\dfrac{1-\frac{1}{3}}{3}}=$ *(Soluc: 9/4)*

7. $\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}-3}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+3}=$ *(Soluc: -73/98)*

8. $\dfrac{\left(\frac{2}{5}:3+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{7}}{\frac{2}{5}\cdot3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{7}}=$

(Soluc: -47/606)

9. $\dfrac{\frac{3}{5}:\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}\right)+3}{\left[\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{2}\right]:\frac{1}{2}}=$

(Soluc: 1323/3665)

10. $$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{2}:\frac{1}{4}+5}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{2}:\frac{1}{4}+5\right)}=$$

(Soluc: -31/9)

11. $$\frac{\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}+2\right)\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}:\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{3}}=$$

(Soluc: 81/50)

12. $$\frac{\frac{2}{5}-\frac{6}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{5}-\frac{6}{4}}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{6}{5}}=$$

(Soluc: 893/1512)

13. $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{2+\frac{5}{2}-\frac{1}{6}}\cdot\frac{2}{1-\frac{3}{2-\frac{1}{4}}}=$$

(Soluc: -49/130)

14. $$\frac{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}:1-\frac{5}{4}+\frac{17}{3}}{\frac{15}{3}+\frac{2}{5}}=$$

(Soluc: 205/162)

15. $$\frac{\left[-3+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{27}\right)\right]:\frac{3}{2}}{\left(\frac{2}{5}-3:\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)}=$$

(Soluc: 59/32)

16. $$\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}}{2+\frac{1}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)}=$$

(Soluc: 55/152)

17. $$\frac{\frac{5}{3}-\left[\frac{2}{3}:\frac{2}{5}-\left(3+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\frac{3}{11}}{\frac{14}{3}-\frac{13}{3}:\left(\frac{2}{5}-3\right)+\frac{1}{2}}=$$

(Soluc: 13/21)

18 EJERCICIOS DE FRACCIONES **HOJA 4**

Resolver las siguientes fracciones de términos racionales, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $$\frac{\frac{1}{3}:\left(2+\frac{2}{5}\cdot\frac{25}{8}\right)}{\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}:2\right)\cdot\frac{25}{8}}=$$

(Soluc: -84/455)

2. $$\frac{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\ \frac{25}{6}-2:\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}\left(\frac{1}{5}-2\right)-\frac{1}{3}}=$$

(Soluc: 27/17)

3. $$\frac{2-\frac{5}{3}:\left(1+\frac{1}{5}\right)-2}{2:\frac{5}{3}+1-\frac{1}{5}:2}=$$

(Soluc: -125/189)

4. $$\frac{\frac{3}{5}:\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}:\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{9}\right)}{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}:\frac{2}{5}\ \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}+\frac{10}{9}\right)}=$$

(Soluc: 585/347)

5. $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=$$

(Soluc: 8/5)

6. $$\frac{\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right]\frac{2}{5}-3}{\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}:\frac{1}{3}\,\frac{2}{5}-3}=$$

(Soluc: 311/342)

7. $$3+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{3}}}=$$

(Soluc: 139/39)

8. $$\frac{\frac{1}{2}\,\frac{8}{3}+\frac{3}{5}:\frac{9}{25}-1}{\frac{1}{2}\quad\frac{8}{3}+\frac{3}{5}\quad:\frac{9}{25}+1}=$$

(Soluc: 108/299)

9. $$\frac{\frac{3}{5}:3-2\,\frac{3}{8}+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)-3}=$$

(Soluc: -21/380)

10. $$\frac{\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,\frac{8}{27}\right)\frac{2}{5}-3\right]:\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\frac{8}{27}\left(\frac{2}{5}-3:\frac{3}{2}\right)}=$$

(Soluc: 59/32)

11. $$1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7}}}=$$

(Soluc: 233/151)

12. $$\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}-3\right)+\frac{29}{6}:5}{1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5}}:\left(2-\frac{28}{19}\right)}=$$

(Soluc: 1/2)

13. $\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{15}{8}\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{9}{10}\right)-\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\dfrac{12}{5}\right)}=$

(Soluc: -125/28)

14. $\dfrac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\left(2-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}\right):\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}:2-\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}:\dfrac{2}{5}\right)-\dfrac{1}{5}}=$

(Soluc: 128/33)

15. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{24}\right)-\left(\dfrac{2}{30}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{9}\right)}{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{10}\right):\dfrac{5}{3}-\dfrac{4}{16}\left(3-\dfrac{5}{3}\right)}=$

(Soluc: -11/13)

16. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{5}+2-\dfrac{1}{3}\right):\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{5}+\left(2-\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{5}\right)\cdot\dfrac{3}{2}}=$

(Soluc: 325/21)

17. $\dfrac{\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{5}+3:\dfrac{6}{5}\right)-\dfrac{7}{20}}{\left(3+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{10}\right):\dfrac{6}{5}-\dfrac{4}{5}}=$

(Soluc: 20/11)

18. $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}+-4+\dfrac{1}{5}\right):\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2}{3}-\left(4+\dfrac{1}{5}:\dfrac{2}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{3}}=$

(Soluc: 131/23)

POTENCIAS	EJERCICIOS

RECORDAR:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^0 = 1$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

También es importante saber que:

$1^{\text{algo}} = 1$

$(\text{base negativa})^{\text{par}} = +$

$(-1)^{\text{par}} = 1$

$(\text{base negativa})^{\text{impar}} = -$

$(-1)^{\text{impar}} = -1$

(Añade estas fórmulas al formulario que realizarás a lo largo del curso)

1. Calcular las siguientes potencias de exponente natural (**sin usar calculadora**):

$(-2)^5 =$ $(-1)^{21} =$ $13^0 =$ $(-2)^2 =$ $1^{21} =$ $(-3)^4 =$ $-3^4 =$

$(-2)^3 =$ $-2^3 =$ $9^2 =$ $(-9)^2 =$ $9^3 =$ $(-9)^3 =$ $1^9 =$

$1^{4569} =$ $(-1)^{10} =$ $(-1)^{523} =$ $1^0 =$ $235^0 =$ $(-1)^0 =$ $(0{,}75)^0 =$

2. Calcular las siguientes potencias de exponente entero (**sin usar calculadora**), dejando el **resultado en forma entera o fraccionaria**:

$2^{-1} =$ $2^{-2} =$ $2^{-3} =$ $3^{-1} =$ $3^{-2} =$ $3^{-3} =$

$1^{-4} =$ $1^{-7} =$ $1^{-10} =$ $(-1)^{-4} =$ $(-1)^{-7} =$ $(-1)^{-10} =$

3. Calcular las siguientes potencias de base fraccionaria, dejando el **resultado en forma fraccionaria**:

$\left(\frac{5}{3}\right)^3 =$ $\quad$ $\left(\frac{9}{4}\right)^2 =$ $\quad$ $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 =$ $\quad$ $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 =$ $\quad$ $\left(\frac{9}{4}\right)^{-2} =$

$\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} =$ $\quad$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} =$ $\quad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} =$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} =$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$ $\quad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$ $\quad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} =$ $\quad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} =$ $\quad$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 =$ $\quad$ $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} =$ $\quad$ $\left(\frac{4}{7}\right)^3 =$ $\quad$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 =$ $\quad$ $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2} =$ $\quad$ $\left(-\frac{7}{2}\right)^3 =$ $\quad$ $\left(-\frac{9}{2}\right)^{-3} =$ $\quad$ $0{,}1^{-1} =$

4. Pasar a forma de potencia **de base entera lo más simple posible**:

$8 =$ $\quad$ $32 =$ $\quad$ $81 =$ $\quad$ $125 =$ $\quad$ $343 =$ $\quad$ $\frac{1}{3} =$ $\quad$ $\frac{1}{4} =$

$\frac{1}{5} =$ $\quad$ $\frac{1}{10} =$ $\quad$ $\frac{1}{14} =$ $\quad$ $\frac{1}{64} =$ $\quad$ $100 =$ $\quad$ $10.000 =$ $\quad$ $1.000.000 =$

$\frac{1}{100} =$ $\quad$ $\frac{1}{10.000} =$ $\quad$ $\frac{1}{1.000.000} =$ $\quad$ $0{,}1 =$ $\quad$ $0{,}01 =$ $\quad$ $0{,}001 =$

1millón = $\quad$ 1billón = $\quad$ 1trillón = $\quad$ 1milésima =

1millonésima = $\quad$ 1cienmilésima = $\quad$ $\frac{1}{1024} =$ $\quad$ $\frac{1}{125} =$

5. Pasar a potencia única de base racional, y **simplificar el resultado**:

$7^2 \cdot 6^2 =$ $\quad$ $7^3 \cdot 6^3 =$ $\quad$ $(-7)^2 \cdot 6^2 =$ $\quad$ $(-7)^3 \cdot 6^3 =$ $\quad$ $7^2 \cdot (-6)^2 =$

$(-7)^3 \cdot (-6)^3 =$ $\quad$ $\frac{7^2}{6^2} =$ $\quad$ $\frac{7^3}{6^3} =$ $\quad$ $\frac{(-7)^2}{6^2} =$ $\quad$ $\frac{7^3}{(-6)^3} =$

$\frac{(-7)^2}{(-6)^2} =$ $\quad$ $7^{-2} \cdot 7^3 =$ $\quad$ $6^{-2} \cdot 6^{-5} =$ $\quad$ $9^0 \cdot 9^3 =$ $\quad$ $10^{20} \cdot 10^4 =$

$10^{-20} \cdot 10^4 =$ $\quad$ $10^{-20} \cdot 10^{-4} =$ $\quad$ $\frac{7^{-2}}{7^3} =$ $\quad$ $\frac{6^{-2}}{6^{-5}} =$ $\quad$ $\frac{9^0}{9^3} =$

$\frac{10^{20}}{10^4} =$ $\quad$ $\frac{10^{-20}}{10^4} =$ $\quad$ $\left(7^{-2}\right)^3 =$ $\quad$ $\left(6^{-2}\right)^{-5} =$ $\quad$ $\left(9^0\right)^3 =$

$\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 =$ $\quad$ $\left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^6 =$ $\quad$ $\left(\frac{7}{10}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{-3} =$

$\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^6}{\left(\frac{5}{2}\right)^4} =$ $\quad$ $\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} =$ $\quad$ $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}} =$ $\quad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} =$ $\quad$ $\left(\frac{3}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} =$ $\quad$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} =$ $\quad$ $3^3 \cdot 3^3 =$ $\quad$ $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}} =$

6. Calcular y **simplificar**:

a) $-5^4 =$

b) $(-5)^4 =$

c) $-3^3 =$

d) $(-3)^3 =$

e) $-\left(\frac{1}{2}\right)^6 =$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6 =$

g) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 =$

h) $-\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

i) $2^2 - 3^2 =$

j) $2^2\left(-3^2\right) =$

k) $(-3)^{-3} =$

l) $(-3)^{-4} =$

m) $-3^{-4} =$

n) $\left(2^3\right)^{-2} =$ *(Soluc: 1/64)*

o) $\left(2^{-3}\right)^{-2} =$ *(Soluc: 64)*

p) $\left(-2^3\right)^{-2} =$ *(Soluc: 1/64)*

q) $\left[(-2)^3\right]^{-2} =$ *(Soluc: 1/64)*

r) $\left[(-2)^{-3}\right]^{-2} =$ *(Soluc: 64)*

s) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^3 =$ *(Soluc: 1/15625)*

t) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^2 =$ *(Soluc: 256/81)*

u) $\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} =$ *(Soluc: 25/9)*

v) $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}\right]^3 =$ *(Soluc: 117.649/4096)*

w) $\left[\left(\frac{2}{9}\right)^2\right]^{-1} =$ *(Soluc: 81/4)*

7. Calcular, **aplicando las propiedades de las potencias, y simplificando en todo momento**:

a) $\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\right)^5 =$ *(Soluc: 1/1024)*

b) $\left[\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{8}\cdot(-2)\right]^{-4} =$ *(Soluc: 10000/81)*

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5} =$

(Soluc: -900)

d) $\left[\frac{15}{7}\cdot\left(\frac{21}{5}\right)^2\cdot(-1)\cdot\frac{2}{3}\right]^3 =$

$\left(\textit{Soluc}: -\frac{3^6\cdot 7^3\cdot 2^3}{5^3}\right)$

e) $\dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^5}{\left(\frac{2}{7}\right)^4}=$ *(Soluc:8/343)*

f) $a^2\cdot a^{-2}\cdot a^3=$ *(Soluc: a^3)*

g) $\dfrac{\left(2^{-5}\right)^0}{2^{-3}}=$ *(Soluc: 8)*

h) $\dfrac{2^3}{(5\cdot 2)^{-5}}=$ *(Soluc:800000)*

i) $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]^{-4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}=$ *(Soluc:$2^8/5^{10}$)*

j) $\dfrac{2^{-3}\cdot(-2)^4\cdot(-4)^{-1}}{-2}=$ *(Soluc: 1/4)*

k) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{2^{-1}}=$ *(Soluc: 1)*

l) $\dfrac{12^5}{18^4}=$ *(Soluc :64/27)*

m) $\left(8\cdot 4^{-2}\right)^3=$ *(Soluc: 1/8)*

n) $3^2\cdot 9^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot 27^{-2}=$ *(Soluc: 3^6)*

o) $\dfrac{\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3}{\left(\frac{25}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot 2^{-7}}=$

(Soluc: 3/10)

p) $\left(\frac{6}{5}\right)^6\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)^{-4}=$ *(Soluc: $3^{10}\cdot 2^2/5^{10}$)*

q) $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right]^{-3}}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-8}\right]^{-2}}=$ *(Soluc: $(2/3)^{15}$)*

r) $\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-5}:\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}}{\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}:\frac{1}{5}}=$ *(Soluc: $1/5^{12}$)*

s) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=$

(Soluc: -9)

8. Idem:

a) $\dfrac{2^7\cdot 2^5\cdot 2^3\cdot 2^0}{2\cdot 2^3\cdot 2^5\cdot 2^6}=$ *(Soluc: 1)*

b) $\dfrac{2^3\cdot 2^4\cdot 5^3\cdot 5^{-1}}{2^{-1}\cdot 2^2\cdot 5^{-2}\cdot 5^{-3}}=$ *(Soluc: $2^6\cdot 5^7$)*

c) $\dfrac{3^{-2}\cdot 7^2\cdot 3\cdot 7^{-4}\cdot 3^5}{7^3\cdot 3^{-1}\cdot 7^{-5}\cdot 3^4}=$ *(Soluc: 3)*

d) $\dfrac{3^8\cdot 7^{-1}\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 3^{-2}}{7^4\cdot 5^{-1}\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7^{-2}}=$ *(Soluc: 3)*

e) $\dfrac{2^3\cdot 4^5\cdot 2^6\cdot 2\cdot 8^{30}}{16\cdot 2^3\cdot 32\cdot 2^4}=$ *(Soluc: 2^{94})*

f) $\dfrac{15^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 45^2}{25\cdot 5^3\cdot 125\cdot 27}=$ *(Soluc: 243/5)*

g) $\dfrac{6\cdot 12^3\cdot 18^2\cdot 3^2\cdot 108^2}{27^2\cdot 3^2\cdot 16\cdot 48\cdot 36}=$

(Soluc: 1944)

h) $\dfrac{2^2\cdot\left(2^3:2^4\right)^{-5}:2^{-3}}{2^3\cdot\left(2^{-2}\right)^{-3}}=$ *(Soluc: 2)*

i) $\dfrac{15^2\cdot 5^{-2}\cdot 5^3\cdot 45^2}{\left(5^3\right)^2\cdot 27\cdot 3^{-2}}=$ *(Soluc: 243/5)*

j) $\dfrac{2^{-1}\cdot(2^3)^5\cdot 4\cdot 5^3}{100\cdot 2^{-2}\cdot 8}=$ *(Soluc: $5\cdot 2^{13}$)*

k) $\dfrac{3^2:\left(2:3^3\right)^2}{2:\left(3\cdot 2^2\right)^{-2}}=$ *(Soluc: $3^6/2^7$)*

l) $\dfrac{2^3\cdot 8^{-3}\cdot 12^{-1}\cdot(-3)^2}{6^2\cdot 16^{-2}\cdot 3^{-3}}=$ *(Soluc: 9/4)*

m) $\dfrac{6^4\cdot 9^2\cdot 2^{-4}\cdot 3^{-5}\cdot 2^{-1}}{18^3\cdot 2^{-5}\cdot 3^6\cdot\left(3^3\right)^{-3}}=$ *(Soluc: 2)*

n) $\dfrac{\left(3^2\right)^3\cdot 3^{-2}\cdot\left(2^{-2}\right)^3\cdot\left(2^2\right)^{-3}}{18\cdot\left(3^{-1}\right)^{-2}\cdot 2^{-7}\cdot\left(2^2\right)^{-3}}=$

(Soluc: 1)

o) $\dfrac{\left(6a^{-3}b^{2}\right)^{-3}}{(2ab)^{-4}}=$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{2a^{13}}{27b^{2}}\right)$

p) $\dfrac{4^{3}\cdot\left(3^{-2}\right)^{-3}\cdot 27^{-3}\cdot 32^{2}\cdot\left(36^{2}\right)^{-2}}{8^{2}\cdot\left(2^{6}\right)^{2}\cdot\left(9^{-3}\right)^{5}\cdot 24^{-3}\cdot\left[\left(3^{-2}\right)^{2}\right]^{-5}}=$

(Soluc: 9/2)

q) $\dfrac{\left(-x^{2}y\right)^{5}\left(-y^{4}\right)^{-3}}{(-y)^{2}(-x)^{3}(-y)^{6}}=$ *(Soluc: - x^7/y^{15})*

r) $\dfrac{2^{3}\cdot(3^{-2})^{-3}\cdot(-8)^{-2}\cdot(6^{2})^{-4}}{[(-9)^{-2}]^{3}\cdot 16^{-1}\cdot 4^{-3}\cdot[(-3)^{-2}]^{-3}}=$

(Soluc: 81/2)

s) $\left[\dfrac{\left(10x^{-3}yz\right)^{-4}}{\left(5xy^{-2}z\right)^{-4}}\right]^{-2}=$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{256y^{24}}{x^{32}}\right)$

t) $\dfrac{(-3)^{-3}\cdot 15^{-1}\cdot(-25^{-2})^{-2}\cdot 5^{-3}}{[(-45)^{-2}]^{2}\cdot 9^{2}\cdot(-5)^{4}}=$

(Soluc: -625)

☞ *Ejercicios libro: pág. 12: 9*

9. Calcular el valor de las siguientes expresiones, aplicando en todo momento las propiedades de las potencias (¡no vale calcular el valor de las potencias de exponente elevado!). En la mayor parte de los casos, bastará con sacar como factor común la mayor potencia posible. Fíjate en el 1$^{\text{er}}$ ejemplo:

a) $\dfrac{2\cdot 3^{18}}{3^{20}-3^{18}}=\dfrac{2\cdot 3^{18}}{3^{18}(3^{2}-1)}=\dfrac{2\cdot 3^{18}}{3^{18}(9-1)}=\dfrac{2\cdot\cancel{3^{18}}}{\cancel{3^{18}}\cdot 8}=\dfrac{2}{8}=\boxed{\dfrac{1}{4}}$

b) $\dfrac{2^{15}}{2^{16}-2^{15}}=$ *(Soluc: 1/2)*

c) $\dfrac{7\cdot 2^{30}}{2^{32}+2^{31}+2^{30}}=$ *(Soluc: 1)*

d) $\dfrac{2^{9}}{2^{9}+2^{9}}=$ *(Soluc: 1/2)*

e) $\dfrac{2^{6}-2^{5}}{3\cdot 2^{5}}=$ *(Soluc: 1/3)*

f) $\dfrac{2^{22}}{2^{20}+4^{10}}=$ *(Soluc: 2)*

g) $\dfrac{27^{10}}{3^{31}-9^{15}}=$ *(Soluc: 1/2)*

10. Calcular, **aplicando las propiedades de las potencias, y simplificando en todo momento**:

a) $\dfrac{4^4\cdot 8^{-1}\cdot 16^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot 8^6}=$

(Soluc: 1/4)

b) $\dfrac{(-3)^2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2\cdot\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^0\right]^{-2}}{(-3)^5\cdot 3^{-2}\cdot(-3)^{-3}\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\right]^{-1}}=$

(Soluc: -27)

c) $\dfrac{\left(-\dfrac{5}{4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}\left[\left(\dfrac{2}{25}\right)^{-2}\right]^2}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{-1}\cdot(-25)^{-2}\cdot\left\{\left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-3}\right]^2\right\}^{-3}}=$

(Soluc: 125/2)

d) $\dfrac{\dfrac{3^3\cdot 5^2}{2^{-1}}}{\dfrac{3^2\cdot 5}{2^{-2}}}\cdot\dfrac{2^2}{3\cdot 5}=$

(Soluc: 2)

e) $\dfrac{3^3\cdot\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]^3\cdot(-2)^3}{3^{-1}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-4}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\cdot 12}=$

(Soluc: 36)

f) $$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)^{-2}\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{-3}\cdot\left[\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}\right]^{0}}{\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\right]^{2}\cdot\left(-\frac{16}{27}\right)^{-1}\cdot 18^{2}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}\right]^{-2}}=$$

(Soluc: 3)

g) $$\frac{\dfrac{\left(5^{2}\cdot 5^{3}\cdot 5^{-4}\right)^{2}}{\left(5^{-2}\cdot 5^{-3}\cdot 5^{4}\right)^{3}}}{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{2}:\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\right]^{4}}=$$

(Soluc: 1/125)

h) $$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}{\left(\frac{5}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\cdot 8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot 3^{-2}}=$$

(Soluc: 2/15)

i) $$\left(\frac{4^{2}}{3^{5}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{2}}{3^{-3}\cdot 2^{2}}\right)^{6}\cdot\left(\frac{5^{3}}{4^{3}}\right)^{4}\cdot\left(\frac{4^{2}}{5^{4}\cdot 3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2^{10}}{5^{2}}\right)^{2}=$$

$\left(\textit{Soluc:}\ \frac{3^{13}}{2^{8}}\right)$

j) $$\frac{\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{3}\right]^{-2}\cdot 5^{3}}{\left(\frac{25}{49}\right)^{-3}\cdot 7^{-2}\cdot 35\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}=$$

(Soluc: 35)

k) $$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot 3^{-2}\cdot(-3)^{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-2)^{5}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}}=$$

(Soluc: -9/128)

l) $$\frac{2^2\cdot(-2)^3\cdot 4^{-2}\cdot(-2)^{-5}\cdot 8^0}{9^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}}=$$

(Soluc: 1)

m) $$\frac{6^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 12}{\left(\frac{5}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\cdot 27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}=$$

(Soluc: 6/5)

n) $$\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-3)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2\cdot\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^0\right]^{-2}}{(-3)^5\cdot 3^{-2}\cdot(-3)^{-3}\cdot\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^{-1}}=$$

o) $$\frac{2^3\cdot(-3)^{-5}\cdot 18^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{(-2)^2\cdot 2^{-3}\cdot(-3)^3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}}=$$

(Soluc: 4)

p) $$\left[\left(\frac{4^2\cdot 3^{-5}}{3^2}\right)^3\cdot\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^2}{3^{-3}\cdot 2^2}\right)^6\cdot\left(\frac{4^{-3}}{5^{-3}}\right)^6\cdot\left(\frac{4}{3\cdot 4}\right)^3\cdot\left(\frac{7\cdot 5^{-2}}{5\cdot 7^{-3}}\right)^2\cdot\left(\frac{2^5}{5^2\cdot 2^{-5}}\right)^2\right]^3=$$

$$\left(\text{Soluc}:\ \frac{3^{18}\cdot 5^{24}\cdot 7^{24}}{2^{84}}\right)$$

11. OPERACIONES MIXTAS: Calcular, **aplicando, siempre que sea posible, las propiedades de las potencias,** y simplificando en todo momento. **Cuando no sea ya posible aplicar las propiedades de las potencias, debido a la existencia de una suma o resta, pasar la potencia a número y operar**:

a) $$\frac{\left(2^0\cdot 2^{-1}\cdot 2^3\right)^3}{\left[\frac{(1/3)^{-2}}{3}+1\right]^3}=$$ *(Soluc: 1)*

CONSECUENCIA: Hay que aplicar las propiedades de las potencias siempre que se pueda; cuando ello no sea posible (normalmente porque hay sumas y/o restas) se pasa la potencia a número y se opera.

b) $$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left[(-2)^{3}\right]^{2}+(-3)^{3}\cdot(-3)^{2}}=$$

(Soluc: -4/179)

c) $$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}{\left[(-2)^{3}+2^{-3}\right]\cdot 63^{-1}}=$$

(Soluc: -12)

d) $$\frac{\dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}\left(\frac{5}{2^{3}}\right)^{-1}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}}+(-4)^{-3}}{1+\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{4^{-3}}}=$$

(Soluc: -1/64)

e) $$\frac{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{3}\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}}{\left[(-2)^{3}\right]^{2}+(-5)^{3}\cdot 2^{3}}=$$

(Soluc: 17/936)

f) $$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^{2}-\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{4}{9}\right)^{2}\right]^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}\frac{1}{3^{4}}\;2^{-1}}=$$

(Soluc: -608/81)

g) $$\frac{\left[\frac{3}{(1/3)^{-2}}\right]^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}+3^{-1}}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\cdot 25-\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]:\frac{5}{3}}=$$

(Soluc: 1)

h) $$\frac{\left[\frac{(2/3)^{-2}}{(1/3)^{-1}}+4^{-1}\right]^{-2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\frac{7}{16}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}+3^{-3}\right]^{2}+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}=$$

(Soluc: 1)

i) $$\left\{\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot(-3)^{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{2}}{2\cdot 3^{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}\right\}^{10}=$$

(Soluc: 1)

j) $$\frac{(-3)^{-2}\cdot 2^{-3}\cdot\left(\frac{1}{72}\right)^{-1}}{(-3)^{3}-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{2}}=$$

(Soluc: -1/43)

NOTACIÓN CIENTÍFICA:

12. Escribir en notación científica los siguientes números:

a) 300.000.000	**f)** 0,000001	**k)** 14 millones €	**p)** 10
b) 456	**g)** -78986,34	**l)** 150 millardos $	**q)** 1
c) 0,5	**h)** 0,0000093	**l)** 7,3	**r)** 0,011001
d) 0,0000000065	**i)** 93 mil moléculas	**n)** 73 billones kg	**s)** 16.730.000
e) 18.400.000.000	**j)** 1.230.000.000.000	**o)** 0,00010001	**t)** -345,45

(NOTA: Un millardo son mil millones, un billón son mil millardos, es decir, un millón de millones, etc...)

*Ejercicios libro: pág. 18: **23** y 24; pág. 24: **62** y 63 (pasar a notación científica)*
*pág. 24: **61** (pasar a notación estándar)*

13. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas (y comprobar que se obtiene el mismo resultado):

- Sin calculadora, aplicando sólo las propiedades de las potencias.
- Utilizando la calculadora científica.

a) $2{,}5\cdot 10^{7}+3{,}6\cdot 10^{7}=$

b) $4{,}6\cdot 10^{-8}+5{,}4\cdot 10^{-8}=$

c) $1{,}5\cdot 10^{6}+2{,}4\cdot 10^{5}=$

d) $2{,}3\cdot 10^{9}+3{,}25\cdot 10^{12}=$

e) $3{,}2\cdot 10^{8}-1{,}1\cdot 10^{8}=$

f) $4{,}25\cdot 10^{7}-2{,}14\cdot 10^{5}=$

g) $7{,}28\cdot 10^{-3}-5{,}12\cdot 10^{-3}=$

h) $(2\cdot 10^{9})\cdot(3{,}5\cdot 10^{7})=$

i) $\dfrac{8{,}4\cdot 10^{9}}{2\cdot 10^{7}}=$

j) $\dfrac{(3{,}2\cdot 10^{-3})\cdot(4\cdot 10^{5})}{2\cdot 10^{-8}}=$

k) $(2\cdot 10^{5})^{2}=$

l) $(1{,}4\cdot 10^{15}+2{,}13\cdot 10^{18})\cdot 2\cdot 10^{-5}=$

m) $2{,}23\cdot 10^{-3}+3\cdot 10^{-4}-5\cdot 10^{-5}=$

n) $(0{,}55\cdot 10^{23}-5\cdot 10^{21})\cdot 2\cdot 10^{-13}$

☞ *Ejercicios libro: pág. 19: 25;* ***pág. 24: 64 a 67*** *(operar en notación científica)*
pág. 19: 26; pág. 24: 68 y 69 (operar con calculadora)

14. La estrella más cercana a nuestro sistema solar es α-Centauri, que está a una distancia de tan sólo 4,3 años luz. Expresar, en km, esta distancia en notación científica. (Dato: velocidad de la luz: 300.000 km/s) ¿Cuánto tardaría en llegar una nave espacial viajando a 10 Km/s? *(Soluc: $4{,}068\cdot 10^{13}$ km)*

15. Calcular el volumen aproximado (en m^3) de la Tierra, tomando como valor medio de su radio 6378 km, dando el resultado en notación científica con dos cifras decimales. $\left(\text{Volumen de la esfera}: \frac{4}{3}\pi r^{3}\right)$
(Soluc: $1{,}15\cdot 10^{21}$ m^3)

16. Un glóbulo rojo tiene forma de cilindro, con un diámetro de unas 7 millonésimas de m y unas 2 millonésimas de altura. Hallar su volumen en notación científica. *(Soluc: $76{,}97\cdot 10^{-18}$ m^3)*

17. En una balanza de precisión pesamos cien granos de arroz, obteniendo un valor de 0,0000277 kg. ¿Cuántos granos hay en 1000 ton de arroz? Utilícese notación científica. *(Soluc: $3{,}61\cdot 10^{12}$ gr)*

18. La luz del sol tarda 8 minutos y 20 segundos en llegar a la Tierra. Calcular la distancia Tierra-Sol.
(Soluc: $1{,}5\cdot 10^{8}$ km)

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 24: 70 a 76***

19. Rellenar la siguiente tabla para una calculadora de 10 dígitos en notación entera y 10+2 dígitos en notación científica:

	SIN NOTACIÓN CIENTÍFICA	CON NOTACIÓN CIENTÍFICA
Nº MÁXIMO que puede representar		
Nº MÍNIMO (positivo) que puede representar		

EJERCICIOS DE RAÍCES 4º ESO

RECORDAR:

- Definición de raíz n-ésima: $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$
- Equivalencia con una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$
- Simplificación de radicales/índice común: $\sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{x^m}$
- Propiedades de las raíces: $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

  $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

  $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$
- Introducir/extraer factores: $x\cdot\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x^n\cdot a}$

1. Calcular mentalmente, **<u>sin usar calculadora</u>**:

$\sqrt{9} =$ $\quad\sqrt{25} =$ $\quad\sqrt{49} =$ $\quad\sqrt{100} =$ $\quad\sqrt{1} =$

$\sqrt{0} =$ $\quad\sqrt{\dfrac{1}{4}} =$ $\quad\sqrt{\dfrac{1}{9}} =$ $\quad\sqrt{\dfrac{4}{25}} =$ $\quad\sqrt{\dfrac{16}{100}} =$

$\sqrt{0{,}25} =$ $\quad\sqrt{0{,}09} =$ $\quad\sqrt{0{,}0081} =$ $\quad\sqrt{0{,}49} =$ $\quad\sqrt{7^6} =$

$\sqrt{5^{24}} =$ $\quad\sqrt{2^{10}} =$ $\quad\sqrt{9^{-10}} =$

2. Calcular mentalmente, **<u>sin usar calculadora</u>**:

$\sqrt[3]{8} =$ $\quad\sqrt[3]{27} =$ $\quad\sqrt[3]{64} =$ $\quad\sqrt[3]{1000} =$ $\quad\sqrt[3]{1331} =$

$\sqrt[3]{-1} =$ $\quad\sqrt[3]{-8}$ $\quad\sqrt[3]{-27} =$ $\quad\sqrt[3]{-1000} =$

$\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} =$ $\quad\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}} =$ $\quad\sqrt[3]{-\dfrac{64}{125}} =$ $\quad\sqrt[3]{\dfrac{64}{1000}} =$

$\sqrt[3]{0{,}125} =$ $\quad\sqrt[3]{0{,}027} =$ $\quad\sqrt[3]{0{,}001} =$ $\quad\sqrt[3]{-0{,}216} =$

3. Calcular, aplicando la definición de raíz (**<u>no vale con calculadora</u>**):

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$ pq $(-2)^3 = \boxed{-8}$ $\quad$ **b)** $\sqrt{-8} =$ $\quad$ **c)** $\sqrt[6]{-1} =$ $\quad$ **d)** $\sqrt[5]{-32} =$

e) $\sqrt[4]{81} =$ $\quad$ **f)** $\sqrt{5^2} =$ $\quad$ **g)** $\sqrt[6]{2^6} =$ $\quad$ **h)** $\sqrt{\dfrac{625}{81}} =$

i) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}} =$ $\quad$ **j)** $\sqrt[4]{-\dfrac{81}{16}} =$ $\quad$ **k)** $\sqrt[5]{3^{15}} =$ $\quad$ **l)** $\sqrt[3]{0{,}064} =$

m) $\sqrt{0{,}\widehat{1}} =$ $\quad$ **n)** $\sqrt{2{,}25} =$ $\quad$ **o)** $\sqrt{2{,}\widehat{7}} =$

4. Hallar el valor de **k** en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k}=2$ *(Soluc: k=8)*

b) $\sqrt[k]{-243}=-3$ *(Soluc: k=5)*

c) $\sqrt[5]{k}=\dfrac{2}{3}$ *(Soluc: k=32/243)*

d) $\sqrt[k]{1{,}331}=1{,}1$ *(Soluc: k=3)*

POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO:

5. Utilizar la calculadora para hallar, con tres cifras decimales bien aproximadas:

a) $\sqrt[4]{8}\cong\boxed{1{,}682}$ **b)** $\sqrt[5]{9}$ **c)** $\sqrt[6]{25}$ **d)** $\sqrt[3]{10}$

e) $\sqrt[5]{-15}$ **f)** $\sqrt[6]{-40}$ **g)** $\sqrt[4]{2^3}$ **h)** $\sqrt[5]{3^2}$

i) $\sqrt[6]{5^2}$ **j)** $\sqrt[8]{256}$ **k)** $\sqrt[3]{64}$

6. Hallar $\sqrt[3]{3}$ con cuatro cifras decimales bien aproximadas, razonando el error cometido.

7. Pasar a forma de raíz las siguientes potencias, y a continuación calcular (**no vale utilizar la calculadora**):

a) $4^{1/2}=\sqrt{4}=\boxed{2}$ **b)** $125^{1/3}$ **c)** $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ **e)** $64^{5/6}$ **f)** $81^{3/4}$

g) $8^{-2/3}$ **h)** $27^{-1/3}$

☞ *Ejercicios libro: pág. 13: 11 (pasar a raíz); pág. 13: 10; pág. 23: 51 (pasar a potencia de exponente fraccionario)*

RADICALES EQUIVALENTES. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES:

8. Simplificar los siguientes radicales, y comprobar el resultado con la calculadora cuando proceda:

a) $\sqrt[4]{3^2}=\sqrt[4/2]{3^{2/2}}=\boxed{\sqrt{3}}$ **b)** $\sqrt[8]{5^4}$ **c)** $\sqrt[9]{27}$ **d)** $\sqrt[5]{1024}$

e) $\sqrt[6]{8}$ **f)** $\sqrt[9]{64}$ **g)** $\sqrt[8]{81}$ **h)** $\sqrt[12]{x^9}$

i) $\sqrt[12]{x^8}$ **j)** $\sqrt[5]{x^{10}}$ **k)** $\sqrt[6]{a^2b^4}$ **l)** $\sqrt[10]{a^4b^6}$

m) $\sqrt[6]{5^3}$ **n)** $\sqrt[15]{2^{12}}$ **o)** $\sqrt[10]{a^8}$ **p)** $\sqrt[12]{x^4y^8z^4}$

q) $\sqrt[8]{(x^2y^2)^2}$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 13: 12; pág. 23: 47***

9. Decir si los siguientes radicales son equivalentes (y comprobar después con la calculadora):

a) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[8]{625}$ *(Soluc: NO)*

b) $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{243}$ *(Soluc: SÍ)*

c) $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[8]{16}$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 13: 13; pág. 23: 46***

10. Reducir los siguientes radicales a índice común y ordenarlos de menor a mayor (y comprobar el resultado con la calculadora):

a) $\sqrt{5}$, $\sqrt[5]{2^3}$, $\sqrt[15]{7^2}$

b) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[5]{7^3}$, $\sqrt[15]{3^2}$

c) $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{16}$, $\sqrt[15]{9}$

d) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[5]{27}$

e) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[6]{6}$

f) $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[4]{125}$, $\sqrt[6]{243}$

g) $\sqrt[4]{31}$ y $\sqrt[3]{13}$

h) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132650}$

i) $\sqrt[3]{-10}$ y $\sqrt[4]{8}$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 14: 16; pág. 23: 45***

OPERACIONES CON RADICALES:

11. Multiplicar los siguientes radicales de igual índice, y simplificar cuando sea posible:

a) $\sqrt{2}\,\sqrt{32}=\sqrt{64}=\boxed{8}$

b) $\sqrt{2}\,\sqrt{15}$

c) $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt{2}\,\sqrt{8}$

e) $\sqrt{3}\,\sqrt{4}$

f) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{5}$

g) $\sqrt{12}\,\sqrt{6}\,\sqrt{50}$

h) $\sqrt{21}\,\sqrt{7}$

i) $4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{27}$ $(Sol: 72)$

12. Multiplicar los siguientes radicales de distinto índice, reduciendo previamente a índice común, y simplificar:

a) $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{32}=\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2^5}=\sqrt[6]{2^3}\,\sqrt[6]{2^{10}}=\boxed{\sqrt[6]{2^{13}}}$

b) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[4]{8}$ $\left(Sol: \sqrt[12]{2^{13}}\right)$

c) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[5]{2}$ $\left(Sol: \sqrt[15]{2^{8}}\right)$

d) $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[6]{3}$ $\left(Sol: \sqrt[6]{3^{5}}\right)$

e) $\sqrt[3]{2^2}\,\sqrt[4]{2}$ $\left(Sol: \sqrt[12]{2^{11}}\right)$

f) $\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[6]{a^5}$ $\left(Sol: \sqrt[12]{a^{19}}\right)$

g) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt[4]{8}$ $\left(Sol: \sqrt[12]{2^{13}3^{6}}\right)$

h) $\sqrt[4]{8}\,\sqrt[3]{4}\,\sqrt{a^3}$ $\left(Sol: \sqrt[12]{2^{17}a^{18}}\right)$

13. Simplificar, aplicando convenientemente las propiedades de las raíces:

a) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}=\sqrt{16}=\boxed{4}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{9}}$

d) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

g) $\sqrt{\frac{256}{729}}$ *(Sol : 16/27)*

h) $\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{7}}$ *(Sol : $\sqrt{3}/2$)*

i) $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{3}}$ *(Sol : $\sqrt{11}$)*

j) $\sqrt[3]{\frac{125}{512}}$

k) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$

l) $\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$ *(Sol : 1/ $\sqrt{2}$)*

m) $\sqrt{\frac{154}{9}+23}-\sqrt{4\frac{144}{9}}$ *(Sol : -5/3)*

n) $\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ *(Sol : 3)*

14. ¿Cómo podríamos comprobar rápidamente que $\frac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$? (no vale calculadora)

(Sol: multiplicando en cruz)

15. Operar los siguientes radicales de distinto índice, reduciendo previamente a índice común:

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{2^6}}{\sqrt[4]{2}}=\boxed{\sqrt[4]{2^5}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$ *(Sol : $\sqrt{3}$)*

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{32}}$ *(Sol : $\frac{1}{\sqrt[6]{2^7}}$)*

d) $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}}$ *(Sol : 1)*

e) $\frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt{7}}$ *(Sol : $\sqrt[6]{7}$)*

f) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt[3]{9}\right)$

g) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt[10]{8}\right)$

h) $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{ab}}$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt[6]{ab}\right)$

i) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}}$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}}\right)$

j) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ $\quad$ $\left(Sol: 1/\sqrt[6]{a}\right)$

k) $\dfrac{\sqrt[3]{-2000}}{3\sqrt{2}}$ $\quad$ $\left(Sol: -10\right)$

l) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\ \sqrt{3}}{\sqrt[6]{12}}$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt[3]{6}\right)$

m) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{4}\ \sqrt{2}}$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt[8]{\dfrac{1}{2^5}}\right)$

n) $\dfrac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{125}}{\sqrt[4]{25}} =$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt[3]{625}\right)$

o) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[12]{2}}{\sqrt[12]{18}} =$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt[3]{6}\right)$

p) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[12]{2}}{\sqrt[4]{2}} =$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt{6}\right)$

q) $\dfrac{\sqrt[6]{54}\cdot\sqrt[12]{27}}{\sqrt[12]{4}\cdot\sqrt[4]{12}} =$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt{3/2}\right)$

r) $\dfrac{\sqrt[4]{abc^2}\cdot\sqrt[12]{a^3b^5c^2}}{\sqrt[6]{a^2b^2c}} =$ $\quad$ $\left(Sol: \sqrt[6]{ab^2c^3}\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 15: 18***

16. Simplificar:

a) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6 = \sqrt[3]{a^{12}} = a^{12/3} = \boxed{a^4}$

b) $\left(\sqrt[6]{ab^2}\right)^2 =$ $\left(Sol : \sqrt[3]{ab^2}\right)$

c) $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{x} =$ $\left(Sol : \sqrt[6]{x^{11}}\right)$

d) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2} =$ $\left(Sol : \sqrt[6]{2^5}\right)$

e) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^3} =$ $\left(Sol : \sqrt[12]{2^{13}}\right)$

f) $\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 =$ $\left(Sol : \sqrt[12]{2^{23}}\right)$

g) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^5}{\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt[3]{3}\right)^4} =$ $\left(Sol : \dfrac{1}{\sqrt[12]{3^{13}}}\right)$

h) $\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{2}\sqrt[3]{4}\right)^3 =$ $\left(Sol : \sqrt[4]{2^{13}}\right)$

i) $\sqrt{\sqrt{2^6}} =$ $\left(Sol : \sqrt{8}\right)$

j) $\sqrt{\sqrt{12}} =$ $\left(Sol : \sqrt[4]{12}\right)$

k) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 =$ $(Sol : 2)$

l) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5x^7}} =$ $(Sol : x)$

m) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{15}}} =$ $\left(Sol : \sqrt[4]{x^5}\right)$

n) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{\sqrt{8x^3}}}\right)^7 =$ $\left(Sol : \sqrt{2x}\right)$

o) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}}\right)^5\left(\sqrt[4]{5}\right)^3 =$ $\left(Sol : \sqrt[12]{5^{19}}\right)$

p) $\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}\right)^6} =$ $\left(Sol: x\right)$

q) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[4]{8}\right)^3}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}} =$ $\left(Sol: \sqrt[12]{2^{35}}\right)$

r) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \left(\sqrt{a^3}\right)^3}{\left(\sqrt{a}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{a^4}} =$ $\left(Sol: a^2\right)$

s) $\dfrac{\left(\sqrt{27}\right)^3 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{81} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3} =$ $\left(Sol: 9\right)$

17. Introducir convenientemente factores y simplificar:

a) $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^3} = \boxed{\sqrt{8}}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\left(Sol: \sqrt{6}\right)$

d) $3\sqrt{2}$

e) $3\sqrt{\dfrac{2}{27}}$ $\left(Sol: \sqrt{2/3}\right)$

f) $3\sqrt[3]{3}$

g) $6\sqrt{\dfrac{5}{12}}$ $\left(Sol: \sqrt{15}\right)$

h) $3\sqrt[4]{5}$

i) $ab\sqrt{\dfrac{c}{ab^3}}$ $\left(Sol: \sqrt{\dfrac{ac}{b}}\right)$

j) $3\sqrt{7}$

k) $2a\sqrt{\dfrac{3c}{2a}}$ $\left(Sol: \sqrt{6ac}\right)$

l) $\sqrt{x\sqrt{x}} =$ $\left(Sol: \sqrt[4]{x^3}\right)$

m) $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}=$ $\left(Sol:\sqrt[3]{4}\right)$

n) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=$ $\left(Sol:\sqrt[8]{2^7}\right)$

o) $\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}=$

p) $\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{2}=$ $(Sol:2)$

q) $\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}=$

$\left(Sol:\sqrt{2}\right)$

r) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}\,\sqrt{2}}\right)^3=$

$(Sol:4)$

s) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\,\sqrt[3]{3}}=$

$(Sol:3)$

t) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{3}}\right)^2=$

$\left(Sol:\sqrt[18]{3^{13}}\right)$

u) $\dfrac{\sqrt[3]{81}\,\left(\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\,\sqrt{\sqrt[3]{9}}}=$

$(Sol:9)$

v) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\,\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\,\sqrt[4]{8}}=$

$\left(Sol:\sqrt{2}\right)$

w) $\dfrac{\left(\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\right)^3}{\sqrt{2\sqrt{2}}\,\sqrt[4]{2}}=$

$(Sol:2)$

x) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}}=$

$\left(Sol:\sqrt[6]{x/y}\right)$

y) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2}{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}}=$

$\left(Sol: \sqrt[12]{a^8 b}\right)$

z) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{3}\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}=$

$\left(Sol: \sqrt[6]{3^{11}}\right)$

α) $\dfrac{\sqrt{125}\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{\sqrt{5\sqrt[3]{25}}}=$

$\left(Sol: \sqrt[3]{5^4}\right)$

β) $\sqrt{ab\sqrt{8ab\sqrt{4a^2b^2}}}=$

$\left(Sol: 2ab\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 14: 15; pág. 23: 48*** *(sencillos);* ***pág. 15: 19; pág. 23: 50*** *(más elaborados)*

18. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas, y comprobar que se obtiene el mismo resultado:

- operando, teniendo en cuenta las propiedades de las raíces
- pasando a potencia de exponente fraccionario, y aplicando a continuación las propiedades de las potencias.

a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}=$

$\left(Sol: \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}}=$

$\left(Sol: \dfrac{1}{\sqrt[6]{a^5}}\right)$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}\,\dfrac{a^3}{\sqrt{a}} =$

$\left(Sol: \sqrt[6]{a^7}\right)$

d) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} =$

$\left(Sol: \sqrt[4]{8}\right)$

19. Extraer factores y simplificar cuando proceda:

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2\,2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{18}$

c) $\sqrt{98}$

d) $\sqrt{32}$

e) $\sqrt{60}$

f) $\sqrt{72}$

g) $\sqrt{128}$

h) $\sqrt{162}$

i) $\sqrt{200}$

j) $\sqrt{12}$

k) $\sqrt{27}$

l) $\sqrt{48}$

m) $\sqrt{75}$

n) $\sqrt{108}$

o) $\sqrt[3]{3^4 5^5}$

$\left(Sol: 15\,\sqrt[3]{75}\right)$

p) $\sqrt[4]{80}$

$\left(Sol: 2\,\sqrt[4]{5}\right)$

q) $\sqrt[3]{2592}$

$\left(Sol: 6\,\sqrt[3]{12}\right)$

r) $\sqrt[5]{279936}$

$\left(Sol: 6\,\sqrt[5]{36}\right)$

s) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10}$

$\left(Sol: 4\sqrt{2}\right)$

t) $\sqrt[3]{500}$

$\left(Sol: 5\,\sqrt[3]{4}\right)$

u) $\sqrt[3]{32x^4}$ $\left(Sol: 2x\,\sqrt[3]{4x}\right)$

v) $\sqrt{1936}$ $\left(Sol: 44\right)$

w) $\sqrt{3{,}24}$ $\left(Sol: 1{,}8\right)$

x) $\sqrt{529}$ $\left(Sol: 23\right)$

y) $\sqrt{676}$ $\left(Sol: 26\right)$

z) $\sqrt[3]{128a^2b^7}$

$\left(Sol: 4b^2\,\sqrt[3]{2a^2b}\right)$

α) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$

$\left(Sol: 3ab\,\sqrt[3]{3b^2c}\right)$

β) $\sqrt[5]{64}$ $\left(Sol: 2\sqrt[5]{2}\right)$

γ) $\sqrt[3]{16x^6}$

δ) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}}$

$\left(Sol: \dfrac{2x^2}{5y}\sqrt{\dfrac{7x}{3y}}\right)$

ε) $\dfrac{11\sqrt{132}}{132}$

$\left(Sol: \sqrt{33}/6\right)$

ζ) $\dfrac{\sqrt{396}}{66}$

$\left(Sol: \sqrt{11}/11\right)$

η) $\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}}$ $\left(Sol: \dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)$

ϑ) $\dfrac{\sqrt{11}\sqrt{132}}{132}$

$\left(Sol: \sqrt{3}/6\right)$

ι) $\sqrt{25+\dfrac{25}{4}}$

$\left(Sol: 5\sqrt{5}/2\right)$

κ) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{50} =$

$\left(Sol: 30\sqrt{2}\right)$

λ) $5\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\sqrt[3]{\dfrac{4}{81}} =$

$\left(Sol: \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{2}\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 14: 14; pág. 23: 49 y 52 a, b, c, d, e, h***

20. Sumar los siguientes radicales, reduciéndolos previamente a radicales semejantes (Fíjate en el 1er ejemplo):

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32} = \sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{3^2 2}-\sqrt{2^5} = \sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2^2\sqrt{2} = \sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

FACTORIZAMOS RADICANDOS — EXTRAEMOS FACTORES — SUMAMOS RADICALES SEMEJANTES

b) $\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}$ *(Soluc: $6\sqrt{5}$)*

c) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}$ *(Soluc: $6\sqrt{6}$)*

d) $\sqrt[3]{54}-2\cdot\sqrt[3]{16}$ *(Soluc: $-\sqrt[3]{2}$)*

e) $27\sqrt{3}-5\sqrt{27}-9\sqrt{12}$ *(Soluc: $-6\sqrt{3}$)*

f) $\sqrt{75}-\sqrt{20}-\sqrt{12}+\sqrt{45}$ *(Soluc: $3\sqrt{3}+\sqrt{5}$)*

g) $2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}$ *(Soluc: $8\sqrt{2}$)*

h) $5\sqrt[6]{256}-2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{128}=$ *(Soluc: $2\sqrt[3]{2}$)*

i) $\sqrt{32}+2\sqrt{3}-\sqrt{8}+\sqrt{2}-2\sqrt{12}$ *(Soluc: $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$)*

j) $3\sqrt{24}-\frac{1}{3}\sqrt{54}+\sqrt{150}$ *(Soluc: $10\sqrt{6}$)*

k) $5\sqrt{2}+4\sqrt{8}+3\sqrt{18}+2\sqrt{32}+\sqrt{50}$ *(Soluc: $35\sqrt{2}$)*

l) $\sqrt{20}-\frac{1}{5}\sqrt{5}+\sqrt{45}$ *(Soluc: $\frac{24}{5}\sqrt{5}$)*

m) $2\sqrt{108}-\sqrt{75}-\sqrt{27}-\sqrt{12}-\sqrt{3}$ *(Soluc: $\sqrt{3}$)*

n) $\sqrt{128}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}-3\sqrt{27}-\sqrt{2}=$ *(Soluc: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$)*

o) $\sqrt{5}+\sqrt{\frac{45}{4}}$ *(Soluc: $\frac{5}{2}\sqrt{5}$)*

p) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{18}{75}}$ *(Soluc: $\frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$)*

q) $\sqrt{\frac{1}{2}}+3\sqrt{\frac{1}{8}}$ *(Soluc: $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$)*

r) $\sqrt{\frac{3}{16}}-4\sqrt{12}$ *(Soluc: $-\frac{31}{4}\sqrt{3}$)*

s) $\sqrt{\frac{5}{12}}-\sqrt{\frac{10}{6}}$ *(Soluc: $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$)*

t) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ *(Soluc: $2\sqrt{2a}$)*

u) $5\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}-\sqrt{300}=$

(Soluc: $-\frac{17}{2}\sqrt{3}$)

v) $\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{27}}{3}+\frac{5\sqrt{243}}{9}$

(Soluc: $4\sqrt{3}$)

w) $6\sqrt[6]{4}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{16}-3\sqrt[9]{8}+5\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=$

(Soluc: $4\sqrt[3]{2}$)

x) $2\sqrt[4]{\frac{2}{81}}-\sqrt[8]{4}+2\sqrt[4]{32}=$

(Soluc: $\frac{11}{3}\sqrt[4]{2}$)

y) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=$

(Soluc: $\sqrt[3]{2}$)

z) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{40}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{5}+\frac{5}{2}\sqrt[3]{320}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{1080}+\sqrt[3]{\frac{135}{8}}=$

(Soluc: $4\sqrt[3]{5}$)

α) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{\frac{3}{8}}=$

(Soluc: $2\sqrt[3]{3}$)

β) $\sqrt{9x+9}-\sqrt{4x+4}$ *(Soluc: $\sqrt{x+1}$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 15: 17; pág. 23: 52 f, g***

RECORDAR LAS IGUALDADES NOTABLES:

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$
$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$$
$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

21. Calcular, dando el resultado lo más simplificado posible:

a) $\left(2\sqrt{2}\right)^2=$ *(Soluc: 8)*

b) $\left(3\sqrt{5}\right)^2=$ *(Soluc: 45)*

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 =$ *(Soluc: $3+2\sqrt{2}$)*

d) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 =$ *(Soluc: $5+2\sqrt{6}$)*

e) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 =$ *(Soluc: $5-2\sqrt{6}$)*

f) $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=$ *(Soluc: 1)*

g) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$ *(Soluc: 1)*

h) $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{8}\right)=$ *(Soluc: $-3-\sqrt{2}$)*

i) $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{12}\right)=$

(Soluc: $-4+3\sqrt{3}$)

j) $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} =$ *(Soluc: $6\sqrt{6}$)*

k) $2\sqrt{8}\cdot 8\sqrt{2} =$ *(Soluc: 64)*

l) $3\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3} =$ *(Soluc: $18\sqrt{2}$)*

m) $2\sqrt{15}\cdot 3\sqrt{15} =$ *(Soluc: 90)*

n) $\left(5\sqrt{3}\right)^2 =$ *(Soluc: 75)*

o) $\left(5+\sqrt{3}\right)^2 =$ *(Soluc: $28+10\sqrt{3}$)*

p) $\left(5-\sqrt{3}\right)^2 =$ *(Soluc: $28-10\sqrt{3}$)*

q) $\left(5+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)=$ *(Soluc: 22)*

r) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2 =$ *(Soluc: $8+2\sqrt{15}$)*

s) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2 =$ *(Soluc: $8-2\sqrt{15}$)*

t) $\left(2\sqrt{3}+5\right)^2 =$ *(Soluc: $37+20\sqrt{3}$)*

u) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2=$ *(Soluc: $30+12\sqrt{6}$)*

v) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)=$ *(Soluc: -6)*

w) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-4\right)=$ *(Soluc: $2-4\sqrt{2}$)*

x) $\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}=$ *(Soluc: $2\sqrt{3}-3$)*

y) $\left(3\sqrt{2}+2\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=$

(Soluc: $4\sqrt{6}-2\sqrt{3}$)

z) $\left(2\sqrt{5}-5\right)\sqrt{5}=$ *(Soluc: $10-5\sqrt{5}$)*

α) $\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)=$

(Soluc: $-43+2\sqrt{6}$)

β) $\left(2\sqrt{8}+3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right)=$

(Soluc: 56)

γ) $\left(2\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)=$ *(Soluc: -30)*

δ) $\left(2\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}+2\right)=$

(Soluc: $-30+6\sqrt{10}+4\sqrt{5}-10\sqrt{2}$)

ε) $\left(2\sqrt{27}-3\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=$

(Soluc: $1+3\sqrt{3}$)

ζ) $\left(3\sqrt{8}-4\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-5\sqrt{8}\right)=$

(Soluc: -32)

η) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2=$

(Soluc: 22)

θ) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2\left(5-\sqrt{21}\right)=$

ι) $\left(3\sqrt{8}+2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{8}-3\sqrt{2}\right)=$

(Soluc: 16)

κ) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2=$ *(Soluc: $30-12\sqrt{6}$)*

λ) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$

RACIONALIZACIÓN:

22. Racionalizar denominadores, y simplificar:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ *(Soluc: $\frac{\sqrt{5}}{5}$)*

b) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ *(Soluc: $\frac{5\sqrt{3}}{6}$)*

c) $\frac{5}{3\sqrt{5}}$ *(Soluc: $\frac{\sqrt{5}}{3}$)*

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ *(Soluc: $\frac{\sqrt{6}}{3}$)*

e) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ *(Soluc: $\frac{\sqrt{6}}{2}$)*

f) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ *(Soluc: $\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7}$)*

g) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ *(Soluc: $\sqrt{2}+1$)*

h) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ *(Soluc: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$)*

i) $\frac{1}{\sqrt{27}}=$ *(Soluc: $\frac{\sqrt{3}}{9}$)*

j) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ (*Soluc:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

k) $\frac{12}{\sqrt{8}} =$ (*Soluc:* $3\sqrt{2}$)

l) $\frac{\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}} =$ (*Soluc:* $\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$)

m) $\frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ (*Soluc:* $\frac{3\sqrt{15}}{2}$)

n) $\frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}} =$ (*Soluc:* $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$)

o) $\frac{-2\sqrt{7}}{7\sqrt{2}}$ (*Soluc:* $-\frac{\sqrt{14}}{7}$)

p) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$ (*Soluc:* $\frac{\sqrt{33}}{6}$)

q) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$ (*Soluc:* $\frac{\sqrt{2}}{4}$)

r) $\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1}{\sqrt{2}}$ (*Soluc:* $2+2\sqrt{2}$)

s) $\frac{1-\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}}$ (*Soluc:* $2-\sqrt{2}$)

t) $\frac{\sqrt{81+\frac{81}{4}}}{\sqrt{5}}$ (*Soluc:* $\frac{9}{2}$)

u) $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{125}}$ (*Soluc:* $\frac{8\sqrt{5}}{25}$)

v) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$ (*Soluc:* $\frac{\sqrt{3}}{9}$)

w) $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$ *)*

x) $\dfrac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *)*

y) $\dfrac{3\sqrt{10}}{5\sqrt{6}}$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ *)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 23: 53***

23. Racionalizar denominadores, y simplificar:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ *)*

b) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{9}}$ *(Soluc:* $\sqrt[5]{27}$ *)*

c) $\dfrac{8}{\sqrt[6]{8}}$ *(Soluc:* $4\sqrt{2}$ *)*

d) $\dfrac{10}{3\sqrt[4]{125}}$ *(Soluc:* $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{5}$ *)*

e) $\dfrac{\sqrt[5]{25}}{5\sqrt[3]{5}}$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt[15]{5}}{5}$ *)*

f) $\dfrac{10}{\sqrt[5]{128}} =$ *(Soluc:* $\dfrac{5}{2}\sqrt[5]{8}$ *)*

g) $\dfrac{\sqrt{3}}{5\sqrt[5]{27}}$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt[10]{3^9}}{15}$ *)*

h) $\dfrac{3\sqrt[5]{9}}{2\sqrt[3]{243}}$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt[15]{3^{11}}}{6}$ *)*

i) $\dfrac{5\sqrt{15}}{\sqrt[3]{15}}$ *(Soluc:* $5\sqrt[6]{15}$ *)*

j) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$ *(Soluc:* $\sqrt[10]{3}$ *)*

k) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}}$ *(Soluc:* $\sqrt[10]{8}$ *)*

l) $\dfrac{3}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$ *(Soluc:* $\sqrt[6]{243}$ *)*

m) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{64}}$ *(Soluc:* $\sqrt{2}$ *)*

n) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}+\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$ *(Soluc:* $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ *)*

24. Racionalizar denominadores, y simplificar:

a) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$ *(Soluc:* $-\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$ *)*

b) $\dfrac{9}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ *(Soluc:* $\dfrac{9}{4}\sqrt{7}+\dfrac{9}{4}\sqrt{3}$ *)*

c) $\dfrac{4(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}-1}$ *(Soluc:* $7+3\sqrt{5}$ *)*

d) $\dfrac{3(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2}$ *(Soluc:* $5-\sqrt{7}$ *)*

e) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ *(Soluc:* $2+\sqrt{3}$ *)*

f) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ *(Soluc:* $2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ *)*

g) $\dfrac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ *(Soluc:* $-13+6\sqrt{3}$ *)*

h) $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6+\sqrt{6}}=$ *(Soluc: $\frac{4}{5}\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{3}$)*

i) $\dfrac{7}{7-\sqrt{7}}$ *(Soluc: $\frac{7}{6}+\frac{\sqrt{7}}{6}$)*

j) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ *(Soluc: $4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$)*

k) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}-2}$ *(Soluc: $\frac{4}{7}+\frac{5}{14}\sqrt{2}$)*

l) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ *(Soluc: $3-\sqrt{6}$)*

m) $\dfrac{7}{\sqrt{8}-2}$ *(Soluc: $\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{2}$)*

n) $\dfrac{2\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}-2}=$ *(Soluc: $4+\sqrt{3}$)*

o) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ *(Soluc: $-2-\sqrt{3}$)*

p) $\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$ *(Soluc: $\frac{16}{17}+\frac{5}{17}\sqrt{15}$)*

q) $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}+4}=$ *(Soluc: $17-12\sqrt{2}$)*

r) $\dfrac{2\sqrt{8}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{8}+3\sqrt{2}}=$ *(Soluc: 1/7)*

s) $\dfrac{12 - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3} =$ *(Soluc: $2+3\sqrt{3}$)*

t) $\dfrac{\left(\sqrt{2+\sqrt{8}}\right)^2}{2-\sqrt{2}} =$ *(Soluc: $4+3\sqrt{2}$)*

u) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$ *(Soluc: $4+\sqrt{15}$)*

v) $\dfrac{3\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}-2} =$ *(Soluc: $7+2\sqrt{5}$)*

w) $\dfrac{24 - 13\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} =$ *(Soluc: $-2+3\sqrt{3}$)*

x) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

y) $\dfrac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt{6}-2} =$ *(Soluc: $1+\sqrt{6}$)*

z) $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2+\sqrt{2}} =$ *(Soluc: $4-3\sqrt{2}$)*

α) $\dfrac{-\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}} =$ *(Soluc: $2+\sqrt{3}$)*

β) $\dfrac{9+4\sqrt{3}}{3\left(4-\sqrt{3}\right)} =$ *(Soluc: $\dfrac{48+25\sqrt{3}}{39}$)*

γ) $\dfrac{\sqrt{2}+4}{2-\sqrt{2}}=$ *(Soluc: $3\sqrt{2}+5$)*

δ) $\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}=$ *(Soluc: $\frac{3}{2}\sqrt{x}$)*

ε) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}+\dfrac{12}{\sqrt{3}}=$ *(Soluc: 7)*

ζ) $\dfrac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}-\dfrac{9}{\sqrt{3}}=$ *(Soluc: 2)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 23: 54*** *(expresión binomial radical en el denom.);* ***pág. 16: 20; pág. 23: 55 y 56*** *(los tres casos)*

25. ¿V o F? Razonar **<u>algebraicamente</u>** la respuesta:

a) $\dfrac{\cancel{5}+\sqrt{3}}{\cancel{5}}=1+\sqrt{3}$ *(Soluc: F)*

b) $\dfrac{\cancel{5}+\sqrt{3}}{\cancel{5}}=\sqrt{3}$ *(Soluc: F)*

c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *(Soluc: V)*

d) $\dfrac{\cancel{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\cancel{5}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *(Soluc: F)*

e) $\dfrac{3+6\sqrt{2}}{3}=1+2\sqrt{2}$ *(Soluc: V)*

f) $\dfrac{4+14\sqrt{5}}{6}=\dfrac{2+7\sqrt{5}}{3}$ *(Soluc: V)*

g) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=2+3=5$ *(Soluc: F)*

h) $\sqrt{16+9}=4+3=7$ *(Soluc: F)*

Operaciones con radicales. Racionalización

Una **raíz** o **radical** es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, que se lee raíz enésima de a, definido como:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a}$$

El número real a se llama **radicando,** y el natural $n \geq 2$ **índice.** Para $a \geq 0$ y $b \geq 0$:

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}} \quad \boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},} \ \text{si} \ b \neq 0 \quad \boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}} \quad \boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}} \quad \boxed{\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}}$$

La potencia de exponente fraccionario se define como $\boxed{a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.}$

Ejercicios resueltos

① **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

a) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

d) $\sqrt[3]{(a^2)^2}\sqrt{a}$

e) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt[3]{2}\sqrt{6}}}{\sqrt[4]{6}\sqrt{2}}$

f) $\dfrac{\left(a\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}}$

g) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4a}\sqrt[6]{2a}}}{\sqrt[3]{2a^2}}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{ab}}$

i) $\sqrt[4]{144} + 3\sqrt{27} - \sqrt{48}$

j) $5\sqrt[6]{256} - 3\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128}$

a) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2^2 2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^3\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{2^6 2}} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[3]{(a^2)^2}\,\sqrt{a} = \sqrt[3]{a^4}\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^8}\,\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a^{11}} = a\sqrt[6]{a^5}$

e) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt[3]{2}\sqrt{6}}}{\sqrt[4]{6}\sqrt{2}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^6 2^4 (2 \cdot 3)^6}{(2 \cdot 3)^3 2^6}} = \sqrt[12]{2 \cdot 3^9}$

f) $\dfrac{\left(a\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}} = \dfrac{(a \cdot a^{1/2})^3}{a^{1/3}a^{1/6}} = \dfrac{(a^{3/2})^3}{a^{3/6}} = \dfrac{a^{9/2}}{a^{1/2}} = a^4$

g) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4a}\sqrt[6]{2a}}}{\sqrt[3]{2a^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^3(2^2a)^2 2a}{(2a^2)^2}} = \sqrt[6]{2^6a^{-1}} = \dfrac{2}{\sqrt[6]{a}}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{ab}} = \sqrt[12]{\dfrac{(ab)^4(ab)^3}{(ab)^6}} = \sqrt[12]{ab}$

i) $\sqrt[4]{144} + 3\sqrt{27} - \sqrt{48} = \sqrt[4]{2^4 3^2} + 3\sqrt{3^3} - \sqrt{2^4 3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

j) $5\sqrt[6]{256} - 3\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128} = 5\sqrt[6]{2^8} - 3\sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{2^7} = 10\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 0$

Si $a \geq 0$, $b \geq 0$ entonces:

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{a^{mn+p}} = a^m\sqrt[n]{a^p}$$
$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Antes de multiplicar o dividir radicales, hay que reducirlos a un mismo índice (el mínimo común múltiplo de los índices).

Al multiplicar o dividir radicales, se pueden pasar a potencias de exponente fraccionario, y operar con las propiedades de las potencias (véase el ejercicio 1.f).

Solo se pueden sumar los radicales semejantes, es decir, los que se pueden reducir a un mismo radical.

2 **Racionaliza las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{-3}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{-1}{\sqrt[3]{ab^2}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}$ e) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{-3}{\sqrt{5}}=\dfrac{-3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\dfrac{-3\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{-1}{\sqrt[3]{ab^2}}=\dfrac{-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{ab^2}\sqrt[3]{a^2b}}=\dfrac{-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^3b^3}}=\dfrac{-\sqrt[3]{a^2b}}{ab}$

Para racionalizar un cociente con $\sqrt[n]{a^p}$, $p < n$, en el denominador, se multiplican numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-p}}$.

c) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

d) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}=\dfrac{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-3)}{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{5-9}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Para racionalizar un cociente con $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ en el denominador, se multiplican numerador y denominador por su expresión conjugada.

e) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{(1-\sqrt{3})[(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}]}{[(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}][(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}]}=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{6}+3}{(1-\sqrt{2})^2-3}=$

$=\dfrac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1-2\sqrt{2}+2-3}=\dfrac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{-2\sqrt{2}}=\dfrac{(4-\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6})\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{4\sqrt{2}-2-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{-4}=\dfrac{1+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$

Ejercicios propuestos

3 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{48}}}{\sqrt[3]{12}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[6]{2}}$ e) $\dfrac{\sqrt{ab\sqrt[3]{a^2b}}}{\sqrt[6]{ab^5}}$ g) $\sqrt{125}-2\sqrt[4]{400}+\sqrt[6]{8\,000}$

b) $\sqrt{a\sqrt[3]{2a\sqrt[4]{4a^3}}}$ d) $(\sqrt[6]{a})^5(\sqrt{a})^3\sqrt[3]{a^2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt[3]{6\sqrt[4]{12}}}}{\sqrt[6]{18\sqrt[3]{4}}}$ h) $\sqrt[6]{576}+\sqrt[3]{375}-2\sqrt[6]{6\,561}$

[*Solución:* a) 2; b) $a\sqrt[12]{2^{10}a^7}$; c) $\sqrt[3]{4}$; d) a^3; e) a; f) $\sqrt[4]{27}$; g) $3\sqrt{5}$; h) $\sqrt[3]{3}$.]

4 **Racionaliza las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{8}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

[*Solución:* a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $2\sqrt[5]{4}$; c) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; d) $4+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.]

5 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

a) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[6]{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt[4]{2\sqrt[3]{x}}}$ (Soluc: $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[12]{8x^2}$)

6 **Racionaliza las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ (Soluc: $\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{25}}{5}$; $2\sqrt{14}-7$)

85 EJERCICIOS de ECUACIONES y SISTEMAS de 1^er^ y 2º GRADO

1. Resolver las siguientes **ecuaciones de 1er grado** y comprobar la solución:

a) $5[2x-4(3x+1)]=-10x+20$ *(Soluc: x= -1)*

b) $x-13=4[3x-4(x-2)]$ *(Soluc: x=9)*

c) $3[6x-5(x-3)]=15-3(x-5)$ *(Soluc: x= -5/2)*

d) $2x+3(x-3)=6[2x-3(x-5)]$ *(Soluc: x=9)*

e) $5(x-3)-2(x-1)=3x-13$ *(Soluc: se verifica $\forall x \in IR$, pues es una identidad)*

f) $x+4[3-2(x-1)]=5[x-3(2x-4)]+1$ *(Soluc: x=41/18)*

g) $3-2x+4[3+5(x+1)]=10x-7$ *(Soluc: x=-21/4)*

h) $8x-6=2[x+3(x-1)]$ *(Soluc: se trata de una identidad)*

☞ *Ejercicios libro: **pág. 51: 3 a; pág. 62: 19 a, b**; 20*

2. Resolver las siguientes **ecuaciones de 1er grado con denominadores** y comprobar la solución:

a) $3-\frac{5x-1}{10}=\frac{x-1}{5}-\frac{x-3}{2}$ *(Soluc: x=9)*

b) $\frac{5-x}{15}-\frac{9}{5}=-x-\frac{1-x}{3}$ *(Soluc: x=17/9)*

c) $\frac{x+8}{6-x}=13$ *(Soluc: x=5)*

d) $\frac{3(x-2)}{4}-\frac{2(x-3)}{3}=\frac{x}{6}-\frac{3x-6}{4}$ *(Soluc: x=3/2)*

e) $\frac{x-2}{3-x}=-\frac{5}{4}$ *(Soluc: x=7)*

f) $x=\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+3\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)+1$ *(Soluc: x=15)*

g) $\frac{1}{3}=\frac{\frac{3}{5}-x}{1+\frac{3}{5}x}$ *(Soluc: x=2/9)*

h) $4-\frac{7-x}{12}=\frac{5x}{3}-\frac{5-3x}{4}$ *(Soluc: x=2)*

i) $x-\frac{12x+1}{3}=2x+1-\frac{15x+4}{3}$ *(Soluc: Se trata de una identidad)*

j) $\frac{2x+1}{3x-6}=\frac{3}{2}$ *(Soluc: x=4)*

k) $\frac{x}{2}-\frac{6-x}{4}=x+1$ *(Soluc: x= -10)*

l) $\frac{1+5x}{4}-\frac{3-x}{6}=1-2x-\frac{8x-2}{9}$ *(Soluc: x=53/155)*

m) $\frac{6x+1}{11}=\frac{2x-3}{7}$ *(Soluc: x= -2)*

n) $x+\frac{3(x-5)}{2}=3+\frac{5x-21}{2}$ *(Soluc: Se trata de una identidad)*

o) $\frac{3(x-3)}{2}+\frac{2x}{3}-2x=\frac{3(2x-1)}{9}-\frac{1}{6}$ *(Soluc: x= -8)*

p) $\frac{1+96\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600}$ *(Soluc: x=20)*

q) $1-\frac{2}{3}(x-3)=2-\frac{1}{4}(3x-4)$ *(Soluc: x=0)*

r) $2-4\left(\frac{2x}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{2}-x$ *(Soluc: x=-1/2)*

s) $5x-3\left(3-\frac{x}{4}\right)=\frac{7x}{2}-3$ *(Soluc: x=8/3)*

t) $5\left(\frac{2x}{3}-\frac{3x}{5}\right)+1=2x-2(x-1)$ *(Soluc: x=3)*

u) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)$

v) $\frac{2x}{3}-5\left(\frac{x}{12}+\frac{1}{4}\right)=3-2\left(1-\frac{x}{6}\right)$

w) $3\left(\frac{11x}{6}-x\right)-4=2x-3\left(1-\frac{x}{6}\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 51: 3 b, c, d; pág. 62: 19 c, d, e***

3. Resolver los siguientes **SS.EE.LL** (cada uno de los tres primeros apartados por los tres métodos habituales, y el resto <u>por reducción</u>), clasificarlos y <u>comprobar la solución</u>:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 4x-y=7 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=1)*

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=12 \\ 3x+y=7 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=3, y=-2)*

c) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=9 \\ 2x+5y=-13 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=-3)*

d) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{2}+2y=10 \\ x-3y=6 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=12 y=2)*

e) $\left.\begin{array}{r} \frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}=1 \\ x+y=4 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=42/13,y=10/13)*

f) $\left.\begin{array}{l} \frac{2(x-4)}{3}+4y=2 \\ \frac{3(y-1)}{2}+3x=6 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=23/11, y=9/11)*

g) $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ -4x-6y=-6 \end{array}\right\}$ *(Sol: ∄ soluc ; incompatible)*

h) $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 6x+9y=15 \end{array}\right\}$ *(Sol: ∞ soluc.; comp .indtdo.)*

i) $\left.\begin{array}{l} \frac{3(x-2)}{4}+\frac{2(y-3)}{5}=\frac{2}{5} \\ \frac{2(y-4)}{3}+\frac{3(x-1)}{2}=\frac{3}{2} \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=4)*

j) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=9 \\ -6x+4y=-18 \end{array}\right\}$ *(Sol: ∞ soluc.; comp. indtdo.)*

k) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=9 \\ 6x-4y=4 \end{array}\right\}$ *(Sol: ∄ soluc ; incompatible)*

l) $\left.\begin{array}{l} \frac{2(x-3)}{5}+\frac{y}{4}=\frac{1}{2} \\ \frac{3(y-2)}{5}+\frac{x}{9}=\frac{1}{3} \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=3, y=2)*

m) $\left.\begin{array}{l} \frac{2(x-5)}{7}+\frac{y-3}{2}=-\frac{1}{3} \\ \frac{3(y-1)}{5}-\frac{x-3}{3}=-1 \end{array}\right\}$ *(Sol: x=474/71,y=293/213)*

n) $\left.\begin{array}{r}\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{3}=\frac{1}{3}\\ \frac{x}{3}+\frac{y+1}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ *(Sol: x=-15/13,y=10/13)*

o) $\left.\begin{array}{r}\frac{3(x-1)}{2}+\frac{2(y-2)}{3}=\frac{13}{6}\\ \frac{3(x+1)}{2}-\frac{2(y+2)}{5}=\frac{5}{2}\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=3)*

p) $\left.\begin{array}{r}x-y+z=6\\ 2x+y-3z=-9\\ -x+2y+z=-2\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=-2; z=3)*

q) $\left.\begin{array}{r}2x+y-z=0\\ x-2y+3z=13\\ -x+y+4z=9\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=-1; z=3)*

r) $\left.\begin{array}{r}-2x+y+z=6\\ 3x-z=-7\\ x-5y+2z=7\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=-1, y=0; z=4)*

☞ *Ejercicios libro: pág. 56: 13; pág. 57: 14 y 15 (tipo 3º ESO);* ***pág. 64: 46 a 49*** *(nivel intermedio)*

4. Inventar, razonadamente, un SS.EE.LL. 2x2 con soluciones x=2, y=-3

5. Inventar, razonadamente, un SS.EE.LL. 2x2 sin solución.

ECUACIÓN DE 2º GRADO:

6. Dadas las siguientes **ecuaciones de 2º grado**, se pide:

i) Resolverlas mediante la fórmula general de la ecuación de 2º grado.
ii) Comprobar las soluciones obtenidas.
iii) Factorizar cada ecuación y comprobar dicha factorización.
iv) Comprobar las relaciones de Cardano-Vieta.

a) $x^2-4x+3=0$
b) $x^2-5x+6=0$
c) $x^2-x-6=0$
d) $x^2-9x+20=0$
e) $x^2+2x+5=0$
f) $2x^2-5x+2=0$
g) $x^2-6x+9=0$
h) $x^2-2x-1=0$
i) $6x^2-13x+6=0$
j) $x^2+x-1=0$

7. Escribir <u>una</u> ecuación de 2º grado que tenga por soluciones:

a) $x_1=4$, $x_2=-6$ *(Soluc: $x^2+2x-24=0$)*
b) $x_1=-3$, $x_2=-5$ *(Soluc: $x^2+8x+15=0$)*
c) $x_1=2$, $x_2=-7$ *(Soluc: $x^2+5x-14=0$)*
d) $x_1=-2/7$, $x_2=7$ *(Soluc: $7x^2-47x-14=0$)*
e) $x_1=-16$, $x_2=9$ *(Soluc: $x^2+7x-144=0$)*
f) $x_1=3/4$, $x_2=-2/5$ *(Soluc: $20x^2-7x-6=0$)*
g) $x=3$ doble *(Soluc: $x^2-6x+9=0$)*
h) $x_1=-4$, $x_2=-1/8$ *(Soluc: $8x^2+33x+4=0$)*
i) $x=\pm 2$ *(Soluc: $x^2-4=0$)*
j) $x=\pm\sqrt{2}$ *(Soluc: $x^2-2=0$)*
j) $x=2/5$ doble *(Soluc: $25x^2-20x+4=0$)*
l) $x=2\pm\sqrt{3}$ *(Soluc: $x^2-4x+1=0$)*
m) $x_1=5$, $x_2=-12$ *(Soluc: $x^2+7x-60=0$)*
n) $x_1=3/10$, $x_2=-4$ *(Soluc: $10x^2+37x-12=0$)*

8. Escribir en cada caso <u>la</u> ecuación de 2º grado que tenga por soluciones 5 y -2 y tal que:

a) el coeficiente de x^2 sea 4 *(Soluc: $4x^2-12x-40=0$)*
b) el coeficiente de x sea 9 *(Soluc: $-3x^2+9x+30=0$)*
c) el término independiente sea -4 *(Soluc: $2/5x^2-6/5x-4=0$)*
d) el coeficiente de x^2 sea 5 *(Soluc: $5x^2-15x-50=0$)*

9. Un alumno indica en un examen que las soluciones de $x^2+4x+3=0$ son 2 y 5. Utilizar las relaciones de Cardano-Vieta para razonar que ello es imposible.

10. Inventar, razonadamente, una ecuación de 2º grado: **a)** Que tenga dos soluciones. **b)** Que tenga una solución. **c)** Que no tenga solución.

11. Hallar el valor de los coeficientes **b** y **c** en la ecuación $7x^2+bx+c=0$ sabiendo que sus soluciones son $x_1=5$ y $x_2=-6$ *(Soluc: b=7, c=-210)*

12. Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $5x^2+bx+6=0$ sabiendo que una de sus soluciones es 1 ¿Cuál es la otra solución? *(Soluc: b=-11; x=6/5)*

13. Calcular el valor de **a** y **b** para que la ecuación $ax^2+bx-1=0$ tenga por soluciones $x_1=3$ y $x_2=-2$ *(Soluc: a=1/6, b=-1/6)*

14. ¿Para qué valores de a la ecuación $x^2-6x+3+a=0$ tiene solución única? *(Soluc: a=-6)*

15. TEORÍA: Justificar la validez de la siguiente fórmula, utilizada por los matemáticos árabes medievales para resolver la ecuación de 2º grado $x^2+c=bx$:

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

16. Hallar el discriminante de cada ecuación y, sin resolverlas, indicar su número de soluciones:

a) $5x^2-3x+1=0$ *(Soluc: ∄ soluc)*

b) $x^2-4x+4=0$ *(Soluc: 1 soluc)*

c) $3x^2-6x-1=0$ *(Soluc: 2 soluc)*

d) $5x^2+3x+1=0$ *(Soluc: ∄ soluc)*

17. Determinar para qué valores de **m** la ecuación $2x^2-5x+m=0$:

a) Tiene dos soluciones distintas. *(Soluc: m<25/8)*

b) Tiene una solución. *(Soluc: m=25/8)*

c) No tiene solución. *(Soluc: m>25/8)*

18. Determinar para qué valores de **b** la ecuación $x^2-bx+25=0$:

a) Tiene dos soluciones distintas. *(Soluc: b<-10 o b>10)*

b) Tiene una solución. *(Soluc: b=±10)*

c) No tiene solución. *(Soluc: -10< b<10)*

19. TEORÍA: a) ¿Qué es el discriminante de una ecuación de 2º grado? ¿Qué indica? Sin llegar a resolverla, ¿cómo podemos saber de antemano que la ecuación x^2+x+1 carece de soluciones?

b) Inventar una ecuación de 2º grado con raíces $x_1=2/3$ y $x_2=2$, y cuyo coeficiente cuadrático sea 3

c) Sin resolver y sin sustituir, ¿cómo podemos asegurar que las soluciones de $x^2+5x-300=0$ son $x_1=15$ y $x_2=-20$?

d) Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $x^2+bx+6=0$ sabiendo que una de las soluciones es 1. Sin necesidad de resolver, ¿cuál es la otra solución?

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 53: 6, 7 y 8; pág. 62: 23, 24 y 30***

20. Resolver las siguientes **ecuaciones de 2º grado incompletas**:

a) $x^2-5x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=5$)*

b) $2x^2-6x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=3$)*

c) $2x^2-18=0$ *(Sol: x=±3)*

d) $5x^2+x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=-1/5$)*

e) $x^2=x$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=2$)*

f) $x^2+x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=-1$)*

g) $4x^2-1=0$ *(Sol: x=±1/2)*

h) $-x^2+12x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=12$)*

i) $x^2-10x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=10$)*

j) $9x^2-4=0$ *(Sol: x=±2/3)*

k) $3x^2-11x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=11/3$)*

l) $x(x+2)=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=-2$)*

m) $x^2+16=0$ *(Soluc: $\nexists$ soluc)*

n) $25x^2-9=0$ *(Sol: $x=\pm 3/5$)*

o) $4-25x^2=0$ *(Sol: $x=\pm 2/5$)*

p) $2x^2-8=0$ *(Sol: $x=\pm 2$)*

q) $-x^2-x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=-1$)*

☞ *Ejercicio libro:* ***pág. 62: 26***

21. Resolver las siguientes **ecuaciones de 2º grado completas** y comprobar siempre las soluciones:

a) $x^2-2x-8=0$ *(Soluc: $x_1=4$, $x_2=-2$)*

b) $x^2+2x+3=0$ *(Soluc: $\nexists$ soluc)*

c) $2x^2-7x-4=0$ *(Soluc: $x_1=4$, $x_2=-1/2$)*

d) $x^2+6x-8=0$ *(Soluc: $x=-3\pm\sqrt{17}$)*

e) $4x^2+11x-3=0$ *(Soluc: $x_1=1/4$, $x_2=-3$)*

f) $x^2+2x+1=0$ *(Soluc: $x=-1$)*

g) $x^2-13x+42=0$ *(Soluc: $x_1=7$, $x_2=6$)*

h) $x^2+13x+42=0$ *(Soluc: $x_1=-7$, $x_2=-6$)*

i) $x^2+5x+25=0$ *(Soluc: $\nexists$ soluc)*

j) $3x^2-6x-6=0$ *(Soluc: $x=1\pm\sqrt{3}$)*

k) $2x^2-7x-15=0$ *(Soluc: $x_1=5$, $x_2=-3/2$)*

l) $x^2-4x+4=0$ *(Soluc: $x=2$)*

m) $2x^2+ax-3a^2=0$ *(Soluc: $x_1=a$, $x_2=-3a/2$)*

n) $6x^2-x-1=0$ *(Soluc: $x_1=1/2$, $x_2=-1/3$)*

o) $3x^2-6x-4=0$ *(Soluc: $x=1\pm\sqrt{21}/3$)*

p) $x^2-19x+18=0$ *(Soluc: $x_1=18$, $x_2=1$)*

q) $12x^2-17x-5=0$ *(Soluc: $x_1=5/3$, $x_2=-1/4$)*

r) $3x^2-ax-2a^2=0$ *(Soluc: $x_1=a$, $x_2=-2a/3$)*

s) $2x^2-5x-3=0$ *(Soluc: $x_1=3$, $x_2=-1/2$)*

t) $\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+2=0$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=3$)*

u) $\sqrt{3}\,x^2+2x-\sqrt{3}=0$ *(Sol: $x_1=\sqrt{3}/3$; $x_2=-\sqrt{3}$)*

v) $5x^2+16x+3=0$ *(Soluc: $x_1=-1/5$, $x_2=-3$)*

w) $2x^2-\sqrt{2}\,x-2=0$ *(Sol: $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=-\sqrt{2}/2$)*

x) $x^2+9x-22=0$ *(Soluc: $x_1=2$, $x_2=-11$)*

y) $\frac{1}{2}x^2-x-4=0$ *(Soluc: $x_1=4$, $x_2=-2$)*

z) $0{,}1x^2-0{,}4x-48=0$ *(Soluc: $x_1=24$, $x_2=-20$)*

α) $x^2+2x-3=0$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=-3$)*

β) $48x^2-38{,}4x-268{,}8=0$ *(Soluc: $x_1=2{,}8$, $x_2=-2$)*

γ) $\frac{ax^2}{3}-\frac{abx}{6}-\frac{ab^2}{6}=0$ *(Soluc: $x_1=-b/2$, $x_2=b$)*

δ) $4x^2+8x+3=0$ *(Soluc: $x_1=-3/2$, $x_2=-1/2$)*

ε) $3x^2+4x+1=0$ *(Soluc: $x_1=-1/3$, $x_2=-1$)*

ζ) $x^2+4x+3=0$ *(Soluc: $x_1=-1$, $x_2=-3$)*

η) $x^2+2x-35=0$ *(Soluc: $x_1=5$, $x_2=-7$)*

θ) $x^2+13x+40=0$ *(Soluc: $x_1=-5$, $x_2=-8$)*

ι) $x^2-4x-60=0$ *(Soluc: $x_1=10$, $x_2=-6$)*

κ) $x^2+7x-78=0$ *(Soluc: $x_1=6$, $x_2=-13$)*

λ) $2x^2-5x+2=0$ *(Soluc: $x_1=2$, $x_2=1/2$)*

μ) $x^2-10x+25=1$ *(Soluc: $x_1=4$, $x_2=6$)*

ν) $2x^2-11x+5=0$ *(Soluc: $x_1=5$, $x_2=1/2$)*

ξ) $x^2+10x-24=0$ *(Soluc: $x_1=2$, $x_2=-12$)*

ο) $2x^2-3x+1=0$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=1/2$)*

π) $3x^2-19x+20=0$ *(Soluc: $x_1=5$, $x_2=4/3$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 52: 4a,b; pág. 62: 21a y 25***

22. Resolver las siguientes **ecuaciones de todo tipo**, operando convenientemente en cada caso -para así pasarlas a la forma general de 2º grado-, y comprobar el resultado:

a) $2x^2+5x=5+3x-x^2$ *(Sol: $x_1=1$, $x_2=-5/3$)*

b) $4x(x+1)=15$ *(Sol: $x_1=3/2$, $x_2=-5/2$)*

c) $(5x-1)^2=16$ *(Sol: $x_1=1$, $x_2=-3/5$)*

d) $(4-3x)^2-64=0$ *(Sol: $x_1=4$, $x_2=-4/3$)*

e) $2(x+1)^2=8-3x$ *(Sol: $x=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{4}$)*

f) $(2x-4)^2-2x(x-2)=48$ *(Sol: $x_1=8$, $x_2=-2$)*

g) $(2x-3)^2+x^2+6=(3x+1)(3x-1)$ *(Sol: $x_1=1$, $x_2=-4$)*

h) $(3x-2)^2=(2x+3)(2x-3)+3(x+1)$ *(Sol: $x_1=1$, $x_2=2$)*

i) $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$ *(Sol: $x=\pm 9$)*

j) $1064=\frac{4+6(x-1)}{2}\cdot x$ *(Sol: $x_1=19$, $x_2=-56/3$)*

k) $\sqrt{3}=\frac{2x}{1-x^2}$ *(Sol: $x_1=\sqrt{3}/3$, $x_2=-\sqrt{3}$)*

l) $(x-1)(x-2)=0$ *(Sol: $x_1=1$, $x_2=2$)*

m) $(2x-3)(1-x)=0$ *(Sol: $x_1=3/2$, $x_2=1$)*

n) $(x-1)(x-2)=6$ *(Sol: $x_1=-1$, $x_2=4$)*

o) $(x^2-4)(2x-6)(x+3)=0$ *(Sol: $x=\pm 2$; $x=\pm 3$)*

p) $\frac{x^2-4}{x+3}=0$ *(Sol: $x=\pm 2$)*

q) $\frac{x^2-4}{x+3}=-12$ *(Sol: $x_1=-8$, $x_2=-4$)*

r) $\frac{x}{3x}=\frac{x-1}{-3x-1}$ *(Soluc: $x=1/3$)*

s) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{(x-3)^2}{3}=\frac{x(11-x)}{6}$ *(Sol: $x_1=-8$, $x_2=6$)*

t) $6+\frac{2x+4}{3}x=8$ *(Sol: $x_1=1$, $x_2=-3$)*

u) $\frac{3x^2+2x}{5x^2-3}=0$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=-2/3$)*

v) $\frac{x^2+3x-4}{x-3}=0$ *(Sol: $x_1=1$, $x_2=-4$)*

w) $\frac{x^2+6x+3}{x-1}=-x$ *(Sol: $x_1=-3/2$, $x_2=-1$)*

x) $12x^3-2x^2-2x=0$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x_3=-1/3$)*

y) $\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{13}{12}$ *(Sol: $x=\pm 5$)*

z) $(x^2+1)^4=625$ *(Sol: $x=\pm 2$)*

α) $(x-3)^2=\frac{x}{4}$ *(Sol: $x_1=4$, $x_2=9/4$)*

β) $(2x-4)^2=0$ *(Sol: $x=2$)*

γ) $(x+3)^7=0$ *(Sol: $x=-3$)*

δ) $\frac{x^4}{10}=8x$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=2\cdot\sqrt[3]{10}$)*

ε) $\frac{\sqrt{x}}{x}=0$ *(Sol: $\nexists$ soluc)*

ζ) $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(1+2x)^2}{3}=-2-\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}$ *(Sol: $x_1=1$, $x_2=11/3$)*

η) $\sqrt{x^2+4x+4}=1$ *(Sol: $x_1=-1$, $x_2=-3$)*

θ) $\frac{(x+3)(x-3)-4}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{(x-2)^2+1}{6}$ *(Sol: $x_1=4$, $x_2=-5$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 52: 4c,d y 5; pág. 62: 21b,c,d, 22 y 27*** *(sin denominadores);* ***pág. 55: 12a; pág. 63: 38a,b,c y 39a,c*** *(con denominadores)*

23. Resolver las siguientes **ecuaciones factorizadas** o **factorizables** y comprobar:

a) $(x^2-4)(x^2+1)(x-3)=0$ *(Sol: $x=\pm 2$, $x=3$)*

b) $(x^2-3x)(2x+3)(x-1)=0$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=1$; $x_3=3$, $x_4=-3/2$)*

c) $(3x^2-12)(-x^2+x-2)(x^2+1)=0$ *(Sol: $x=\pm 2$)*

d) $x^6-16x^2=0$ *(Sol: $x=0$, $x=\pm 2$)*

e) $x^3=3x$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$; $x_3=-\sqrt{3}$)*

f) $(3x^2+12)(x^2-5x)(x-3)=0$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=3$; $x_3=5$)*

g) $x^3+2x^2-15x=0$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=3$; $x_3=-5$)*

h) $(x-3)(2x^2-8)(x^2+5x)=0$ *(Sol: $x=\pm 2$, $x=3$, $x=0$, $x=-5$)*

i) $(x+1)(x-2)(x^2-3x+4)=0$ *(Sol: $x_1=1$, $x_2=2$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 62: 34 y 35***

24. Resolver las siguientes **ecuaciones bicuadradas** y comprobar las soluciones obtenidas:

a) $x^4-5x^2+4=0$ *(Soluc: $x=\pm 1$, $x=\pm 2$)*

b) $x^4-5x^2-36=0$ *(Soluc: $x=\pm 3$)*

c) $x^4+13x^2+36=0$ *(Soluc: $\nexists$ soluc)*

d) $x^4-13x^2+36=0$ *(Soluc: $x=\pm 2$, $x=\pm 3$)*

e) $x^4-4x^2+3=0$ *(Soluc: $x=\pm 1$, $x=\pm\sqrt{3}$)*

f) $x^4+21x^2-100=0$ *(Soluc: $x=\pm 2$)*

g) $x^4+2x^2+3=0$ *(Soluc: $\nexists$ soluc)*

h) $x^4-41x^2+400=0$ *(Soluc: $x=\pm 4$, $x=\pm 5$)*

i) $36x^4-13x^2+1=0$ *(Soluc: $x=\pm 1/2$, $x=\pm 1/3$)*

j) $x^4-77x^2-324=0$ *(Soluc: $x=\pm 9$)*

k) $x^4-45x^2+324=0$ *(Soluc: $x=\pm 3$, $x=\pm 6$)*

l) $x^4+2x^2-8=0$ *(Soluc: $x=\pm\sqrt{2}$)*

m) $x^6+7x^3-8=0$ *(Soluc: $x=1$, $x=-2$)*

n) $x^4-16=0$ *(Soluc: $x=\pm 2$)*

o) $x^4+16=0$ *(Soluc: $\nexists$ soluc)*

p) $x^4-16x^2=0$ *(Soluc: $x=0$, $x=\pm 4$)*

q) $x^6-64=0$ *(Soluc: $x=\pm 2$)*

r) $(x^2+2)(x^2-2)+3x^2=0$ *(Soluc: $x=\pm 1$)*

s) $5x^2=(6+x^2)(6-x^2)$ *(Soluc: $x=\pm 2$)*

t) $(x^2+x)(x^2-x)=(x-2)^2+x(x+4)$ *(Sol: $x=\pm 2$)*

u) $(2x^2+1)(x^2-3)=(x^2+1)(x^2-1)-8$ *(Sol: $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm\sqrt{3}$)*

v) $(x^2-2)^2=5(1+x)(1-x)+1$ *(Soluc: $x=\pm 1$)*

w) $(x^2+1)\cdot(x^2-1)+3x^2=3$ *(Soluc: $x=\pm 1$)*

x) $(3+x)(3-x)x^2-2x(x-3)=(x+3)^2-1$ *(Sol: $x=\pm 2$, $x=\pm\sqrt{2}$)*

y) $x^2(x+1)(x-1)=(2-x)^2+(x+4)x$ *(Soluc: $x=\pm 2$)*

z) $(x+3)(x-3)=\left(\frac{20}{x}\right)^2$ *(Soluc: x=±5)*

α) $(x^2+4)(x+4)(x^4+2x^2-8)=0$ *(Sol: x=-4, x=±√2)*

β) $\frac{x^2-32}{4}=-\frac{28}{x^2-9}$ *(Sol: x=±4, x=±5)*

γ) $\frac{2}{x^2-9}=\frac{x^2-16}{72}$ *(Sol: x=0; x=±5)*

δ) $\frac{(2x+3)^2-12x}{x^2+2x}=x^2-2x$ *(Soluc: x=±3)*

ε) $\frac{(x+1)(x-1)}{2}-\frac{(x^2+3)(x^2-3)}{6}=\frac{1}{3}$ *(Sol: x=±2)*

ζ) $\frac{(2x+1)^2-(x^2+1)(x^2-1)}{x}=3(x+1)+1$ *(Sol: x=±√2)*

η) $\frac{(2x+1)^2}{4}-\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{3}=\frac{4x+1}{4}$ *(Sol: x=±2)*

θ) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{x^2}{2}=\frac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4}-2$ *(Soluc: x=±2)*

ι) $\frac{(3x^2-1)(x^2+3)}{4}-\frac{(2x^2+1)(x^2-3)}{3}=4x^2$ *(Sol: x=±1,x=±√3)*

κ) $\frac{(3x^2+2)(3x^2-2)}{5}-\frac{(3x-1)^2}{4}=\frac{3(x-1)}{2}$ *(Sol: x=±1/2,x=±1)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 54: 9; pág. 62: 31*** *(sencillas);* ***pág. 63: 32 y 33*** *(con paréntesis y algún denominador)*

25. Resolver las siguientes **ecuaciones irracionales** y comprobar la solución:

a) $\sqrt{x+4}-7=0$ *(Sol: x=45)*

b) $x-\sqrt{25-x^2}=1$ *(Sol: x=4)*

c) $\sqrt{169-x^2}+17=x$ *(∄ soluc)*

d) $2\sqrt{x+5}=x-10$ *(Sol: x=20)*

e) $x+\sqrt{5x+10}=8$ *(Sol: x=3)*

f) $x+\sqrt{5x-10}=8$ *(Sol: x≅4,48)*

g) $11=2x-3\sqrt{x-1}$ *(Sol: x=10)*

h) $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+6}=1$ *(Sol: x=3)*

i) $x=6-\sqrt{x}$ *(Sol: x=4)*

j) $\sqrt{3x+1}=1+\sqrt{2x-1}$ *(Sol: x_1=1; x_2=5)*

k) $1=2x-3\sqrt{4x-7}$ *(Sol: x_1=2; x_2=8)*

l) $x-2\sqrt{x-1}=4$ *(Sol: x=10)*

m) $\sqrt{5x+4}=2x+1$ *(Sol: x=1)*

n) $\sqrt{2x+1}-3=\sqrt{x-8}$ *(Sol: x_1=12; x_2=24)*

o) $\sqrt{x+5}-1=\sqrt{x}$ *(Sol: x=4)*

p) $x-\sqrt{2x-1}=2$ *(Sol: x=5)*

q) $\sqrt[3]{x+5}=2$ *(Sol: x=3)*

r) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=7$ *(Sol: x=15)*

s) $2x-13\sqrt{x}-15=0$ *(Sol: x=225/4)*

t) $9(1-x)=3\sqrt{1+(3x-4)^2+x^2}$ *(∄ soluc)*

u) $x-\sqrt{2x-1}=1-x$ *(Sol: x_1=1; x_2=1/2)*

v) $x-\sqrt{7-3x}=1$ *(Sol: x=2)*

w) $\sqrt{x-1}+1=x-2$ *(Sol: x=5)*

x) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$ *(Sol: x=4)*

y) $\sqrt{3x+1}+1=x$ *(Sol: x=5)*

z) $2x-\sqrt{3x-5}=4$ *(Sol: x=3)*

α) $\sqrt{x+2}+x=3x-2$ *(Sol: x=2)*

β) $\sqrt{7+2x}-\sqrt{3+x}=1$ *(Sol: x_1=1; x_2=-3)*

γ) $\sqrt{x+7}-1=x$ *(Sol: x=2)*

δ) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$ *(Sol: x=4)*

ε) $\sqrt{2x+x^2}-x-2=0$ *(Sol: x=2)*

ζ) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3$ *(Sol: x=13/9)*

η) $\sqrt{x+23}=\sqrt{4x+1}+2$ *(Sol: x=2)*

θ) $\sqrt{x}-2=\sqrt{x-8}$ *(Sol: x=9)*

ι) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$ *(Sol: x=114)*

κ) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}=1$ *(Sol: x=±2)*

λ) $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{x+1}$ *(Sol: x_1=-1; x_2=3)*

μ) $\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+1}=1$ *(Sol: x=3)*

ν) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=2$ *(Sol: x_1=3; x_2=11)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 55: 11; pág. 63: 40 y 41*** *(sencillas);* ***pág. 63 y ss.: 42 y 43*** *(con 2 radicales)*

26. ¿Por qué es imprescindible comprobar la validez de las posibles soluciones de una ecuación irracional? Indicar algún ejemplo.

27. Resolver las siguientes **ecuaciones con la x en el denominador**, y comprobar la solución obtenida (NOTA: Con un ***** se señalan aquellos apartados en los que resulta crucial efectuar la comprobación):

a) $\frac{3-x}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=-2$ *(x=3)*

b) $\frac{x+2}{x}+3x=\frac{5x+6}{2}$ *(x=2)*

c) $\frac{8}{x+6}+\frac{12-x}{x-6}=1$ *(x_1=10; x_2=-3)*

d) $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}=2$ *(x=-1)*

e) $\frac{3x+1}{x^3}+\frac{x+1}{x}=1+\frac{2x+3}{x^2}$ *(x=±1)*

f) $\frac{x-1}{x^2+2x}-\frac{2}{x^2-2x}=\frac{x}{x^2-4}$ *(x=-2/5)*

* **g)** $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}+\frac{x-1}{x-2}$ *(x=-3)*

h) $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}-\frac{x+6}{x-6}$ *(x_1=18; x_2=-3)*

i) $\frac{1}{x}=-x+\frac{5}{2}$ *(x_1=2; x_2=1/2)*

j) $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}\,x$ *(x=±√2)*

k) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{10}$ $\left(x=\frac{11\pm\sqrt{481}}{6}\right)$

l) $\frac{4}{x}+\frac{2(x+1)}{3(x-2)}=4$ *(x_1=3; x_2=4/5)*

m) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}$ *(x_1=2; x_2=-2/3)*

n) $\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=3$ *(x=3)*

o) $\frac{5}{x+2}+\frac{x}{x+3}=\frac{3}{2}$ *(x_1=3; x_2=-4)*

p) $\frac{x+3}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{26}{35}$ *(x_1=6; x_2=-8/13)*

q) $\frac{4x}{x+1}+\frac{x}{2x-1}=2$ *(∄ soluc.)*

* **r)** $\frac{x-3}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+x}=\frac{2-3x}{x^2-1}$ *(x=2)*

s) $\frac{5x+1}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x-2}$ *(x_1=3; x_2=-1)*

t) $\frac{4x}{x+5}-\frac{x+5}{x-5}=1$ *(x_1=0; x_2=15)*

u) $\frac{1-2x}{x+7}=\frac{x}{x-1}$ *(x_1=-1; x_2=-1/3)*

v) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{12}$ *(x_1=5; x_2=-1/5)*

w) $\frac{3-x}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{2}{x^2-4}$ *(∄ soluc.)*

x) $\frac{x}{5}=2+\frac{75}{x}$ *(x_1=25; x_2=-15)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 55: 12b; pág. 63: 38d, 39 b,d,e,f***

28. Resolver los siguientes **sistemas de ecuaciones no lineales**, y comprobar la solución:

a) $\left.\begin{array}{r}2x-y=1\\ x^2-y=4\end{array}\right\}$ *(x_1=3,y_1=5;x_2=-1,y_2=-3)*

b) $\left.\begin{array}{r}x-3y=-3\\ xy=6\end{array}\right\}$ *(x_1=3,y_1=2;x_2=-6,y_2=-1)*

c) $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=1\\ 2x-y=3\end{array}\right\}$ *(∄ soluc)*

d) $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=10\\ x^2-y^2=8\end{array}\right\}$ *(x_1=3,y_1=1;x_2=-3,y_2=1; x_3=3,y_3=-1;x_4=-3,y_4=-1)*

e) $\left.\begin{array}{r}x^2-3y=3\\ 2x-3y=-12\end{array}\right\}$ *(x_1=-3,y_1=2;x_2=5,y_2=22/3)*

f) $\left.\begin{array}{r}\frac{x-2}{3}-\frac{y-4}{2}=1\\ \frac{2}{x-3}=\frac{4}{y-2}\end{array}\right\}$ *(x=7/2, y=3)*

g) $\left.\begin{array}{r}x-2y=-5\\ x^2+y^2=4x+2y+20\end{array}\right\}$ *(x_1=5,y_1=5;x_2=-3,y_2=1)*

h) $\left.\begin{array}{l}x\cdot y=12\\ (x-4)\cdot(y+0{,}1)=12\end{array}\right\}$ *(x_1=24, y_1=0,5; x_2=-20, y_2=-0,6)*

i) $\left.\begin{array}{r}x^2-2xy+y^2=16\\ x+y=6\end{array}\right\}$ *(x_1=5,y_1=1;x_2=1,y_2=5)*

j) $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=25\\ xy=12\end{array}\right\}$ *(x_1=3 y_1=4;x_2=-3 y_2=-4 x_3=4,y_3=3;x_4=-4,y_4=-3)*

k) $\left.\begin{array}{r} x^2 - y = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$ *(x_1=0, y_1=0; x_2=1, y_2=1)*

l) $\left.\begin{array}{r} x - y = 105 \\ \sqrt{x} + y = 27 \end{array}\right\}$ *(x=121, y=16)*

m) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 4x - y = 5 \\ 4x + 2y = 6 \end{array}\right\}$ *(x_1=-2, y_1=7; x_2=4, y_2=-5)*

n) $\left.\begin{array}{r} x^2 - x - y = 2 \\ 3x + y = -4 \end{array}\right\}$ *($\nexists$ soluc)*

o) $\left.\begin{array}{r} x^2 - y = 1 \\ 4x - y = 5 \end{array}\right\}$ *(x=2, y=3)*

p) $\left.\begin{array}{r} x - y = 11 \\ y^2 = x - 5 \end{array}\right\}$ *(x_1=9, y_1=-2; x_2=14, y_2=3)*

q) $\left.\begin{array}{r} xy = 12 \\ 3x - 2y = 1 \end{array}\right\}$ *(x_1=3, y_1=4;x_2=-8/3, y_2=-9/2)*

r) $\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ x^2 - 2x + 3y = -1 \end{array}\right\}$ *(x_1=4, y_1=-3; x_2=1, y_2=0)*

s) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x = 31 \end{array}\right\}$ *(x_1=5, y_1=4; x_2=-3, y_2=-4)*

t) $\left.\begin{array}{r} 3x + y^2 = 7 \\ 2x + y^2 = 6 \end{array}\right\}$ *(x_1=1, y_1=2; x_2=1, y_2=-2)*

u) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x^2 + 3xy = 0 \end{array}\right\}$

v) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = -3 \end{array}\right\}$

w) $\left.\begin{array}{l} x - y = 3 \\ x \cdot y = 10 \end{array}\right\}$ *(x_1=5, y_1=2; x_2=-2, y_2=-5)*

x) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 5x - y = -6 \\ x - y = -1 \end{array}\right\}$

y) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 15 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$

z) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y = 4 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ *(x_1=2, y_1=0; x_2=-1, y_2=-3)*

α) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 2ax \\ x^2 = ay \end{array}\right\}$ *($x = a\cdot\sqrt[3]{2}$, $y = a\cdot\sqrt[3]{4}$)*

☞ *Ejercicios libro: **pág. 59: 18; pág. 64: 50 y 52** (sencillas); **pág. 64: 51 y 53** (más nivel)*

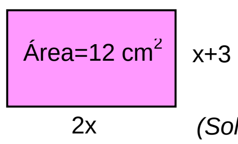
56 PROBLEMAS DE PLANTEAMIENTO:

29. Hallar dos números positivos consecutivos cuyo producto sea 380 *(Soluc: 19 y 20)*

30. Calcular un número positivo sabiendo que su triple más el doble de su cuadrado es 119 *(Soluc: 7)*

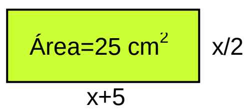
31. Hallar en cada caso el valor de x para que los rectángulos tengan el área que se indica:

a)



(Soluc: x≅1,37 cm)

b)



(Soluc: x=5 cm)

32. Juan ha leído ya la quinta parte de un libro. Cuando lea 90 páginas más, todavía le quedará la mitad del libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro? ¿Cuántas páginas lleva leídas? *(Soluc: 300 págs.; 60 págs.)*

33. Paloma vendió los dos quintos de una colección de cómics que tenía y luego compró 100 más. Tras esto tenía el mismo número que si hubiese comprado desde el principio 40 cómics. ¿Cuántos cómics tenía Paloma al principio? *(Soluc: 150 cómics)*

34. En un texto matemático babilónico que se conserva en una tablilla en el Museo Británico de Londres se lee: «Restamos al área de un cuadrado su lado y obtenemos 870». Hallar el lado de dicho cuadrado. *(Soluc: 30)*

35. Un campo está plantado con un total de 250 árboles, entre olivos y almendros. Si el doble de almendros son 10 menos que el total de los olivos, ¿cuántos almendros habrá? ¿Y cuántos olivos? *(Soluc: 80 almendros y 170 olivos)*

36. El perímetro de un solar rectangular mide 40 m. Si su ancho es la tercera parte de su largo, ¿cuánto miden los lados del solar? *(Soluc: 15 m de largo y 5 m de ancho)*

37. En una granja viven la mitad de gallinas que de conejos. Si en total podemos contar 110 patas, ¿cuántos conejos y gallinas pueblan la granja? *(Soluc: 11 gallinas y 22 conejos)*

38. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcular las dimensiones de la cerca. *(Soluc: 25 x 30 m)*

39. Un automovilista que se detiene a repostar observa que para llegar a su destino todavía le queda el triple de lo que ya ha recorrido. Además, se da cuenta de que, si recorre 10 km más, estará justo en la mitad del trayecto. ¿Cuántos km ha recorrido y cuál es la longitud del viaje? *(Soluc: 10 km; 40 km)*

40. Hallar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 34 cm y su diagonal 13 cm.
(Soluc: 12 cm x 5 cm)

41. Según una noticia publicada en la prensa, una determinada ciudad fue visitada en 2010 por dos millones de turistas, lo cual supuso un 20 % más que en 2008. ¿Cuál fue la afluencia de turistas en este último año? *(Soluc: $1\,\widehat{6}$ millones)*

42. Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que son tres números consecutivos. *(Soluc: 3, 4 y 5)*

43. Un triángulo rectángulo tiene de perímetro 24 m y la longitud de un cateto es igual a tres cuartos de la del otro. Halla cuánto miden sus catetos. (Ayuda: Llamar ***x*** a un cateto e ***y*** a la hipotenusa, y plantear un sistema). *(Soluc: 6 m y 8 m)*

44. Un padre tiene el doble de edad que su hijo. Hace 17 años, tenía el triple. Hallar la edad de ambos.
(Soluc: 68 y 34 años)

45. Un depósito de agua tiene forma de ortoedro cuya altura es 10 m y su capacidad 4000 m^3. Hallar el lado de la base sabiendo que es cuadrada. *(Soluc:20 m)*

46. *Problema del bambú (texto indio del siglo IX):* Un bambú que mide 30 codos y que se eleva sobre un terreno plano se rompe en un punto por la fuerza del viento, de forma que la punta se queda ahora colgando a 16 codos del suelo. ¿A qué altura se ha roto? *(Soluc: 23 codos)*

47. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 m. *(Soluc: 15,58 m^2)*

48. Se tiene un lote de baldosas cuadradas. Si se forma con ellas un cuadrado de x baldosas por lado sobran 27, y si se toman x+1 baldosas por lado faltan 40. Hallar las baldosas del lote. *(Soluc: 1116 baldosas)*

49. Juan pierde los 3/8 de las canicas que tenía, con lo cual le quedan 10. ¿Cuántas canicas tenía al principio? *(Soluc: 16 canicas)*

50. En una clase el 70% son chicos. Además, se sabe que hay 12 chicas menos que chicos. ¿Cuántas chicas y chicos hay? *(Soluc: 21 chicos y 9 chicas)*

51. Un padre tiene 49 años y su hijo 11. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple de la edad del hijo? *(Soluc: Dentro de 8 años)*

52. Un frutero vende en un día las dos quintas partes de una partida de naranjas. Además, se le estropean 8 kg, de forma que al final le quedan la mitad de naranjas que tenía al comenzar la jornada. ¿Cuántos kg tenía al principio? *(Soluc: 80 kg)*

53. Un grupo de amigos celebra una comida cuyo coste total asciende a 120 €. Uno de ellos hace notar que, si fueran cuatro más, hubieran pagado 5 € menos por persona. ¿Cuántos amigos son y cuánto paga cada uno? *(Soluc: 8 amigos; 15 €)*

54. Un grupo de personas se encuentra en una sala de multicines. La mitad se dirige a la sala A, la tercera parte opta por la sala B y una pareja decide ir a la cafetería. ¿Cuántas personas componían el grupo? *(Soluc: 12 personas)*

55. Una persona caritativa ha dado a tres pobres respectivamente un tercio, un cuarto y un quinto de lo que tenía, y aún le queda 26 € ¿Cuánto dinero tenía? *(Soluc: 120 €)*

56. Nada se sabe de la vida del matemático griego **Diofanto** (siglo III d.C.), excepto su edad al morir. Ésta se sabe por una cuestión planteada en una colección de problemas del siglo V o VI, que reza así: «La juventud de Diofanto duró 1/6 de su vida… se dejó barba después de 1/12 más. Después de 1/7 de su vida se casó. Cinco años después tuvo un hijo. Éste vivió exactamente la mitad de tiempo que su padre, y Diofanto murió cuatro años después». Hallar la edad de Diofanto. *(Soluc: 84 años)*

57. Preguntada una persona por su edad contestó: "Sumad 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y os resultará un número igual al cuadrado de la edad que tengo hoy". Hallar la edad de la persona en el momento actual. *(Soluc: se verifica para cualquier edad)*

58. Si el lado de un cuadrado aumenta 2 cm, su área aumenta 28 cm^2 ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado menor? *(Soluc: Se trata de un cuadrado de lado 6 cm)*

59. Calcular la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su área es 56 cm^2 y su perímetro 30 cm. *(Soluc: 7x8 cm)*

60. En una papelería venden el paquete de bolígrafos a un precio total de 12 €. Si el precio de un bolígrafo subiera 0,10 €, para mantener ese precio total del paquete cada uno debería tener 4 bolígrafos menos. ¿Cuál es el precio de un bolígrafo y cuántos trae cada paquete?

(Ayuda: llamar ***x*** al nº de bolígrafos que trae el paquete e ***y*** al precio de cada bolígrafo, y plantear un sistema) Comprobar que la solución obtenida verifica las condiciones del enunciado.

(Soluc: cada bolígrafo cuesta 50 cent., y el paquete tiene 24)

61. Javier tiene 27 años más que su hija Nuria. Dentro de ocho años, la edad de Javier doblará la de Nuria. ¿Cuántos años tiene cada uno? *(Soluc: Javier, 46 años, y Nuria, 19)*

62. Un grupo de estudiantes alquila un piso por el que tienen que pagar 420 € al mes. Uno de ellos hace cuentas y observa que si fueran dos estudiantes más, cada uno tendría que pagar 24 € menos. ¿Cuántos estudiantes han alquilado el piso? ¿Cuánto paga cada uno?

(Ayuda: llamar ***x*** al nº de estudiantes e ***y*** a lo que paga cada uno, y plantear un sistema)

Comprobar que la solución obtenida verifica las condiciones del enunciado.

(Soluc: 5 estudiantes a 84 € cada uno)

63. Con dos tipos de barniz, de 3,50 €/kg y de 1,50 €/kg, queremos obtener un barniz de 2,22 €/kg. ¿Cuántos kilogramos tenemos que poner de cada clase para obtener 50 kg de la mezcla? (Ayuda: plantear un sistema de ecuaciones de primer grado) *(Soluc: 18 kg del barniz de 3,50 y 32 kg del de 1,50)*

64. Dos árboles de 15 m y 20 m de altura están a una distancia de 35 m. En la copa de cada uno hay una lechuza al acecho. De repente, aparece entre ellos un ratoncillo, y ambas lechuzas se lanzan a su captura a la misma velocidad, llegando simultáneamente al lugar de la presa. ¿A qué distancia de cada árbol apareció el ratón? (Ayuda: Si se lanzan a la misma velocidad, recorren el mismo espacio, pues llegan a la vez; aplicar el teorema de Pitágoras, y plantear un SS.EE. de 2º grado) *(Soluc: a 15 m del árbol de 20 m)*

65. Un almacenista de fruta compra un determinado número de cajas de fruta por un total de 100 €. Si hubiera comprado 10 cajas más y cada caja le hubiera salido por 1 € menos, entonces habría pagado 120 €. ¿Cuántas cajas compró y cuánto costó cada caja?

66. Calcular dos números positivos sabiendo que su cociente es 2/3 y su producto 216 *(Soluc: 12 y 18)*

67. Un rectángulo tiene 300 cm^2 de área y su diagonal mide 25 cm. ¿Cuánto miden sus lados? *(Soluc: 20 cm y 15 cm)*

68. Un frutero ha comprado manzanas por valor de 336 €. Si el kilo de manzanas costara 0,80 € menos, podría comprar 48 kg más. Calcular el precio de las manzanas y la cantidad que compró. (Ayuda: plantear un SS.EE. de 2º grado) *(Soluc: 120 kg a 2,80 €/kg)*

69. Un especulador compra una parcela de terreno por 4800 €. Si el m^2 hubiera costado 2 € menos, por el mismo dinero habría podido comprar una parcela 200 m^2 mayor. ¿Cuál es la superficie de la parcela que ha comprado? ¿Cuánto cuesta el m^2? *(Soluc: 600 m^2; 8 €)*

70. El área de un **triángulo** rectángulo es 30 m^2 y la hipotenusa mide 13 m. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos? *(Soluc: 12 m y 5 m)*

71. Calcular dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 195 *(Soluc: 13 y 15)*

72. Si multiplicamos la tercera parte de cierto número por sus tres quintas partes, obtenemos 405. ¿Cuál es ese número? *(Soluc: 45)*

73. Varios amigos alquilan un local por 800 €. Si hubieran sido tres más, habría pagado cada uno 60 € menos. ¿Cuántos amigos son? (Ayuda: llamar x al nº de amigos e y a lo que paga cada uno) *(Soluc: 5 amigos)*

74. Uno de los lados de un rectángulo es doble que el otro y el área mide 50 m^2. Calcular las dimensiones del rectángulo. *(Soluc: 5 m)*

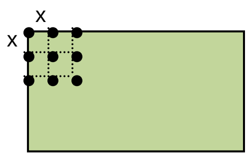
75. Un campo rectangular de 4 ha de superficie tiene un perímetro de 10 hm. Calcular, en metros, su longitud y su anchura. (1 ha=100 a; 1 a=100 m^2) *(Soluc: 100 m x 400 m)*

76. Las diagonales de un rombo están en la relación de 2 a 3. El área es de 108 cm^2. Calcular la longitud de las diagonales y el lado del rombo. *(Soluc: d=12 cm; D=18 cm; l≅10,81 cm)*

77. El diámetro de la base de un cilindro es igual a su altura. El área total es 169,56 m^2. Calcular sus dimensiones. *(Soluc: d=h=6 m)*

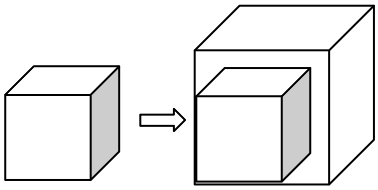
78. Calcular la velocidad y el tiempo que ha invertido un ciclista en recorrer una etapa de 120 km sabiendo que, si hubiera ido 10 km/h más deprisa, habría tardado una hora menos. *(Soluc: v=30 km/h; t=4 h)*

79. En un terreno rectangular de lados 64 m y 80 m se quieren plantar 357 árboles formando una cuadrícula regular. ¿Cuál será el lado de esa cuadrícula? (Ayuda: En el lado menor, por ejemplo, hay 64/x cuadrículas, y un árbol más que el número de cuadrículas) *(Soluc: x=4 m)*



80. Un padre tiene 30 años más que su hijo. Dentro de 15 años duplicará su edad. Hallar la edad de ambos. *(Soluc: 45 y 15)*

81. Al aumentar en 1 cm la arista de un cubo su volumen aumenta en 271 cm^3. ¿Cuánto mide la arista? (Ayuda: plantear una ecuación de 3^{er} grado) *(Soluc: 9 cm)*



82. Dos tinajas tienen la misma cantidad de vino. Si se pasan 37 litros de una a otra, ésta contiene ahora el triple que la primera ¿Cuántos litros de vino había en cada tinaja al principio? *(Soluc: 74 l)*

83. Un padre, preocupado por motivar a su hijo en Matemáticas, se compromete a darle 1 € por problema bien hecho, mientras que, si está mal, el hijo le devolverá 0,5 €. Después de realizar 60 problemas, el hijo ganó 30 €. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente? *(Ayuda: Plantear un SS.EE. de 1^{er} grado) (Soluc: 40 problemas)*

84. Juan compra cierto número de botes de conserva por 24 €. Observa que, si cada bote costara 2 € menos, podría haber comprado un bote más con la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos botes compró y a qué precio? *(Soluc: 3 botes a 8 € cada uno)*

85. Un ranchero decide repartir una manada de 456 caballos entre sus hijos e hijas. Antes del reparto se enfada con los dos únicos varones, que se quedan sin caballos. Así, cada hija recibe 19 cabezas más. ¿Cuántas hijas tiene el ranchero? *(Soluc. 6 hijas)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 65: 54 a 59***

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO, BICUADRADAS Y RADICALES

1. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma **$ax^2 + bx + c = 0$** donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$.
- Una ecuación de 2º grado es **completa** cuando los coeficientes a, b y c son distintos de cero e **incompleta** si los coeficientes b o c o ambos son cero.

1.1. Solución de las ecuaciones de segundo grado

	Forma	Solución
Completa	**$ax^2 + bx + c = 0$** $a, b, c \neq 0$	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Incompletas	**$ax^2 + c = 0$** $a \neq 0, b = 0$	$x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$
	$ax^2 + bx = 0$ $a \neq 0, c = 0$	$x (ax + b) = 0$ Dos soluciones $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$
	$ax^2 = 0$ $a \neq 0, b = 0, c = 0$	$x = 0$ (Solución doble)

1.2. Número de soluciones de una ecuación de segundo grado

Dada una ecuación de 2º grado, **$ax^2 + bx + c = 0$**, se llama discriminante de la ecuación a la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene 2 soluciones o raíces reales distintas: x_1 y x_2 . La ecuación se puede factorizar como **$a (x - x_1) (x - x_2)$**.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene 2 soluciones iguales o una raíz doble, x_1. La ecuación se puede factorizar como **$a (x - x_1)^2$**.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones o raíces reales. No se puede factorizar.

1.3. Suma y producto de la soluciones de una ecuación de 2º grado.

Dada una ecuación de 2º grado, **$ax^2 + bx + c = 0$** cuyas soluciones son x_1 y x_2. Se verifica que:

- La suma de las 2 soluciones es igual al coeficiente de x cambiado de signo, dividido por el coeficiente de x^2.

$$\boxed{s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

- El producto de las 2 soluciones es igual al término independiente dividido por el coeficiente de x^2.

$$\boxed{p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Caso particular

Si a = 1 $\quad$ $\mathbf{x^2 + bx + c = 0}$

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b}{1} = -b$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{1} = c$$

Por tanto:

Una ecuación de 2º grado cuyas soluciones son x_1 y x_2 se puede expresar como $\mathbf{x^2 - sx + p = 0}$ donde $\mathbf{s = x_1 + x_2}$ y $\mathbf{p = x_1 \bullet x_2}$

2. ECUACIONES BICUADRADAS

Una ecuación bicuadrada es una ecuación de grado 4 sin términos de grado 3 ni de grado 1.

Su expresión es de la forma $\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$ con a, b y c números reales y $a \neq 0$.

Para resolver ecuaciones de este tipo sustituímos x^2 por otra variable z y resolvemos la ecuación como una ecuación de 2º grado.

<u>Ejemplo</u>: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Llamamos $z = x^2$.

$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$

$(z)^2 - 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \qquad z_1 = 9 \qquad z_2 = 4$$

Deshaciendo el cambio:

Si $z_1 = 9$ $\quad x^2 = 9$ $\qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Si $z_2 = 4$ $\quad x^2 = 4$ $\qquad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

3. ECUACIONES RADICALES O IRRACIONALES

Ecuaciones radicales son aquellas en las que la incógnita aparece bajo el signo radical $\sqrt{\ }$.

Procedimiento para resolver ecuaciones radicales:

1. Se aisla un radical en uno de los miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque también tengan radicales.
2. Se elevan al cuadrado los 2 miembros.
3. Se resuelve la ecuación obtenida.
4. Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial, ya que al elevar al cuadrado una ecuación, se obtiene otra con más soluciones que la primera.

Ejemplos:

1. $\sqrt{x} + 2 = x$

$\sqrt{x} = x - 2$ paso 1.

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (x-2)^2$ paso 2.

$x = x^2 + 4 - 4x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ paso 3. ($x = 4$ y $x = 1$)

Paso 4.

Si $\mathbf{x = 4}$ $\sqrt{4} + 2 \overset{?}{=} 4 \Rightarrow 2 + 2 = 4$ SI (Solución válida)

Si $x = 1$ $\sqrt{1} + 2 \overset{?}{=} 4 \Rightarrow 1 + 2 \overset{?}{=} 4$ NO (Solución no válida)

2. $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

$\sqrt{2x-3} = 4 + \sqrt{x+7}$ paso 1.

$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = \left(4 + \sqrt{x+7}\right)^2$ paso 2.

$2x - 3 = 16 + (x+7) + 8\sqrt{x+7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$

$(x-26)^2 = \left(8\sqrt{x+7}\right)^2$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$

$x^2 - 116x + 228 = 0$ $x = 114$ $x = 2$

$\boxed{x = 114}$

$\sqrt{2 \cdot 114 - 3} - \sqrt{114 + 7} \overset{?}{=} 4 \Rightarrow 15 - 11 = 4$

(Solución válida)

$x = 2$

$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} - \sqrt{2 + 7} \overset{?}{=} 4 \Rightarrow 1 - 3 \overset{?}{=} 4$

(Solución no válida)

SISTEMAS DE ECUACIONES

1. SISTEMAS DE 3 ECUACIONES LINEALES CON 3 INCÓGNITAS

Para resolver un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, se transforma el sistema dado en uno equivalente que tenga 2 incógnitas.

Emplearemos el método de reducción.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x - y - 2z = -3 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right\}$$

Paso 1: Sumo la 2ª ecuación a la 1ª multiplicada por (–2):

$$\begin{array}{rl} -2x + 2y + 4z = 6 & (1^a \text{ ec. por } (-2)) \\ 2x + y + z = 3 & (2^a \text{ ec.}) \\ \hline 3y + 5z = 9 & (1) \end{array}$$

Paso 2: Sumo la 3ª ecuación a la 1ª multiplicada por (–1):

$$\begin{array}{rl} -x + y + 2z = 3 & (1^a \text{ ec. por } (-1)) \\ x + 2y + z = 0 & (3^a \text{ ec.}) \\ \hline 3y + 3z = 3 & (2) \end{array}$$

Simplificando $y + z = 1$ (2)

Paso 3: Resuelvo el sistema formado por (1) y (2)

$$\left.\begin{array}{l} 3y + 5z = 9 \\ y + z = 1 \end{array}\right\} z = 3 \quad y = -2$$

Paso 4: Despejo "x" en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo la (3ª)

$$x = -2y - z = -2(-2) - 3 = 1$$

Solución: $x = 1$ $y = -2$ $z = 3$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Si el sistema de ecuaciones no es lineal, no hay un procedimiento estándar para resolverlo. En general se emplea el método de sustitución.

Si existe una ecuación lineal, lo más aconsejable es aislar la incógnita en ella.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 65 \\ x \cdot y = 28 \end{array}\right\}$$

Despejo "x" en la 2ª ecuación: $x = \dfrac{28}{y}$

Sustituyo en la 1ª ecuación:

$$\left(\frac{28}{y}\right)^2 + y^2 = 65$$

$$\frac{784}{y^2} + y^2 = 65 \qquad \text{(Reduciendo a común denominador)}$$

$$784 + y^4 = 65y^2$$

$$y^4 - 65y^2 + 784 = 0 \text{ (Ec. bicuadrada } z = y^2\text{)}$$

$$z^2 - 65z + 784 = 0$$

Resolviendo queda z = 49 y z = 16

Si z = 49 $\rightarrow y = \pm\sqrt{49} = \pm 7 \rightarrow x = \pm 4$

Si z = 16 $\rightarrow y = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow x = \pm 7$

EJERCICIOS DE ECUACIONES DE 2º GRADO y BICUADRADAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $5x^2 - 2x = 3 - 3x^2$

b) $(x-1)^2 = 16$

c) $3 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 8x$

d) $(x-1) \cdot (x-2) - 12 = 0$

e) $3(x+1) - x(x-1) = 4x$

f) $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{5}{x-2}$

g) $x^2 - 6x - 6 = 0$

h) $15 = 4(3x^2 + 2x)$

i) $x^2 - 13x + 8 = 0$

j) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 49$

k) $\left(6x - \frac{2}{3}\right)x - 2\left(x - \frac{1}{9}\right) = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas de segundo grado:

a) $2x^2 - x = 0$

b) $4x^2 - 32x = 0$

c) $3x^2 - 48 = 0$

d) $23 = 9x^2 - 2$

e) $1 - 4x^2 = -8$

f) $9 = 3(x^2 - 1)$

g) $7x = 21x^2$

h) $5x^2 + 40x = 0$

i) $9x^2 + 26 = 3x^2 + 80$

j) $\dfrac{2x^2+4}{5} - \dfrac{3x^2-7}{3} = \dfrac{11}{15}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

c) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

d) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-1)(x-3)(x^2 + 4x - 2) = 0$

b) $(x-3)(x^2 + 2x + 12)(x^2 + 5) = 0$

c) $(x^2 - 3)(x+1)(x^2+1) = 0$

d) $(x^2 - 3x + 2)(x-3) = 0$

e) $(x^4 - 5x^2 - 6)(x+1) = 0$

f) $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$

g) $x^3 - 6x^2 - 16x = 0$

EJERCICIOS REPASO EC. 2º GRADO

(1) Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones: (en el cuaderno)

a) $\frac{x^2}{3} - 2 = 3x + \frac{x^2 - 12}{6}$ (Soluc: $x_1 = 0$, $x_2 = 18$)

b) $\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} = 1 - \frac{x + 7}{12}$ (Soluc: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$)

c) $\frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$
(Soluc: $x_1 = 0$, $x_2 = 13$)

d) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$ (Soluc: $x = \pm 3$)

e) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$
(Soluc. $x = \pm 2$)

f) $(2x+1)^2 = 1 + (x+1)(x-1)$
(Soluc: $x_1 = -1$, $x_2 = -1/3$)

g) $3x(x+4) - x(x-1) = 15$
(Soluc: $x_1 = -15/2$, $x_2 = 1$)

h) $\frac{x}{3}(x-1) - \frac{x}{4}(x+1) + \frac{3x+4}{12} = 0$
(Soluc: $x = 2$)

(2) Resuelve estas ecuaciones:

a) $x + 2 + 3x^2 = \frac{5x^2 + 6x}{2}$ (Soluc: $x = 2$)

b) $(x+2)^2 - 3 = 4x$ ($\nexists$ soluc)

c) $(x-3)(2x-5) + (x-1)(x-3) - 18 = 0$
(Soluc: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$)

d) $(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 8x$
(Soluc. $x_1 = -5/3$, $x_2 = 3$)

e) $2x + 3(x-4)^2 = 37 + (x-3)(x+3)$
(Soluc. $x_1 = 1$, $x_2 = 10$)

f) $2x(x+3) - 2(3x+5) + x = 0$
(Soluc: $x_1 = -5/2$, $x_2 = 2$)

g) $3x(2x+3) + x(x-4) + 2 = 2x(3x+1)$
(Soluc: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$)

h) $\frac{(x-1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x+1}{5} = 0$
($\nexists$ soluc)

(3) Halla el valor que debe tener c para que la ecuación $2x^2 + 12x + c = 0$ tenga solución única.
(Soluc: $c = 18$)

EJERCICIOS REPASO EC. BICUADRADA

1. Resuelve:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (Soluc: $x=\pm 2, x=\pm 1$)

b) $x^4 + x^2 + 2 = 0$ ($\nexists$ soluc)

c) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$ (Soluc: $x=\pm 3$)

d) $x^4 - 1 = 0$ (Soluc: $x=\pm 1$)

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ (Soluc: $x=\pm 3, x=\pm 1$)

b) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ (Soluc: $x=\pm 3$)

c) $x^4 - 4x^2 = 0$ (Soluc: $x=0, x=\pm 2$)

d) $x^4 + 1 = 0$ ($\nexists$ soluc)

e) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ (Soluc: $x=\pm \frac{1}{2}, x=\pm 2$)

f) $x^4 + x^2 = 0$ (Soluc: $x=0$)

g) $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$ (Soluc: $x=\pm\sqrt{5}, x=\pm 1/3$)

h) $x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4} = 0$ (Soluc: $x=\pm 1, x=\pm 1/2$)

i) $x^2(x^2 - 17) + 16 = 0$ (Soluc: $x=\pm 4, x=\pm 1$)

j) $x^4 + 100 = 29x^2$ (Soluc. $x=\pm 5, x=\pm 2$)

k) $x^4 - \frac{13}{36}x^2 + \frac{1}{36} = 0$ (Soluc: $x=\pm 1/2, x=\pm 1/3$)

l) $(2x^2+1)(x^2-3) = (x^2+1)(x^2-1) - 8$ (Soluc: $x=\pm\sqrt{3}, x=\pm\sqrt{2}$)

m) $\frac{1}{4}(3x^2-1)(x^2+3) - \frac{1}{3}(2x^2+1)(x^2-3) = 4x^2$ (Soluc: $x=\pm 1, x=\pm\sqrt{3}$)

EJERCICIOS REPASO

ECUACIONES CON RADICALES

EJERCICIO RESUELTO

Resolver la ecuación $\sqrt{3x+1} + 1 = x$.

$\sqrt{3x+1} = x - 1$ ← Se aísla el radical.

$(\sqrt{3x+1})^2 = (x-1)^2$ ← Se elevan al cuadrado los dos miembros.
¡Atención! Al elevar al cuadrado, pueden aparecer soluciones falsas. Por ello, **es imprescindible comprobar las soluciones** sobre la ecuación inicial.

$3x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 5x = 0$
- $x = 0 \rightarrow \sqrt{3 \cdot 0 + 1} + 1 = 2 \neq 0 \rightarrow x = 0$ no es solución.
- $x = 5 \rightarrow \sqrt{3 \cdot 5 + 1} + 1 = 5 \rightarrow x = 5$ sí es solución.

La única solución es $x = 5$.

Resuelve las siguientes ecuaciones, y comprueba las soluciones:

a) $x - \sqrt{2x-1} = 1 - x$ (Soluc: $x=1$, $x=1/2$)

b) $\sqrt{x^2 - 5x + 7} - 2x + 5 = x - 3$ (Soluc: $x=3$)

c) $\sqrt{3x+4} + 2x = 4$ (Soluc: $x=3/4$)

d) $x - \sqrt{7-3x} = 1$ (Soluc: $x=2$)

e) $\sqrt{5x+6} - 3 = 2x$ (Soluc: $x=-1$, $x=-3/4$)

f) $\sqrt{x^2-4} = \frac{x}{2} - 1$ (Soluc: $x=2$)

g) $1 - \sqrt{x-3} = x - 8$ (Soluc: $x=7$)

h) $3\sqrt{3x+4} - x = 5 + x$ (Soluc: $x=-1$, $x=11/4$)

EJERCICIOS DE ECUACIONES Y SISTEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $14x - (3x - 34) = 15x - (x - 7)$ **Sol:** $x = 9$

b) $12(x - 3) - 3(2x - 1) = -11 - 5x$ **Sol:** $x = 2$

c) $3(3x - 5) - 2(4 - 3x) - 4(1 - 2x) = 5(3x - 2) + 7$ **Sol:** $x = 3$

d) $2(4x + 1) - 4(5 - x) - 5 = 2(10 - x) - 12 + 3(5x - 7)$ **Sol:** $x = -10$

e) $2(x - 6)(x + 6) + 12 = (2x - 1)(x - 3)$ **Sol:** $x = 9$

f) $x(x - 9) - 4 = (x - 7)(x + 7)$ **Sol:** $x = 5$

g) $\dfrac{x + 8}{6 - x} = 13$ **Sol:** $x = 5$

h) $\dfrac{x - 2}{3 - x} = -\dfrac{5}{4}$ **Sol:** $x = 7$

i) $\dfrac{30 + x}{20 + x} = \dfrac{5}{4}$ **Sol:** $x = 20$

j) $\dfrac{x + 11}{6} - \dfrac{x + 5}{3} = 0$ **Sol:** $x = 1$

k) $\dfrac{x - 1}{2} - \dfrac{x - 2}{3} - \dfrac{x - 3}{4} = 0$ **Sol:** $x = 11$

l) $\dfrac{-3x - 3}{5} = 3 - 4(x + 2)$ **Sol:** $x = -\dfrac{22}{17}$

m) $\dfrac{5x + 7}{2} - \dfrac{3x + 9}{4} = \dfrac{2x + 4}{3} + 5$ **Sol:** $x = \dfrac{61}{13}$

n) $\dfrac{5x - 3}{7} - \dfrac{8 - x}{3} = \dfrac{7x}{2} - \dfrac{4}{5}(4x + 2)$ **Sol:** $x = 2$

o) $\dfrac{5(x - 3)}{4} - \dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{4x}{5} + 2x + 1$ **Sol:** $x = \dfrac{-265}{113}$

p) $\dfrac{5(x - 4) - 3(2 + x)}{2} = \dfrac{3(5x - 2)}{4} - 8x - 1$ **Sol:** $x = 2$

q) $2 - (3 - x) - \dfrac{x + 2}{3} = \dfrac{3 - x}{5} - (5 + x) + 1$ **Sol:** $x = -\dfrac{13}{14}$

r) $-1 - \left[\dfrac{x - 3}{2} - (x + 1)\right] = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{5x - 3}{12} + 3x$ **Sol:** $x = \dfrac{5}{11}$

s) $x - \dfrac{5(1 - x)}{3} = 8 + \dfrac{x - 2}{6} - \dfrac{5(2x - 1)}{30}$ **Sol:** $x = \dfrac{57}{17}$

t) $3\left(x - \dfrac{2}{3}\right) + 4(2x - 1) = \dfrac{x + 4}{7} - 2(x - 4)$ **Sol:** $x = \dfrac{17}{15}$

2. Resuelve los siguientes sistemas lineales por el método que consideres más adecuado:

a) $$\begin{cases} -2(x-2) = y-4 \\ 3y-2x = 0 \end{cases}$$ **Sol:** $x = 3$ $y = 2$

b) $$\begin{cases} -5(y-2) = x-2 \\ x-3y = -4 \end{cases}$$ **Sol:** $x = 2$ $y = 2$

c) $$\begin{cases} 3(x+y)-x+2y = 15 \\ 2x-(y+8) = -11 \end{cases}$$ **Sol:** $x = 0$ $y = 3$

d) $$\begin{cases} 3(x+2)-7(x+y) = 5 \\ 5(x+1)-y = 14 \end{cases}$$ **Sol:** $x = \frac{64}{39}$ $y = -\frac{31}{39}$

e) $$\begin{cases} \frac{x-y}{3}-\frac{2x+y}{2} = 0 \\ \frac{x+2y}{2}-\frac{x}{4} = -\frac{11}{4} \end{cases}$$ **Sol:** $x = 5$ $y = -4$

f) $$\begin{cases} \frac{6x-5y}{2} = 8x-3y \\ \frac{x-y}{3} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$ **Sol:** $x = \frac{1}{2}$ $y = 5$

g) $$\begin{cases} \frac{x+y-2}{x-y} = -\frac{1}{3} \\ \frac{2x+y-3}{2y-x} = -\frac{1}{11} \end{cases}$$ **Sol:** $x = -1$ $y = 5$

h) $$\begin{cases} \frac{3}{x-1}+\frac{4}{y-1} = 0 \\ \frac{5}{2x-3}-\frac{7}{2y+13} = 0 \end{cases}$$ **Sol:** $x = 4$ $y = -3$

i) $$\begin{cases} \frac{4y+1}{2}-\frac{3x+1}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{2x-1}{2}-\frac{4y-1}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$ **Sol:** $x = \frac{8}{3}$ $y = \frac{3}{2}$

j) $$\begin{cases} \frac{x+y-9}{2} = \frac{y-x-6}{3} \\ \frac{x-y}{2} = \frac{2y}{6}-\frac{x+y}{3} \end{cases}$$ **Sol:** $x = \frac{9}{4}$ $y = \frac{15}{4}$

EJERCICIOS DE SISTEMAS DE 3 INCOGNITAS Y NO LINEALES

1. Resuelve los siguientes sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 19 \\ 2x + y + 2z = 20 \\ 2x + 2y + z = 21 \end{array}\right\}$ **Sol:** x = 5 y = 4 z = 3

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = -4 \\ x - 2y + z = 6 \end{array}\right\}$ **Sol:** x = 1 y = –1 z = 3

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 4y + 3z = 11 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ x - y + 2z = 5 \end{array}\right\}$ **Sol:** x = 2 y = –1 z = 1

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + 2y + z = 4 \\ x + 3y + z = 0 \\ 5x + y + z = 12 \end{array}\right\}$ **Sol:** x = 2 y = –2 z = 4

e) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y + z = 27 \\ 3x + 2y + 4z = 13 \\ 2x + y - 2z = 7 \end{array}\right\}$ **Sol:** x = 1 y = 5 z = 0

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones **no** lineales:

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 9 \\ x \cdot y = 90 \end{array}\right\}$ **Sol:** $\begin{cases} x = 15 & y = 6 \\ x = -6 & y = -15 \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{array}\right\}$ **Sol:** $\begin{cases} x = 1 & y = 3 \\ x = 3 & y = 1 \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{l} x^2 + 13 = y + 8x \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\}$ **Sol:** $\{x = 3 \quad y = -2$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 10 \\ x \cdot y = 3 \end{array}\right\}$ **Sol:** $\begin{cases} x = 1 & y = 3 \\ x = -1 & y = -3 \\ x = 3 & y = 1 \\ x = -3 & y = -1 \end{cases}$

e) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x = 31 \end{array}\right\}$ **Sol:** $\begin{cases} x = 5 & y = 4 \\ x = -3 & y = -4 \end{cases}$

f) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ \sqrt{y^2 - x^2 + 4} = 3 \end{array}\right\}$ **Sol:** $\begin{cases} x = 2 & y = 3 \\ x = 22/3 & y = -23/3 \end{cases}$

PROBLEMAS DE ECUACIONES Y SISTEMAS

1. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados, 17 ¿Cuáles son esos números?

2. El perímetro de un rectángulo es 136 m y la diagonal mide 52 m. Halla el área del rectángulo.

3. Los lados de dos cuadrados difieren en 25 cm y las áreas en 2.425 cm^2. ¿Cuánto mide el lado de cada uno de los cuadrados?

4. Un grupo de estudiantes alquila un piso por 490 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 28 € menos. ¿Cuántos estudiantes son?

5. El área de un triángulo rectángulo es 120 m^2 y la hipotenusa mide 26 m ¿Cuáles son las longitudes de los catetos?

6. Al dividir un número de 2 cifras por el producto de las cifras, se obtiene un cociente igual a 2; y al dividir el número que resulta de invertir el orden de las cifras por la suma de éstas, el cociente obtenido es 7. ¿De qué número se trata?

7. La suma de un número y el recíproco de otro es igual a 10,25 y la suma del segundo y el recíproco del primero equivale a 4,1. ¿De qué números se trata?

8. Los lados paralelos de un trapecio miden 25 cm y 36 cm y los no paralelos 13 cm y 20 cm. Calcula la altura del trapecio.

9. Halla una fracción, de la que sabemos que es igual a 1 si le añadimos 7 al numerador y 2 al denominador. También sabemos que el producto de ámbos términos es 1254.

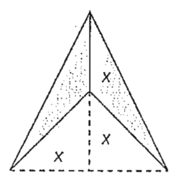
10. El lado de un rombo es 5 cm, y su área 24 cm^2. Calcula la longitud de sus diagonales.

FICHA DE REFUERZO: ECUACIONES Y SS. EE.

1. Determina para qué valores de t la ecuación $x^2 + tx + 16 = 0$ tiene:
   a) Dos soluciones distintas.
   b) Dos soluciones iguales.
   c) No tiene solución.

2. Resuelve y factoriza las siguientes ecuaciones:
   a) $x^2 + x - 12 = 0$
   b) $-x^2 + 10x + 11 = 0$
   c) $(2 + x)(5 - x) = 9 + 3x$
   d) $(1 + x)(6 - x) = 6x - 36$
   e) $x^2 - 16x + 63 = 0$
   f) $3x^2 - 2(x - 5)^2 - 22x + 26 = 0$

3. El área de la parte sombreada es de 144 cm². ¿Cuál es el valor de x?



4. Calcula b y c en la ecuación $3x^2 - bx + c = 0$ para que las soluciones sean $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.

5. La suma de dos números es 12, su producto 35. ¿Mediante qué ecuación de segundo grado se pueden obtener esos números? ¿Cuáles son?

6. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:
   a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
   b) $x^4 - 73x^2 + 576 = 0$
   c) $x^4 - 16 = 0$
   d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:
   a) $\sqrt{x + 3} + 2x = 30$
   b) $\sqrt{x + 1} + x = 11$
   c) $\sqrt{5x - 6} + 4 = x$
   d) $x + 3 + \sqrt{x + 5} = 10$

SOLUCIONES

1. a) Si $t < -8$ o $t > 8$ tiene dos soluciones distintas.
   b) Si $t = 8$ tiene dos soluciones iguales.
   c) Si $-8 < t < 8$ no tiene solución.

2. a) $x_1 = -4, x_2 = 3$
   $(x + 4)(x - 3) = 0$
   b) $x_1 = -1, x_2 = 11$
   $(x + 1)(x - 11) = 0$
   c) $x_1 = 1, x_2 = -1$
   $(x + 1)(x - 1) = 0$
   d) $x_1 = 6, x_2 = -7$
   $(x - 6)(x + 7) = 0$
   e) $x_1 = 7, x_2 = 9$, $(x - 7)(x - 9) = 0$
   f) $x_1 = -4, x_2 = 6$
   $(x + 4)(x - 6) = 0$

3. $x = 12$ cm

4. $b = 9$, $c = -12$

5. $x^2 - 12x + 35 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 7$

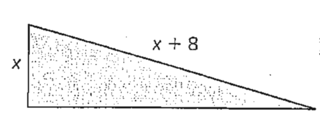
6. a) $1, -1, 2, -2$
   b) $3, -3, 8, -8$
   c) $-2, 2$
   d) $-2, 2, 3, -3$

7. a) $x = 13$
   b) $x = 8$
   c) $x = 11$
   d) $x = 4$

MÁS COMPLICADOS:

1. La suma de los inversos de dos números consecutivos es $\frac{15}{56}$. Halla dichos números.

2. Halla los lados del siguiente triángulo rectángulo:



3. La suma de los n primeros números enteros positivos viene dada por la fórmula $S = \frac{n + n^2}{2}$.
   a) ¿Cuántos números hay que tomar para que S sea 325?
   b) ¿Cuántos números hay que tomar para que S sea 1.275?

4. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:
   a) $\sqrt{x + 9} + \sqrt{x - 7} = \sqrt{4x}$
   b) $\sqrt{x + 4} - \sqrt{2x - 9} = \sqrt{x - 1}$

5. Resuelve los siguientes sistemas:
   a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ 2x^2 + y^2 = 44 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} y - x = 2 \\ 3x^2 + 2y^2 = 21 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. 7 y 8

2. 5, 12, 13

3. a) 25
   b) 50

4. a) $x = 16$
   b) $x = 5$

5. a) $x = 3$, $y = 1$
   b) $\begin{cases} x_1 = 2, \quad y_1 = 6 \\ x_2 = -\frac{70}{17} \quad y_2 = \frac{-54}{17} \end{cases}$
   c) $\begin{cases} x_1 = 1, \quad y_1 = 3 \\ x_2 = \frac{-13}{5} \quad y_2 = -\frac{3}{5} \end{cases}$

43 EJERCICIOS de POLINOMIOS

1. Calcular el **valor numérico del polinomio** P(x) para el valor de x indicado:

a) $P(x)=x^2+1$, para x=1

b) $P(x)=x^3+1$, para x=-1

c) $P(x)=x^2+x+2$, para x=2

d) $P(x)= -x^2-x-2$, para x= -2

*(Soluc: **a)** 2; **b)** 0; **c)** 8; **d)** -4)*

☞ *Ejercicios libro: **pág. 31: 7; pág. 42: 25***

2. En cada caso, hallar k para el valor numérico indicado:

a) $P(x)=2x^2-6x-k$, siendo P(1)=7
(Soluc: k= -11)

b) $P(x)= -2x^4-6x^3+5x-k$, siendo P(-2)=35
(Soluc: k= -29)

c) $P(x)=-\frac{1}{2}x^6-5x^4+5x^2-k$, siendo P(-4)=58
(Soluc: k= -3306)

d) $P(x)=-8x^4-\frac{1}{4}x^2-12x+k$, siendo P(1/2)=125
(Soluc: k=2105/16)

3. **Sumar** convenientemente **monomios semejantes**:

a) $2x-5x+7x+x=$

b) $3x^2-7x^2+x^2-2x^2=$

c) $2x^2y-3x^2y+5x^2y=$

d) $-3xy^2+xy^2-6xy^2+8xy^2=$

e) $3x^2y^2-xy^2+5x^2y-x^2y^2+2xy^2-x^2y=$

f) $-2x^3yz+3x^3yz+5x^3yz-x^3yz=$

g) $2ab^2-5a^2b-\frac{2}{3}ab^2-ab^2+\frac{1}{2}a^2b=$

h) $-2xy^3+3x^3y+5xy^3-xy^3=$

*(Soluc: **a)** 5x; **b)** $-5x^2$; **c)** $4x^2y$; **d)** 0; **e)** $2x^2y^2+4x^2y+xy^2$; **f)** $5x^3yz$; **g)** $\frac{1}{3}ab^2-\frac{9}{2}a^2b$; **h)** $2xy^3+3x^3y$)*

☞ *Ejercicios libro: pág. 30: 3a; pág. 42: 23a*

4. Dados $P(x)=2x^5-3x^4+3x^2-5$ y $Q(x)=x^5+6x^4-4x^3-x+7$, hallar P(x)+Q(x) y P(x)-Q(x)

(Soluc: $3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-x+2$; $x^5-9x^4+4x^3+3x^2+x-12$)

5. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) P(x)+Q(x)+R(x) *(Soluc: $6x^3+13x^2-5x+11$)*

b) P(x)-Q(x)-R(x) *(Soluc: $2x^3-x^2+x-5$)*

c) P(x)+3Q(x)-2R(x) *(Soluc: $10x^3-8x^2-x+22$)*

6. Efectuar los siguientes **productos** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $(-2x^3)\cdot\left(\frac{4}{5}x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)=$ *(Soluc: $-\frac{4}{5}x^6$)*

b) $\left(-\frac{5}{7}x^7\right)\cdot\left(\frac{3}{5}x^2\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}x\right)=$ *(Soluc: $\frac{4}{7}x^{10}$)*

c) $5x^3\cdot 3x^2y\cdot(-4xz^3)=$ *(Soluc: $-60x^6yz^3$)*

d) $-3ab^2\cdot 2ab\cdot(-\frac{2}{3}a^2b)=$ *(Soluc: $4a^4b^4$)*

e) $(3x^4-2x^3+2x^2+5)\cdot 2x^2=$ *(Soluc: $6x^6-4x^5+4x^4+10x^2$)*

f) $(-2x^5+3x^3-2x^2-7x+1)\cdot(-3x^3)=$ *(Soluc : $6x^8-9x^6+6x^5+21x^4-3x^3$)*

g) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}\right)\cdot 12x^2=$ *(Soluc : $8x^5-18x^4+\frac{48}{5}x^3-15x^2$)*

h) $\left(\frac{1}{2}ab^3-a^2+\frac{4}{3}a^2b+2ab\right)\cdot 6a^2b=$ *(Soluc : $3a^3b^4-6a^4b+8a^4b^2+12a^3b^2$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 42: 23b y 30***

7. **Extraer** el <u>máximo</u> **factor común** posible:

a) $4x^2-6x+2x^3$ *(Soluc: $2x(x^2+2x-3)$)*

b) $12x^4y^2+6x^2y^4-15x^3y$ *(Soluc: $3x^2y(4x^2y+2y^3-5x)$)*

c) $-3xy-2xy^2-10x^2yz$ *(Soluc: $xy(-3-2y-10xz)$)*

d) $-3x+6x^2+12x^3$ *(Soluc: $3x(4x^2+2x-1)$)*

e) $2ab^2-4a^3b+8a^4b^3$ *(Soluc: $2ab(b-2a^2+4a^3b^2)$)*

f) $2x^3+4x^2-8x$ *(Soluc: $2x(x^2+2x-4)$)*

g) $6x^3y^2-3x^2yz+9xy^3z^2$ *(Soluc: $3xy(2x^2y-xz+3y^2z^2)$)*

h) $-2x(x-3)^2+4x^2(x-3)$ *(Soluc: $2x(x-3)(x+3)$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 43: 38***

8. Efectuar los siguientes **productos**:

a) $(3x^2+5x-6)\ (8x^2-3x+4)=$ *(Soluc: $24x^4+31x^3-51x^2+38x-24$)*

b) $(5x^3-4x^2+x-2)\ (x^3-7x^2+3)=$ *(Soluc: $5x^6-39x^5+29x^4+6x^3+2x^2+3x-6$)*

c) $(2x^4-3x^2+5x)\ (3x^5-2x^3+x-2)=$ *(Soluc: $6x^9-13x^7+15x^6+8x^5-14x^4-3x^3+11x^2-10x$)*

d) $(ab^2+a^2b+ab)\ (ab-ab^2)=$ *(Soluc: $a^3b^2+a^2b^2-a^2b^4-a^3b^3$)*

e) $(-x^6+x^5-2x^3+7)\ (x^2-x+1)=$ *(Soluc: $-x^8+2x^7-2x^6-x^5+2x^4-2x^3+7x^2-7x+7$)*

f) $(x^2y^2-2xy)\ (2xy+4)=$ *(Soluc: $2x^3y^3-8xy$)*

g) $10\ (x-5+y-5)+(10-x)\ (10-y)=$ *(Soluc: xy)*

h) $(x^2-4x+3/2)\ (x+2)=$ *(Soluc: $x^3-2x^2-13x/2+3$)*

i) $(x^2+5x/2+35/3)\ (x-6)=$ *(Soluc: $x^3-7x^2/2-10x/3-70$)*

j) $(2x^2+4x+2)\ (x-1/2)=$ *(Soluc: $2x^3+3x^2-1$)*

9. Efectuar las siguientes **operaciones combinadas**:

a) $(2x^2+x+3/2)\ (2x^2-3)+8x+7/2=$ *(Soluc: $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1$)*

b) $(3x^3+5x^2/2-3x+13)\ (2x^2+2)-(-6x+24)=$ *(Soluc: $6x^5+5x^4+31x^2+2$)*

c) $(3x^2-6x+1)\ (x^3-2x/3+2)+14x/3=$ *(Soluc: $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2$)*

d) $-x/3+1/3+(2x^2-x/3-2/3)\ (3x^2+2)=$ *(Soluc: $6x^4-x^3+2x^2-x-1$)*

10. Dados los polinomios del ejercicio 5, hallar:

a) $[R(x)]^2$ **b)** $P(x)-Q(x)\cdot R(x)$ **c)** $P(x)\cdot[Q(x)+R(x)]$ **d)** $P(x)\cdot Q(x)\cdot R(x)$

(*Soluc:* ***a)*** *$49x^4-28x^3+18x^2-4x+1$;* ***b)*** *$-14x^5+4x^4+9x^3-45x^2+13x-4$;* ***c)*** *$8x^6+40x^5+26x^4+6x^3+75x^2-25x+24$*
d) *$56x^8+68x^7-72x^6+224x^5+244x^4-179x^3+225x^2-59x+21$*)

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 32: 8 y 9; pág. 42: 27 y 28***

11. Desarrollar, aplicando las **igualdades notables**:

a) $(x+2)^2=$
b) $(x-3)^2=$
c) $(x+2)\ (x-2)=$
d) $(3x+2)^2=$
e) $(2x-3)^2=$
f) $(5x+4)\ (5x-4)=$
g) $(x^2+5)^2=$
h) $(x^3-2)^2=$
i) $(x^2-1)\ (x^2+1)=$
j) $(2x^2+3x)^2=$
k) $(2x^2-3)^2=$
l) $(-x-3)^2=$
m) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=$
n) $\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2=$
o) $\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)=$
p) $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2=$
q) $\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right)^2=$
r) $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3}+2\right)=$
s) $\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2=$
t) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)=$
u) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2=$

(*Soluc:* ***m)*** $x^2+x+\frac{1}{4}$; ***n)*** $4a^2-6a+\frac{9}{4}$; ***o)*** $1-\frac{x^2}{4}$; ***p)*** $4x^2+3x+\frac{9}{16}$; ***q)*** $\frac{9}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{x^2}{16}$; ***r)*** $4-\frac{a^2}{9}$;
s) $\frac{9}{4}x^2-3+\frac{1}{x^2}$; ***t)*** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{9}$; ***u)*** $\frac{9}{4}x^2+\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}$)

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 32: 10a,b; pág. 34: 12; pág. 42: 31, 32 y 33***

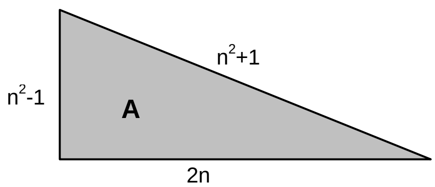
12. Operar y simplificar:

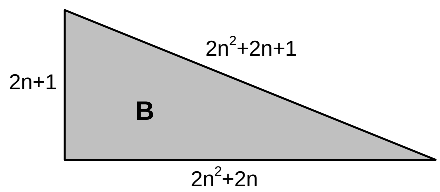
a) $(x+1)^2+(x-2)(x+2)=$
b) $(3x-1)^2-(2x+5)(2x-5)=$
c) $(2x+3)(-3+2x)-(x+1)^2=$
d) $(-x+2)^2-(2x+1)^2-(x+1)(x-1)=$
e) $-3x+x(2x-5)(2x+5)-(1-x^2)^2=$
f) $(3x-1)^2-(-5x^2-3x)^2-(-x+2x^2)(2x^2+x)=$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 42: 34***

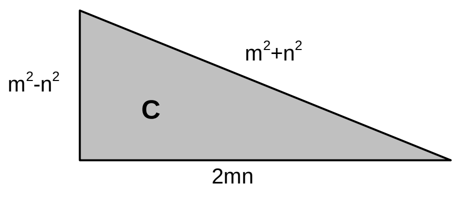
(*Soluc:* ***a)*** *$2x^2+2x-3$;* ***b)*** *$5x^2-6x+26$;* ***c)*** *$3x^2-2x-10$;* ***d)*** *$-4x^2-4x+4$;* ***e)*** *$-x^4+4x^3+2x^2-28x-1$;* ***f)*** *$-29x^4-30x^3+x^2-6x+1$*)

13. El matemático griego Pitágoras conocía las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, llamadas **ternas pitagóricas**, sin más que dar valores a $n\in \mathbb{N}$:



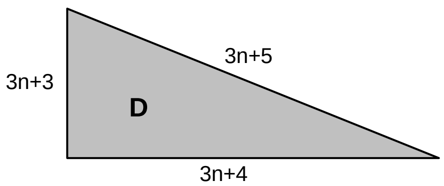


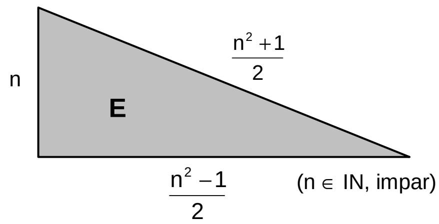
Por su parte, Euclides conocía la siguiente fórmula general, que engloba a las dos anteriores:



$(m,n\in \mathbb{N},\ m>n)$

Finalmente, he aquí otras dos ternas pitagóricas de autor desconocido:





Demostrar la veracidad de estas fórmulas. Generar algunos casos concretos.

14. Demostrar que $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

15. Desarrollar, aplicando el **triángulo de Tartaglia**:

a) $(x+2)^4$
b) $(x^2+3)^6$
c) $(2x^2+3y)^6$
d) $(2x^3+5)^5$
e) $(2x^4+5x)^5$
f) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$
g) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^5$
h) $(a-b)^5$
i) $(x-3)^3$
j) $(3x-2)^4$
k) $(x^2-3x)^5$
l) $(3x-2y)^6$
m) $(2x^2-4)^4$
n) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$
o) $(2-3x^2)^5$
p) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^4$
q) $(2x-3)^6$
r) $\left(\frac{x}{2}-3\right)^6$
s) $(-x-1)^4$
t) $(2x-1)^5$

☞ *Ejercicio libro: **pág. 32: 10c***

(*Sol:* ***a)*** $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$; ***b)*** $x^{12}+18x^{10}+135x^8+540x^6+1215x^4+1458x^2+729$;
c) $64x^{12}+576x^{10}y+2160x^8y^2+4320x^6y^3+4860x^4y^4+2916x^2y^5+729y^6$; ***d)*** $32x^{15}+400x^{12}+2000x^9+5000x^6+6250x^3+3125$;
e) $32x^{20}+400x^{17}+2000x^{14}+5000x^{11}+6250x^8+3125x^5$; ***f)*** $x^4+4x^2+6+4/x^2+1/x^4$; ***g)*** $x^5+5x^4/2+5x^3/2+5x^2/4+5x/16+1/32$;
h) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$; ***i)*** $x^3-9x^2+27x-27$; ***j)*** $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$;
k) $x^{10}-15x^9+90x^8-270x^7+405x^6-243x^5$; ***l)*** $729x^6-2916x^5y+4860x^4y^2-4320x^3y^3+2160x^2y^4-576xy^5+64y^6$;
m) $16x^8-128x^6+384x^4-512x^2+256$; ***n)*** $x^5-5x^4/2+5x^3/2-5x^2/4+5x/16-1/32$; ***p)*** $16x^4-32x^3/3+8x^2/3-8x/27+1/81$
r) $x^6/64-9x^5/16+134x^4/16-135x^3/2+1215x^2/4-729x+729$)

16. Efectuar los siguientes **cocientes** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $\frac{4x^3}{2x^2}=$
b) $\frac{8x^4}{-2x^2}=$
c) $\frac{7x^5}{2x^3}=$
d) $\frac{-8x^3}{2x^2}=$
e) $\frac{-3x^7}{-9x^4}=$
f) $\frac{6x^3y^4}{2x^2y}=$
g) $\frac{-9a^4b^3c^2}{3ab^2c}=$
h) $\frac{6x^5-9x^2+3x}{3x}=$
i) $\frac{-12x^4+6x^3-4x^2}{-2x^2}=$
j) $\frac{-6x^8-7x^4-\frac{3}{4}x^3}{-\frac{5}{3}x^3}=$
k) $\frac{-8x^9+\frac{3}{2}x^5-x^4}{-\frac{3}{7}x^4}=$
l) $(-18x^3yz^3)$**:**$(6xyz^3)=$
m) $\frac{-3a(a^3b)+5a^4b}{-a^2b}=$
n) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y}=$

(*Soluc:* ***h)*** $2x^4-3x+1$; ***i)*** $6x^2-3x+2$; ***j)*** $18x^6/5+21x/5+9/20$; ***k)*** $56x^6/3-7x/2+7/3$; ***l)*** $-3x^2$; ***m)*** $-2a^2$; ***n)*** $3x^2y^2/2$)

17. Efectuar los siguientes **cocientes**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado mediante la regla D=d·C+R:

a) $x^4-x^3+7x^2+x+15 \,\big|\, \underline{x^2+2}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-x+5$; $R(x)=3x+5$)*

b) $2x^5-x^3+2x^2-3x-3 \,\big|\, \underline{2x^2-3}$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x+1$; División exacta)*

c) $6x^4-10x^3+x^2+11x-6 \,\big|\, \underline{2x^2-4x+3}$ *(Soluc: $C(x)=3x^2+x-2$; División exacta)*

d) $x^3+2x^2+x-1 \,\big|\, \underline{x^2-1}$ *(Soluc: $C(x)=x+2$; $R(x)=2x+1$)*

e) $8x^5-16x^4+20x^3-11x^2+3x+2 \,\big|\, \underline{2x^2-3x+2}$ *(Soluc: $C(x)=4x^3-2x^2+3x+1$; División exacta)*

f) $x^4+3x^3-2x+5 \,\big|\, \underline{x^3+2}$ *(Soluc: $C(x)=x+3$; $R(x)=-4x-1$)*

g) $x^5-2x^4+3x^2-6 \,\big|\, \underline{x^4+1}$ *(Soluc: $C(x)=x-2$; $R(x)=3x^2-x-4$)*

h) $x^2 \,\big|\, \underline{x^2+1}$ *(Soluc: $C(x)=1$; $R(x)=-1$)*

i) $3x^6+2x^4-3x^2+5 \,\big|\, \underline{x^3-2x+4}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+8x-12$; $R(x)=13x^2-56x+53$)*

j) $x^8 \,\big|\, \underline{x^2+1}$ *(Soluc: $C(x)=x^6-x^4+x^2-1$; $R(x)=1$)*

k) $x^3-4x^2+5x-8 \,\big|\, \underline{x-2}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*

l) $2x^5+3x^2-6 \,\big|\, \underline{x+3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R(x)=-465$)*

m) $x^4-7x^3+8x^2-2 \,\big|\, \underline{x-1}$ *(Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)*

n) $3x^5-x^4+8x^2-5x-2 \,\big|\, \underline{x^2-x+1}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2-x+5$; $R(x)=x-7$)*

o) $5x^4-2x^3+x-7 \,\big|\, \underline{x^2-1}$ *(Soluc: $C(x)=5x^2-2x+5$; $R(x)=-x-2$)*

p) $4x^5-3x^3+5x^2-7 \,\big|\, \underline{2x^2-3x+5}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+3x^2-2x-8$; $R(x)=-14x+33$)*

q) $9x^3+3x^2-7x+2 \,\big|\, \underline{3x^2+5}$ *(Soluc: $C(x)=3x+1$; $R(x)=-22x-3$)*

r) $4x^4-3x^2+5x-7 \,\big|\, \underline{2x^2+x-3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2-x+2$; $R(x)=-1$)*

s) $4x^5+3x^3-2x^2+5 \,\big|\, \underline{2x^2-x+3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+x^2-x-3$; $R(x)=14$)*

t) $6x^4+5x^2-3x+8 \,\big|\, \underline{3x^3-2x-3}$ *(Soluc: $C(x)=2x$; $R(x)=9x^2+3x+8$)*

u) $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1 \,\big|\, \underline{2x^2-3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x+3/2$; $R(x)=8x+7/2$)*

v) $8x^4+3x^3+2x-2 \,\big|\, \underline{4x^2+x-3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/4+23/16$; $R(x)=21x/16+37/16$)*

w) $2x^5-x^3+3x-9 \,\big|\, \underline{2x^2-x+2}$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x^2/2-5x/4-9/8$; $R(x)=35x/8-27/4$)*

x) $6x^3-3x^2+2x-5 \,\big|\, \underline{3x-2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/3+8/9$; $R(x)=-29/9$)*

y) $4x^4-x^3+x+5 \,\big|\, \underline{2x^2-x+3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/2-11/4$; $R(x)=-13x/4+53/4$)*

z) $6x^4+3x^3-5x^2+x-8 \,\big|\, \underline{3x^2-5x+2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+13x/3+38/9$; $R(x)=121x/9-148/9$)*

α) $8x^4-3x^2+7x-5 \,\big|\, \underline{4x^2-3x+2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+3x/2-5/8$; $R(x)=17x/8-15/4$)*

β) $6x^5+5x^4+31x^2+2 \,\big|\, \underline{2x^2+2}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+5x^2/2-3x+13$; $R(x)=6x-24$)*

γ) $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2 \,\big|\, \underline{3x^2-6x+1}$ *(Soluc: $C(x)=x^3--2x/3+2$; $R(x)=14x/3$)*

δ) $6x^4-x^3+2x^2-x-1 \,\big|\, \underline{3x^2+2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2--x/3-2/3$; $R(x)=-x/3+1/3$)*

ε) $4x^4 \,\big|\, \underline{2x^2-1}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+1$; $R(x)=1$)*

ζ) $4x^4+x^3-x+1 \,\big|\, \underline{2x^2-1}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/2+1$; $R(x)=-x/2+2$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 33: 11; pág. 42: 29***

18. Inventar una división de polinomios cuyo cociente sea $C(x)=x^2-3x+1$, el resto sea $R(x)=x-1$ y el dividendo un polinomio de 4º grado.

19. Efectuar las siguientes divisiones mediante la **regla de Ruffini**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado:

a) $x^4-7x^3+8x^2-2 \;\underline{|\, x-1}$ *(Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)*

b) $x^3-4x^2+5x-8 \;\underline{|\, x-2}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*

c) $2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \;\underline{|\, x-2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+7x^2+10x+21$; $R=24$)*

d) $2x^5+3x^2-6 \;\underline{|\, x+3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R=-465$)*

e) $3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \;\underline{|\, x-4}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2+7x+8$; $R=37$)*

f) $2x^4-10x+8 \;\underline{|\, x+2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-4x^2+8x-26$; $R=60$)*

g) $10x^3-15 \;\underline{|\, x+5}$ *(Soluc: $C(x)=10x^2-50x+250$; $R=-1265$)*

h) $x^3-2x^2-13x/2+3 \;\underline{|\, x+2}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+3/2$; División exacta)*

i) $x^3-7x^2/2-10x/3-70 \;\underline{|\, x-6}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+5x/2+35/3$; División exacta)*

j) $x^4-2x^3/3+x^2/2+3x+1 \;\underline{|\, x+3}$ $\left(\textit{Soluc}: C(x)=x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{63}{2};\ R(x)=\frac{191}{2}\right)$

k) $x^3+2x^2+3x+1 \;\underline{|\, x-1}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+3x+6$; $R=7$)*

l) $x^4-2x^3+x^2+3x+1 \;\underline{|\, x-2}$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x+5$; $R=11$)*

m) $x^3+x^2+x+1 \;\underline{|\, x+1}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+1$; División exacta)*

n) $2x^4+x^3-2x^2-1 \;\underline{|\, x+2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-3x^2+4x-8$; $R=15$)*

o) $2x^4-7x^3+4x^2-5x+6 \;\underline{|\, x-3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-x^2+x-2$; División exacta)*

p) $x^5+1 \;\underline{|\, x-1}$ *(Soluc: $C(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$; $R=2$)*

q) $2x^3+3x^2-1 \;\underline{|\, x-1/2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+4x+2$; División exacta)*

r) $3x^3+2x^2+2x-1 \;\underline{|\, x-1/3}$ *(Soluc: $C(x)=3x^2+3x+3$; División exacta)*

s) $x^4+x^3-x^2+x-1 \;\underline{|\, x+2}$ *(Soluc: $C(x)=x^3-x^2+x-1$; $R=1$)*

t) $2x^3-x^2-x-3 \;\underline{|\, 2x-3}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+x+1$; División exacta)*

(Ayuda: Dividir entre 2 ambos términos)

u) $ax^3-3a^2x^2+2a^3x+1 \;\underline{|\, x-a}$ *(Soluc: $C(x)=ax^2-2a^2x$; $R=1$)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 35: 15; pág. 43: 39***

RECORDAR:

TEOREMA DEL RESTO: "El resto de la división de P(x) por x-a coincide con el valor numérico P(a)"

Ejemplo: Al efectuar la división de $P(x)=x^2+x-2$ entre x-1 se obtiene resto cero, como cabía esperar, puesto que $P(1)=0$

Utilidad: El th. del resto permite predecir, <u>sin necesidad de efectuar la división</u>, si se trata de una división exacta.

20. Comprobar el **teorema del resto** mediante las divisiones anteriores.

21. Dado $P(x)=2x^2-x-3$, comprobar si es divisible por x+1 o por x-2 mediante el teorema del resto. Comprobar a continuación efectuando la división ¿Cuál es el otro factor por el que es divisible?
(Soluc: SÍ; NO; 2x-3)

22. Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de **a** para que el resto de la división $-x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7 \;\underline{|\, x-3}$ sea -1; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división. *(Soluc: a=-3)*

23. Averiguar, sin efectuar la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

a) $x^3-3x^2+2x-10 \;\underline{|\, x-4}$ *(Soluc: NO)*

b) $x^3-x^2+x+14 \;\underline{|\, x+2}$ *(Soluc: SÍ)*

c) $x^6-1 \;\underline{|\, x-1}$ *(Soluc: SÍ)*

d) $x^5-3x^3+2x \;\underline{|\, x-4}$ *(Soluc: NO)*

24. Hallar, de dos formas distintas, el valor de **m** en cada caso para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $x^3+8x^2+4x+m \;\underline{|\, x+4}$ *(Soluc: m=-48)*

b) $2x^3-10x^2+mx+25 \;\underline{|\, x-5}$ *(Soluc: m=-5)*

c) $2x^4+mx^3-4x^2+40 \;\underline{|\, x-2}$ *(Soluc: m=-7)*

d) $mx^2-3x-744 \;\underline{|\, x-8}$ *(Soluc: m=12)*

e) $x^2+4x-m \;\underline{|\, x+3}$ *(Soluc: m=-3)*

f) $x^3-5x^2+m \;\underline{|\, x-1}$ *(Soluc: m=4)*

g) $5x^4+2x^2+mx+1 \;\underline{|\, x-3}$ *(Soluc: m=-424/3)*

h) $x^5-4x^3+mx^2-10 \;\underline{|\, x+1}$ *(Soluc: m=7)*

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x-a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x-a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como P(1)=0, podemos asegurar que P(x) es divisible por x-1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

(Nótese que el th. del factor es a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica)

25. Comprobar, sin efectuar la división, que $x^{99}+1 \;\underline{|\, x+1}$ es exacta. *(Soluc: Al hacer P(-1), sale 0)*

26. Comprobar que x^2-2x-3 es divisible por x-3 sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? *(Soluc: P(x)=(x-3)(x+1))*

27. Estudiar si $P(x)=x^2+x-2$ es divisible por x+2 y/o por x-3, sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? *(Soluc: divisible por x+2 pero no por x-3)*

28. Estudiar si $P(x)=x^5-32$ es divisible por x-2 sin efectuar la división (Comprobar el resultado obtenido haciendo la división). *(Soluc: Sí es divisible)*

29. Sin necesidad de efectuar la división, ¿podemos asegurar que el polinomio $P(x)=x^{50}+x^{25}-x-1$ es divisible por x-1? ¿Por qué?

30. **TEORÍA:** Razonar, mediante ejemplos, que el teorema del factor viene a ser a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS:

31. Dados los siguientes polinomios cuadráticos se pide:

i) Obtener sus raíces y comprobarlas.
ii) A partir de las raíces anteriores, factorizarlos.
iii) Comprobar dicha factorización.

a) x^2-5x+6 **b)** x^2-2x-8 **c)** x^2-6x+9 **d)** $4x^2+23x-6$ **e)** x^2+x+1 **f)** $6x^2-7x+2$

32. Dados los siguientes polinomios se pide**: i)** Obtener sus raíces por Ruffini. **ii)** Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x) **iii)** Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización:

a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ *(Soluc: x=-1,2,3)*

b) $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$ *(Soluc: x=-1,2,3,4)*

c) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$ *(Soluc: x=1doble,-3)*

d) $P(x)=x^4-2x^2+1$ *(Soluc: x=-1doble,1doble)*

e) $P(x)=6x^4+x^3-25x^2-4x+4$ *(Soluc: x=±2,-1/2,1/3)*

33. Sabiendo que una de sus raíces es x=1/2, factorizar $P(x)=2x^4-3x^3+3x^2-3x+1$

34. Dadas las siguientes ecuaciones polinómicas se pide:

i) Resolverlas por Ruffini.

ii) Comprobar las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación.

iii) A partir de sus raíces, factorizar el polinomio y comprobar dicha factorización.

a) $x^3-6x^2+11x-6=0$ *(Soluc: x=1,2,3)*

b) $x^3+x^2-9x-9=0$ *(Soluc: x=-1,-3,3)*

c) $x^4-2x^3-17x^2+18x+72=0$ *(Soluc: x=-2, ±3, 4)*

d) $x^4-x^3-13x^2+25x-12=0$ *(Soluc: x=-4, 1 doble, 3)*

e) $x^4-x^3+2x^2+4x-8=0$ *(Soluc: carece de raíces ε Q)*

f) $3x^3+x^2-8x+4=0$ *(Soluc: x=-2,1,2/3)*

g) $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$ *(Soluc: x=±1,±2,3)*

h) $x^4-5x^2+4=0$ *(Soluc: x=±1,±2) (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

i) $x^4+2x^3-5x^2-6x=0$ *(Soluc: x=-3,-1,0,2)*

j) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ *(Soluc: x=1, ±2, -3)*

k) $x^3-5x^2-5x-6=0$ *(Soluc: x=6)*

l) $x^5-2x^4-x+2=0$ *(Soluc: x=±1,2)*

m) $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$ *(Soluc: x=0,1,2,3)*

n) $6x^4+11x^3-28x^2-15x+18=0$ *(Soluc: x=-1,-3,2/3,3/2)*

o) $x^3+3x^2-10x-24=0$ *(Soluc: x=-4,-2,3)*

p) $x^3+2x^2-15x-36=0$ *(Soluc: x=-3 doble,4)*

q) $x^3-3x^2+3x-1=0$ *(Soluc: x=1 triple)*

35. Dados los siguientes polinomios, se pide:

i) Obtener sus raíces por Ruffini.

ii) Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x)

iii) Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización.

a) $P(x)=x^4+4x^3+7x^2+8x+4$ *(Soluc: x=-2,-1)*

b) $P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$ *(Soluc: x=-2,1/2,1/3)*

c) $P(x)=x^4-x^3+2x^2-4x-8$ *(Soluc: x=-1,2)*

d) $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ *(Soluc: x=2,3,±1)*

e) $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$ *(Soluc: x=1,2)*

f) $P(x)=x^4-5x^2+4$ *(También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

g) $P(x)=x^4-5x^2-36$ *(También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

h) $P(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3$ *(Soluc: x=-1,3)*

i) $P(x)=x^4-6x^2+7x-6$ *(Soluc: x=2,-3)*

j) $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$ *(Soluc: x=-1 doble,2,3)*

k) $P(x)=12x^4-25x^3+25x-12$ *(Soluc: x=±1,4/3,3/4)*

l) $P(x)=2x^4-x^3+6x^2-7x$ *(Soluc: x=0, 1)*

m) $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ *(Soluc: x=1)*

n) $P(x)=x^5-x^3-x^2+1$ *(Soluc: x=±1)*

o) $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+5x-6$ *(Soluc: carece de raíces ε Q)*

p) $P(x)=3x^4-9x^3-6x^2+36x-24$ *(Soluc: x=1,2 doble,-2)*

q) $P(x)=6x^4+11x^3-13x^2-16x+12$ *(Soluc: x=1, -2, 2/3, -3/2)*

r) $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$ *(Soluc: x=±1,-3 doble)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 37: 19; pág. 43: 55 y 57***

CONSECUENCIA:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: "Un polinomio de grado *n* tiene a lo sumo *n* raíces reales"

36. Resolver la ecuación $2x^3-3x^2=-\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es 1/2 *(Soluc: x=±1/2, 3/2)*

37. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x-2}=x$ *(Sol: x=2)*

38. ¿Serías capaz de resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x}-1$? Aunque es un poco complicada para este curso, puedes resolverla con los conocimientos ya adquiridos: tendrás que aplicar binomio de Newton y Ruffini… *(Sol: x=1)*

39. Resolver: **a)** $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ y-x^2=1\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=2)* **b)** $\left.\begin{array}{l}y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\\ y=\sqrt{x^3}\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1; y=1)*

40. Inventar una ecuación polinómica que tenga únicamente por soluciones x=-2, x=1 y x=3

41. Inventar, de dos formas distintas, una ecuación polinómica que tenga únicamente como raíces 1 y 2

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 43: 48, 50 y 52***

42. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: P(-1)=P(2)=P(-3)=0 y P(-2)=18

43. Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. *(Soluc: 1 raíz)*

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

■ Desarrollar las siguientes expresiones utilizando la identidad notable correspondiente, y simplificar. Obsérvense los primeros ejemplos:

1. $(x+5)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = \boxed{x^2 + 10x + 25}$

2. $(x-6)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6 + 6^2 = \boxed{x^2 - 12x + 36}$

3. $(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = \boxed{x^2 - 4}$

4. $(x+2)^2 =$ *(Soluc: x^2+4x+4)*

5. $(x-3)^2 =$ *(Soluc: x^2-6x+9)*

6. $(x+4)(x-4) =$ *(Soluc: x^2-16)*

7. $(x+3)^2 =$ *(Soluc: x^2+6x+9)*

8. $(x-4)^2 =$ *(Soluc: $x^2-8x+16$)*

9. $(x+5)(x-5) =$ *(Soluc: x^2-25)*

10. $(a+4)^2 =$ *(Soluc: $a^2+8a+16$)*

11. $(a-2)^2 =$ *(Soluc: a^2-4a+4)*

12. $(a+3)(a-3) =$ *(Soluc: a^2-9)*

13. $(2x+3)^2 =$ *(Soluc: $4x^2+12x+9$)*

14. $(3x-2)^2 =$ *(Soluc: $9x^2-12x+4$)*

15. $(2x+1)(2x-1) =$ *(Soluc: $4x^2-1$)*

16. $(3x+2)^2=$ *(Soluc: $9x^2+12x+4$)*

17. $(2x-5)^2=$ *(Soluc: $4x^2-20x+25$)*

18. $(3x+2)(3x-2)=$ *(Soluc: $9x^2-4$)*

19. $(4b+2)^2=$ *(Soluc: $16b^2+16b+4$)*

20. $(5b-3)^2=$ *(Soluc: $25b^2-30b+9$)*

21. $(b+1)(b-1)=$ *(Soluc: b^2-1)*

22. $(4a+5)^2=$ *(Soluc: $16a^2+40a+25$)*

23. $(5a-2)^2=$ *(Soluc: $25a^2-20a+4$)*

24. $(5a+2)(5a-2)=$ *(Soluc: $25a^2-4$)*

25. $(4y+1)^2=$ *(Soluc: $16y^2+8y+1$)*

26. $(2y-3)^2=$ *(Soluc: $4y^2-12y+9$)*

27. $(2y+3)(2y-3)=$ *(Soluc: $4y^2-9$)*

28. $(3x+4)^2=$ *(Soluc: $9x^2+24x+16$)*

29. $(3x-1)^2=$ *(Soluc: $9x^2-6x+1$)*

30. $(3x+4)(3x-4)=$ *(Soluc: $9x^2-16$)*

31. $(5b+1)^2=$ *(Soluc: $25b^2+10b+1$)*

32. $(2x-4)^2=$ *(Soluc: $4x^2-16x+16$)*

33. $(4x+3)(4x-3)=$ *(Soluc: $16x^2-9$)*

34. Carlos, un alumno de 3º de ESO, indica lo siguiente en un examen:

$$(x+2)^2=x^2+4$$

Razonar que se trata de un grave error. ¿Cuál sería la expresión correcta?

FRACCIONES ALGEBRAICAS EJERCICIOS

1. Utilizando identidades notables, desarrollar las siguientes expresiones:

a) $(x+2)^2$	**e)** $(3x-5)^2$	**i)** $(3x-2)^2$	**m)** $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$
b) $(x-2)^2$	**f)** $(3x+2)(3x-2)$	**j)** $(2x+5)(2x-5)$	**n)** $\left(x+\sqrt{2}\right)^2$
c) $(x+2)(x-2)$	**g)** $(ax+1)^2$	**k)** $(-1+2x)^2$	**o)** $(x^2+x+2)^2$
d) $(2x+3)^2$	**h)** $(ax-b)^2$	**l)** $(-2-x)^2$	

2. **a)** Razonar por qué $(A-B)^2$ y $(B-A)^2$ dan el mismo resultado. **b)** Ídem con $(A+B)^2$ y $(-A-B)^2$

3. Averiguar de qué expresiones notables proceden los siguientes polinomios (Fíjate en el 1^er^ ejemplo):

a) $x^2+2x+1=(x+1)^2$	**g)** $9-x^2$	**m)** $x^2+10x+25$	**s)** x^2-6x+9
b) x^2-4x+4	**h)** $x^2+2ax+a^2$	**n)** x^2-2	**t)** x^2-25
c) x^2-1	**i)** $3x^2+6x+3$	**o)** $4x^2-9$	**u)** $25x^2-16$
d) x^2+6x+9	**j)** x^2-a^2	**p)** $a^2x^2-2ax+1$	
e) $x^2-8x+16$	**k)** $a^2x^2-b^2$	**q)** x^4-16	
f) x^2-4	**l)** x^2-16	**r)** $4x^2+4x+1$	

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 34: 13; pág. 42: 35 y 36; pág. 43: 53*** *(pasar a identidad notable);* ***pág. 43: 54*** *(más elaborado)*

4. Utilizar **identidades notables** para simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ $\left(Soluc:\ 1+\dfrac{4}{x}\right)$

c) $\dfrac{2x+4}{2x-4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+2}{x-2}\right)$

d) $\dfrac{2x^2-2}{3x^2+6x+3}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x-2}{3x+3}\right)$

e) $\dfrac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+a}{m}\right)$

f) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy}$ $\left(Soluc:\ 1-\dfrac{y}{x}\right)$

g) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+2}{x-2}\right)$

h) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{x^3-x^2+x-1}\right)$

i) $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-a}{x+a}\right)$

j) $\dfrac{a^2x^2-1}{a^2x^2+2ax+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{ax-1}{ax+1}\right)$

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x-a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x-a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como $P(1)=0$, podemos asegurar que P(x) es divisible por x-1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

5. Utilizar el **teorema del factor** para simplificar, siempre que sea posible, las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{x+3}\right)$

b) $\dfrac{x-1}{2x^2-3x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{2x-1}\right)$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+3}{x+2}\right)$

d) $\dfrac{x^2-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{5x+9}\right)$

e) $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ $(Soluc:\ irreducible)$

f) $\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ $(Soluc:\ x-1)$

g) $\dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2}{x+2}\right)$

h) $\dfrac{x-3}{x^2+5x+6}$ $(Soluc:\ irreducible)$

i) $\dfrac{x-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{5x+9}\right)$

j) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)$

k) $\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x+3}{x+2}\right)$

l) $\dfrac{x^2-a^2-a}{x^2-a^2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+a+1}{x+a}\right)$

☞ *Ejercicio libro:* ***pág. 38: 20***

6. Averiguar, **factorizando** previamente numerador y denominador, si es posible simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

c) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$ $(Soluc:\ irreducible)$

d) $\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2-x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

e) $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-3}{x+1}\right)$

f) $\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+1}$ $(Soluc:\ irreducible)$

g) $\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-4x^2+x+6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}\right)$

h) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$ $(Soluc:\ x-1)$

i) $\dfrac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

j) $\dfrac{x^3-x^2-10x-8}{x^2+3x-4}$ $(Soluc:\ irreducible)$

k) $\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+4x^2+x-6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-3}{x+3}\right)$

l) $\dfrac{4x^3+7x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{4x-1}{x+1}\right)$

m) $\dfrac{2x^3-x^2-8x+4}{x^3+8}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-2x+4}\right)$

n) $\dfrac{4x^3-2x^2-4x+2}{2x^3-5x^2+4x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x+2}{x-1}\right)$

o) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{2x^3-5x^2+4x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{x-1}\right)$

p) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-3x^2+4x-12}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2-1}{x^2+4}\right)$

q) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{x-1}\right)$

r) $\dfrac{4x^3-8x^2-x+2}{2x^3-x^2-8x+4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x+1}{x+2}\right)$

s) $\dfrac{x^2-4}{x^3-7x-6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-2}{x^2-2x-3}\right)$

7. Efectuar las siguientes sumas y restas reduciendo previamente a común denominador y dando el <u>resultado simplificado</u> (NOTA: Con un ***** se indican aquellos casos en los que, al final del proceso de sumas y restas de F.A., se obtiene una expresión que se puede simplificar):

a) $\dfrac{3}{2x+4}+\dfrac{2x}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{7x-6}{2x^2-8}\right)$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^3}-\dfrac{2x}{x^2+7}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{-x^4+6x^2-7}{x^5+7x^3}\right)$

c) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-x-2}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x^2-x-1}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

d) $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{2x^2+8}{x^2-4}\right)$

e) $\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{x+1}{4x-8}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x^2+11x+2}{4x^2-16}\right)$

f) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{4x}{x^2-1}\right)$

*** g)** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{2}{x+1}\right)$

h) $1-\dfrac{x}{y}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{y-x}{y}\right)$

i) $x-\dfrac{x^2-1}{x}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{1}{x}\right)$

j) $\dfrac{3x-2}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x-1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x^2+6x}{x^2-1}\right)$

k) $\dfrac{7x}{6x+12}-\dfrac{x+5}{2x^2-8}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{7x^2-17x-15}{6x^2-24}\right)$

l) $\dfrac{x+3}{x^2+1}+\dfrac{2x}{x-3}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{2x^3+x^2+2x-9}{x^3-3x^2+x-3}\right)$

m) $\dfrac{3x}{x^2-1}-\dfrac{x+2}{x+1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{-x^2+2x+2}{x^2-1}\right)$

n) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x^2-1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x^2+x+2}{x^2-1}\right)$

o) $\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}+\dfrac{2x-5y}{x-y}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{2x^2-5y^2-3xy+x+2y}{x^2-y^2}\right)$

p) $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x-z}{xz}\right)$

q) $x+\dfrac{1}{x}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x^2+1}{x}\right)$

r) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$

*** s)** $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x^2+4x+8}{(x+2)^2(x-2)}+\dfrac{1}{x^2-4}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{1}{x^2+4x+4}\right)$

*** t)** $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{6x-x^2}{x^2-4}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{1}{x-2}\right)$

*** u)** $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x+3}{x^2+x-2}+\dfrac{1}{x+2}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{1}{1-x}\right)$

v) $\dfrac{x-1}{x^2-4}-\dfrac{x-2}{x^2+2x}+\dfrac{1}{x-2}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x^2+5x-4}{x^3-4x}\right)$

*** w)** $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{12}{x^2-4}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{2x+3}{x+2}\right)$

x) $\dfrac{x-2}{x^2+x-2}-\dfrac{x+1}{x^2-4}+\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$ $\left(\textit{Sol}: \dfrac{x^2+x+11}{x^3-x^2-4x+4}\right)$

y) $\dfrac{x^2-x+9}{x^3-9x}+\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{1}{x+3}\right)$

z) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{1-x}{x^2-1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{5x^2+7x}{x^2-1}\right)$

α) $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x+1}{x-1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x^4+7x^3-2x^2+5x-3}{x^4-1}\right)$

β) $\dfrac{3}{2x-4}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{2}{x+2}\right)$

*** γ)** $\dfrac{x-x^2}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{x^2+2x+1}-\dfrac{1-2x}{1+x}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{3x}{x+1}\right)$

δ) $\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{2x+1}{x^2-1}+\dfrac{x}{(x+1)^2}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{3x^3+3x^2+3x+1}{x^4+x^3-x^2-x}\right)$

ε) $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{1}{x^2-11x+30}+\dfrac{1}{x^2-10x+24}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x-7}{x^3-15x^2+24x-120}\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 44: 58 a 61***

8. Efectuar los siguientes productos y cocientes, dando el resultado simplificado:

a) $\dfrac{3x-1}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{2x}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{3x-1}{2x^2-6x}\right)$

b) $\dfrac{x+1}{x^2-2}:\dfrac{x^2+2}{x-1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x^2-1}{x^4-4}\right)$

c) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x+2}}{\dfrac{x+1}{x+3}}=$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x+3}{x+2}\right)$

d) $\dfrac{\dfrac{3x+1}{x^2-4}}{\dfrac{x}{x^2-4x+4}}=$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{3x^2-5x-2}{x^2+2x}\right)$

e) $\dfrac{3x-1}{x^2}\cdot\dfrac{x+1}{x^5}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{3x^2+2x-1}{x^7}\right)$

f) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x^2-2}}{\dfrac{x-1}{x^2+2}}=$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x^3+x^2+2x+2}{x^3-x^2-2x+2}\right)$

g) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}}=$ $(\textit{Soluc}: 1)$

h) $\dfrac{\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}}{\dfrac{x-a}{x+a}}=$ $(\textit{Soluc}: x^2-2ax+a^2)$

i) $\dfrac{9\,\dfrac{x+2y}{3}+6z}{3}=$ $(\textit{Soluc}: x+2y+2z)$

j) $\dfrac{\dfrac{x}{3}}{x-\dfrac{x}{3}}=$ $(\textit{Soluc}: 1/2)$

k) $\frac{A}{B}(1-B)+A=$ $(Soluc: \ A/B)$

l) $\dfrac{\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}}{\dfrac{5x^2-5x}{2x+6}}=$ $\left(Soluc: \ \frac{x+1}{5x}\right)$

m) $\dfrac{\dfrac{2}{a}-1}{\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{2}}=$ $(Soluc: \ a-2)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 44: 62, 64 y 65***

9. Efectuar las siguientes operaciones combinadas con F.A. y simplificar:

a) $\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}\right)=$ $\left(Soluc: \ \frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-2}\ \frac{x-1}{x+1}=$ $\left(Soluc: \ \frac{2x^3-2x^2-2x}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{a-b}\right)\frac{a+b}{ab}=$ $\left(Soluc: \ -\frac{2}{a-b}\right)$

d) $\frac{xy}{x^2-y^2}:\frac{x-y}{y}+\frac{y}{x-y}=$ $\left(Soluc: \ \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 39: 22; pág. 44: 63, 66 y 67***

10. Demostrar que: **a)** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$ **b)** $\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}=a\cdot b$

- Para dividir un polinomio, $P(x)$, entre otro, $Q(x)$, de la forma $(x - a)$, puede utilizarse la regla de Ruffini.

- **Teorema del resto**

  Sea $P(x)$ un polinomio y $Q(x)$ un binomio de la forma $(x - a)$; el resto obtenido al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ es el valor numérico de $P(x)$ en $x = a$, es decir, $P(a)$.

- **Teorema del factor**

  Un polinomio tiene como factor $(x - a)$; es decir, $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, si $P(a) = 0$.

  Si a es una solución del polinomio $P(x)$, entonces $P(x)$ es igual al producto del factor $(x - a)$ por otro polinomio $Q(x)$. Es decir, si $P(a) = 0$, entonces $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.

EJEMPLOS

1. Divide los polinomios $P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 2x + 12$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 5$.

Resolución

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & & +\ 5x^2 & -\ 2x & +\ 12 & \ x^2 - 3x + 5 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & +\ 9x^3 & -\ 15x^2 & & & \ 3x^2 + 9x + 17 \\ \cline{1-5}
 & 9x^3 & -\ 10x^2 & -\ 2x & +\ 12 & \\
 & -9x^3 & +\ 27x^2 & -\ 45x & & \\ \cline{2-5}
 & & 17x^2 & -\ 47x & +\ 12 & \\
 & & -17x^2 & +\ 51x & -\ 85 & \\ \cline{3-5}
 & & & 4x & -\ 73 & \\
\end{array}
$$

Dividendo: $P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 2x + 12$

Divisor: $Q(x) = x^2 - 3x + 5$

Cociente: $C(x) = 3x^2 + 9x + 17$

Resto: $R(x) = 4x - 73$

2. Divide los polinomios $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 2$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 5$.

Resolución

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\ 5x^2 & -\ 2x & +\ 2 & \ x^2 - 3x + 5 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\ 3x^2 & -\ 5x & & \ x + 8 \\ \cline{1-4}
 & 8x^2 & -\ 7x & +\ 2 & \\
 & -8x^2 & +\ 24x & -\ 40 & \\ \cline{2-4}
 & & 17x & -\ 38 & \\
\end{array}
$$

Dividendo: $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 2$

Divisor: $Q(x) = x^2 - 3x + 5$

Cociente: $C(x) = x + 8$

Resto: $R(x) = 17x - 38$

3. Divide los polinomios $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 12$ y $Q(x) = x - 1$ utilizando la regla de Ruffini.

Resolución

	3	0	5	−2	12	→ grado 4
1		3	3	8	6	
	3	3	8	6	18	→ grado 3

Cociente: $C(x) = 3x^3 + 3x^2 + 8x + 6$ Resto: $R(x) = 18$

4. Divide los polinomios $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2$ y $Q(x) = x + 2$ utilizando la regla de Ruffini.

Resolución

	3	−2	0	2	→ grado 3
−2		−6	16	−32	
	3	−8	16	−30	→ grado 2

Cociente: $C(x) = 3x^2 - 8x + 16$ Resto: $R(x) = -30$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula: $(x^2 + x + 1)^2$.

2. Divide, utilizando la regla de Ruffini, los siguientes polinomios:

$$(x^4 - 3x^2 + 1) : (3x + 1)$$

3. Efectúa la siguiente división utilizando la regla de Ruffini:

$$(x^3 - x^2 + 1) : (x + 2)$$

4. Efectúa la siguiente división utilizando la regla de Ruffini:

$$(2x^3 - 4x^2 + 5x - 6) : (3x + 2)$$

5. Efectúa la siguiente división:

$$(x^4 - 2x^2 + 1) : (x^2 - 1)$$

6. Efectúa la siguiente división utilizando la regla de Ruffini:

$$(x^3 - 1) : (x - 1)$$

7. Divide, utilizando la regla de Ruffini e indica cociente y resto:

$$(2x^3 - 4x^2 + 1) : (3x + 4)$$

8. Mediante la regla de Ruffini, efectúa la siguiente división:

$$(3x^5 + 2x + 1) : (x + 1)$$

9. Mediante la regla de Ruffini, efectúa la siguiente división:

$$(x^9 + x^5 + 1) : (x - 1)$$

10. Mediante la regla de Ruffini, efectúa la siguiente división:

$$(x^6 + 5x^4 - 3x^2 + 1) : (2x - 4)$$

11. Realiza la división euclídea, indicando el polinomio cociente y el resto:

$$(x^3 + 4x^2 + 6) : (x - 4)$$

12. Realiza la división euclídea, indicando el polinomio cociente y el resto:

$$(x^3 + 1) : (x + 1)$$

13. Realiza la división euclídea, indicando el polinomio cociente y el resto:

$$(x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x - 4) : (x^2 - x + 2)$$

14. Divide los siguientes polinomios:

$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 12x - 6$

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

15. Halla el resto de la división de:

$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 12x - 6$ entre $x - 3$

16. Halla el resto de la división de:

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ entre $x - 2$

EJEMPLOS

1. Calcula todas las raíces de $P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ y factorízalo.

Resolución

Las posibles raíces enteras de $P(x)$ son los divisores de 4; es decir: ±1, ±2, ±4. Hallamos el valor numérico del polinomio con cada uno de ellos y para el primer número que se anule aplicamos la regla de Ruffini.

Como $P(1) = 1 - 6 + 13 - 12 + 4 = 0$, aplicamos la regla de Ruffini:

	1	−6	13	−12	4	→	grado 4
1		1	−5	8	−4		
	1	−5	8	−4	0		

Con lo que podemos descomponer el polinomio del siguiente modo:

$P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x - 1) \cdot (x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$

En el segundo factor de $P(x)$ repetimos el proceso. Los divisores del término independiente 4 son: ±1, ±2, ±4. Hallamos el valor numérico del polinomio con cada uno de ellos.

Como $P(1) = 1 - 5 + 8 - 4 = 0$, aplicamos la regla de Ruffini:

	1	−5	8	−4	→	grado 3
1		1	−4	4		
	1	−4	4	0		

Con lo que $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = (x - 1) \cdot (x^2 - 4x + 4)$

Así, se tiene:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 4x + 4)$$

A este último factor, $(x^2 - 4x + 4)$, como es de grado 2, le aplicamos la fórmula de la resolución de las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4\sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

Con lo que: $(x^2 - 4x + 4) = (x - 2) \cdot (x - 2)$

Por tanto, la factorización pedida es:

$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)^2$

2. Encuentra, simplificando, una fracción equivalente a $\dfrac{x^5 - x}{x^3 + 4x^2 - 5x}$.

Resolución

Se descomponen factorialmente los polinomios del numerador y del denominador y luego se simplifican los factores comunes:

$$\frac{x^5 - x}{x^3 + 4x^2 - 5x} = \frac{x \cdot (x^4 - 1)}{x \cdot (x^2 + 4x - 5)} = \frac{x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 5)} = \frac{(x^2 + 1) \cdot (x + 1)}{x + 5}$$

3. Utilizando el m.c.m., calcula: $\dfrac{2x - 3}{x^2 - x} + \dfrac{x}{x^2 - 1} - \dfrac{x - 3}{x + 1}$

Resolución

Factorizamos los denominadores, calculamos el m.c.m. y operamos:

$$\frac{2x - 3}{x^2 - x} + \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x - 3}{x + 1} = \frac{(x + 1) \cdot (2x - 3) + x^2 - (x - 3) \cdot (x - 1)}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)} =$$

$$= \frac{2x^2 - 3x + 2x - 3 + x^2 - x^3 + 4x^2 - 3x}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)} =$$

$$= \frac{-x^3 + 7x^2 - 4x + 3}{x^3 - x}$$

4. Simplifica la siguiente fracción: $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

Resolución

Factorizamos numerador y denominador, y operamos:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{(x-1)^3}{x \cdot (x-1)^2} = \frac{x-1}{x}$$

5. Calcula: $\dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{x}{x + 2} + \dfrac{3}{x^2 - 2x}$

Resolución

Factorizamos los denominadores y operamos:

$$\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{x}{x + 2} + \frac{3}{x^2 - 2x} = \frac{1}{(x-2) \cdot (x+2)} - \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x \cdot (x-2)} =$$

$$= \frac{x - x^2 \cdot (x-2) + 3(x+2)}{x \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 4x + 6}{x^3 - 4x}$$

6. Opera y simplifica: $x + \dfrac{2}{x - \dfrac{4}{x}} - \dfrac{x-1}{x-2}$

Resolución

$$x + \frac{2}{x - \dfrac{4}{x}} - \frac{x-1}{x-2} = x + \frac{2}{\dfrac{x^2-4}{x}} - \frac{x-1}{x-2} = x + \frac{2x}{x^2-4} - \frac{x-1}{x-2} =$$

$$= \frac{x \cdot (x^2 - 4) + 2x - (x-1) \cdot (x+2)}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{x^3 - 4x + 2x - x^2 + x - 2x + 2}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2) \cdot (x^2 + x + 2)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{x^2 + x + 2}{x + 2}$$

7. Simplifica la fracción: $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 4x - 6}$

Resolución

Factorizamos numerador y denominador, y operamos:

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 4x - 6} = \frac{(x+1) \cdot (x+4)}{2(x-3) \cdot (x+1)} = \frac{x+4}{2(x-3)}$$

8. Calcula: $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Resolución

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2 - 1}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1) - 1}{x^2 + 1} = \frac{-4x - 1}{x^2 + 1}$$

EJERCICIOS DE INECUACIONES

REPASO DE DESIGUALDADES:

1. Dadas las siguientes desigualdades, indicar si son V o F utilizando la recta real. Caso de ser inecuaciones, indicar además la solución mediante la recta IR y mediante intervalos:

a) $4>-3$	**c)** $4\geq 6$	**e)** $3\leq 3$	**g)** $x\leq -3$
b) $5<-6$	**d)** $3<3$	**f)** $x>0$	**h)** $2x<8$

2. Razonar, operando, que la desigualdad $\frac{1}{9}-\frac{5}{12}\geq -\frac{1}{4}$ es falsa. Comprobarlo con la calculadora.

3. Dada la inecuación $2x>5$, estudiar si los siguientes números pueden ser solución: $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5/2$. Indicar, a continuación, su solución general.

INECUACIONES DE 1^er^ GRADO:

4. Dada la inecuación $3x+1>x+5$ se pide, por este orden:

a) Comprobar si son posibles las soluciones $x=5$, $x=0$, $x=-1$

b) Resolverla y dibujar en la recta real la solución.

5. Resolver las siguientes inecuaciones simples:

a) $7x\leq 14$	**d)** $-5x\geq -15$	**g)** $20\leq -20x$ *(Sol: $x\leq -1$)*	**j)** $3x<-3$ *(Sol: $x\leq -1$)*
b) $-2x>6$	**e)** $10\leq 5x$	**h)** $-11<-11x$ *(Sol: $x<1$)*	**k)** $-2<-2x$ *(Sol: $x\leq 1$)*
c) $3x\leq -9$	**f)** $-14\geq 7x$	**i)** $-5x\geq 5$ *(Sol: $x\leq -1$)*	**l)** $-7x\leq -7$ *(Sol: $x\geq 1$)*

6. Resolver las siguientes inecuaciones y representar la solución en la recta real:

a) $2x+6\leq 14$ *(Sol: $x\leq 4$)*	**g)** $5+3x<4-x$ *(Sol: $x<-1/4$)*	**m)** $12(x+2)+5<3(4x+1)+3$ *(Sol: ∄ soluc.)*
b) $3x-4\geq 8$ *(Sol: $x\geq 4$)*	**h)** $2x-3>4-2x$ *(Sol: $x>7/4$)*	**n)** $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+3$ *(Sol: $\forall x\in IR$)*
c) $4x+7\leq 35$ *(Sol: $x\leq 7$)*	**i)** $6x-3<4x+7$ *(Sol: $x<5$)*	**o)** $x(x-1)>x^2+3x+1$ *(Sol: $x<-1/4$)*
d) $3x+5<x+13$ *(Sol: $x<4$)*	**j)** $3x-1<-2x+4$ *(Sol: $x<1$)*	**p)** $(x+2)(x+3)<(x-1)(x+5)$ *(Sol: $x<-11$)*
e) $5-3x\geq -3$ *(Sol: $x\leq 8/3$)*	**k)** $2x+9>3x+5$ *(Sol: $x<4$)*	**q)** $2(x+3)+3(x-1)>2(x+2)$ *(Sol: $x>1/3$)*
f) $4-2x\geq x-5$ *(Sol: $x\leq 3$)*	**l)** $2(x-3)+5(x-1)\geq -4$ *(Sol: $x\geq 1$)*	☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 70: 1a,b; pág. 78: 8, 10, 12***

7. Resolver las siguientes inecuaciones, quitando previamente los denominadores:

a) $\frac{x-1}{2}-\frac{x-4}{3}<1$ *(Sol: $x<1$)*

b) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}>5-\frac{x}{6}$ *(Sol: $x>5$)*

c) $\frac{2x-4}{3}+\frac{3x+1}{3}<\frac{2x-5}{12}$ *(Sol: $x<7/18$)*

d) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}>x-2$ *(Sol: $x<6$)*

e) $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}>\frac{x+14}{2}-2$ *(Sol: $x>4$)*

f) $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}>2+\frac{3x-1}{15}$ *(Sol: x<3)*

g) $\frac{3x-3}{5}-\frac{4x+8}{2}<\frac{x}{4}-3x$ *(Sol: x<92/27)*

h) $\frac{x-1}{2}-x<\frac{1-x}{4}-3$ *(Sol: x>9)*

i) $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{8}-\frac{8-10x}{45}>0$ *(Sol: x>109/110)*

j) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0$ *(Sol: x>6)*

k) $4x-\frac{3-2x}{4}<\frac{3x-1}{3}+\frac{37}{12}$ *(Sol: x<1)*

l) $\frac{2x+3}{4}>\frac{x+1}{2}+3$ *(Sol: ∄ soluc.)*

m) $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}>\frac{5x-36}{4}-1$ *(Sol: x<8)*

n) $\frac{x}{18}-\frac{2x+1}{12}\geq\frac{2-4x}{24}$ *(Sol: x≥3)*

o) $1-\frac{3x-7}{5}>\frac{5x+4}{15}-\frac{x-1}{3}$ *(Sol: x<3)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 70: 1c,d,e,f; pág. 78: 9***

INECUACIONES DE 2º GRADO:

8. Resolver las siguientes inecuaciones y representar la solución en la recta real:

a) $x^2-6x+8\geq0$ *[Sol: x∈(-∞,2]U[4,∞)]*

b) $x^2-2x-3<0$ *[Sol: x∈(-1,3)]*

c) $x^2-5x+6>0$ *[Sol: x∈(-∞,2)U(3,∞)]*

d) $x^2-3x-10\leq0$ *[Sol: x∈[-2,5]]*

e) $3x^2-10x+7\geq0$ *[Sol: x∈(-∞,1]U[7/3,∞)]*

f) $2x^2-16x+24<0$ *[Sol: x∈(2,6)]*

g) $x^2-4x+21\geq0$ *[Sol: ∀x∈IR]*

h) $x^2-3x>0$ *[Sol: x∈(-∞,0)U(3,∞)]*

i) $x^2-4\geq0$ *[Sol: x∈(-∞,-2]U[2,∞)]*

j) $x^2-4x+4>0$ *[Sol: x∈IR-{2}]*

k) $x^2+6x+9\geq0$ *[Sol: ∀x∈IR]*

l) $x^2-2x+1<0$ *[Sol: ∄ soluc.]*

m) $x^2-4x+4\leq0$ *[Sol: x=2]*

n) $6x^2-5x-6<0$ *[Sol: x∈(-2/3,3/2)]*

o) $x^2-9x+18<0$ *[Sol: x∈(3,6)]*

p) $x^2-4x+7<0$ *[Sol: ∄ soluc.]*

q) $x^2-2x+6\leq0$ *[Sol: ∄ soluc.]*

r) $2x^2+8x+6<0$ *[Sol: x∈(-3,-1)]*

s) $2x^2+10x+12\leq0$ *[Sol: x∈[-3,-2]]*

t) $-x^2+5x-4\geq0$ *[Sol: x∈[1,4]]*

u) $x^2\geq4$ *[Sol: x∈(-∞,-2]U[2,∞)]*

v) $(x+2)(x-5)>0$ *[Sol: x∈(-∞,-2)U(5,∞)]*

w) $(x-3)(x-1)<0$ *[Sol: x∈(1,3)]*

x) $(4x-8)(x+1)>0$ *[Sol: x∈(-∞,-1)U(2,∞)]*

y) $(2x-4)3x>0$ *[Sol: x∈(-∞,0)U(2,∞)]*

z) $x^2<9$ *[Sol: x∈(-3,3)]*

α) $9x^2-16>0$ *[Sol: x∈(-∞,-4/3)U(4/3,∞)]*

β) $3x^2+15x+21<0$ *[∄ soluc.]*

γ) $2x^2-5x+2<0$

δ) $-2x^2+5x+3>0$

ε) $x^2-9x+20\leq0$

ζ) $-2x^2+2x+15<0$

η) $x^2-5x+4>0$ *[Sol: x∈(-∞,1)U(4,∞)]*

θ) $3x^2-4x<0$ *[Sol: x∈(0,4/3)]*

ι) $x^2+16\geq0$

κ) $2x^2-8>0$

λ) $x^2+x+1\geq0$

μ) $-4x^2+12x-9\leq0$ *[Sol: ∀x∈IR]*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 72: 3; pág. 79: 18 y 19***

9. Resolver las siguientes inecuaciones de 2º grado reduciéndolas previamente a la forma general:

a) $x(x+3)-2x>4x+4$ *[Sol: x∈(-∞,-1)U(4,∞)]*

b) $(x-1)^2-(x+2)^2+3x^2\leq-7x+1$ *[Sol: x∈[-4/3,1]]*

c) $x(x^2+x)-(x+1)(x^2-2)>-4$ *[Sol: x>-3]*

d) $(2x-3)^2\leq 1$ *[Sol: $x\in[1,2]$]*

e) $4x(x+39)+9<0$ $\left[Sol: x\in\left(-\frac{39}{2}-3\sqrt{42},-\frac{39}{2}+3\sqrt{42}\right)\right]$

f) $-x(x+2)+3\geq 0$ *[Sol: $x\in[-3,1]$]*

g) $(3x-2)^2+5x^2\geq(3x+2)(3x-2)$ *[Sol: $\forall x\in IR$]*

h) $4x(x+3)+(x+2)(x-2)>(2x+3)^2+x-1$ *[Sol: $x\in(-\infty,-3)U(4,\infty)$]*

i) $(2x+3)(2x-3)+5x>2(x+1)-1$ *[Sol: $x\in(-\infty,-2)U(5/4,\infty)$]*

j) $(2x+2)(2x-2)\leq(x+1)^2+2(x+1)(x-1)$ *[Sol: $x\in[-1,3]$]*

k) $(2x+3)(2x-3)\leq(2x-3)^2+30x$ *[Sol: $x\geq -1$]*

l) $(2x-3)^2+x^2>(3x+1)(3x-1)-6$ *[Sol: $x\in(-4,1)$]*

m) $(x+3)(x-3)-(x-2)^2<6+x(x-5)$ $\left[Sol: x\in\left(-\infty,\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)U\left(\frac{9+\sqrt{5}}{2},\infty\right)\right]$

n) $(2x+1)(x+1)\leq(x+2)(x-2)+3$ *[Sol: $x\in[-2,-1]$]*

o) $\frac{(2x+1)(2x-1)}{6}-\frac{(x+1)^2}{9}\leq\frac{x(7x-8)-1}{18}$ *[Sol: $x\in[-2,2/3]$]*

p) $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(x+1)(x-1)}{3}<\frac{4x^2-19x+31}{6}$ *[Sol: $x\in(-3,2)$]*

q) $\frac{(x+2)(x-2)}{12}+\frac{2x+1}{18}-\frac{6-5(x-2)}{6}\leq\frac{3(x-1)^2+11}{36}$ *[Sol: $x\leq 3$]*

r) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{(x-3)^2}{3}\geq\frac{x(11-x)}{6}$ *[Sol: $x\in(-\infty,-8]U[6,\infty)$]*

s) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{5x+6}{6}<\frac{(x+3)(x-3)}{3}+6$ *[Sol: $x\in(0,7)$]*

t) $\frac{(x-2)(x+4)}{2}-\frac{(x-2)^2}{6}\geq x-2$ *[Sol: $x\in(-\infty,-4]U[2,\infty)$]*

u) $\frac{(x+1)(x-1)+3}{3}-\frac{(x-1)^2+2x}{4}\leq 1-\frac{x+7}{12}$ *[Sol: $x\in[-1,0]$]*

v) $\frac{(3x+1)(3x-1)}{6}+4x-5\geq\frac{(x+2)(x-2)}{2}+\frac{11}{6}$ *[Sol: $x\in(-\infty,-5]U[1,\infty)$]*

w) $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{2x+1}{6}\geq 1-\frac{(x+1)(x-1)}{2}$ *[Sol: $x\in(-\infty,-4/5]U[2,\infty)$]*

x) $\frac{(x+1)(x-1)}{2}-\frac{(x^2+3)(x^2-3)}{6}=\frac{1}{3}$ *[Sol: $x\in(-\infty,-1)U(4,\infty)$]*

☞ *Ejercicios libro: **pág. 72: 4; pág. 79: 17, 20 y 21** (sin denominadores); **pág. 79: 22** (más elaborados)*

10. ¿Por qué no se puede hacer lo siguiente: $x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$? ¿Cuál sería la forma correcta de proceder?

INECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO >2:

11. Resolver las siguientes inecuaciones aplicando el método más apropiado en cada caso:

a) $x^3-5x^2+2x+8\geq 0$ *[Sol: x∈[-1,2]U[4,∞)]*

b) $x^3-x^2-6x<0$ *[Sol: x∈(-∞,-2)U(0,3)]*

c) $x^3-2x^2-5x+6\geq 0$ *[Sol: x∈[-2,1]U[3,∞)]*

d) $x^4-1>0$ *[Sol: x∈(-∞,-1)U(1,∞)]*

e) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{x^2}{2}<\frac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4}-2$ *[Sol: x∈(-∞,-2)U(2,∞)]*

f) $x^3-6x^2+32\leq 0$ *[Sol: x∈(-∞,-2]]*

g) $x^3-7x-6\geq 0$ *[Sol: x∈[-2,-1]U[3,∞)]*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 73: 5b; pág. 79: 24, 25 y 28***

INECUACIONES FACTORIZADAS:

12. Resolver las siguientes inecuaciones aplicando el método más apropiado en cada caso:

a) $(x^2-x-2)\,(x^2+9)>0$ *[Sol: x∈(-∞,-1)U(2,∞)]*

b) $(x^2+2x-15)\,(x+1)<0$ *[Sol: x∈(-∞,-5)U(-1,3)]*

c) $(2x+8)\,(x^3-4x)\,(x^2-4x+4)\leq 0$ *[Sol: x∈[-4,-2]U[0,2]]*

d) $x^2\,(x-2)\leq 0$ *[Sol: x∈(-∞,2]]*

e) $x^2\,(x-2)\leq 0$ *[Sol: x∈(-∞,0)U(0,2)]*

f) $(x+1)^2\,(x-3)<0$ *[Sol: x∈(-∞,-1)U(-1,3)]*

g) $x^2\,(2x-5)\,(x+2)\geq 0$ *[Sol: x∈[-∞,-2]U[5/2,∞)]*

h) $(x-3)\,(x+5)\,(x^2+1)>0$ *[Sol: x∈(-∞,-5)U(3,∞)]*

i) $(x+2)^2\,(x-3)^2>0$

j) $(x-5)\,(x^2+4)\leq 0$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 79: 26 y 27***

SISTEMAS DE INECUACIONES DE 1^er GRADO:

13. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones de 1^er grado con una incógnita, indicando la solución de dos formas distintas: mediante intervalos, y representando en la recta real:

a) $\left.\begin{array}{r}-2x-6\leq 0\\ 3x+3\leq 0\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[-3,-1]]*

b) $\left.\begin{array}{r}1-x<2-3x\\ 3+x<2+5x\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈ (1/4,1/2)]*

c) $\left.\begin{array}{r}2x+6\leq 0\\ -x+1\leq 0\end{array}\right\}$ *[∄soluc.]*

d) $\left.\begin{array}{l}3x<9\\ x\geq \frac{1}{2}\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[1/2,3)]*

e) $\left.\begin{array}{r}2x+5<3x\\ -x+8<4\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(5,∞)]*

f) $\left.\begin{array}{r}2x>8\\ 2x\leq 4\end{array}\right\}$ *[∄soluc.]*

g) $\left.\begin{array}{r}2x\geq 4x-2\\ 5x-4<6x-1\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(-3,1]]*

h) $\left.\begin{array}{r}3x-5\geq 2x-6\\ 4x+1<2x+7\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[-1,3)]*

i) $\left.\begin{array}{r}7x+2>4x+5\\ 5x-1\leq 3x+3\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(1,2]]*

j) $\left.\begin{array}{r}3x-1<5x-5\\ x\geq 2x+1\end{array}\right\}$ *[∄soluc.]*

k) $\left.\begin{array}{r}2x+1\leq x+3\\ 2x+3\leq 3x+1\end{array}\right\}$ *[Sol: x=2]*

l) $\left.\begin{array}{r}5x+2\geq 4x+5\\ 3x-7<x+3\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[3,5)]*

m) $\left.\begin{array}{r}3x+2\geq x-4\\ 5-x\geq -2\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[-3,7]]*

n) $\left.\begin{array}{r}2(x-3)+6\geq 2x\\ x+5\leq 3x+2-2x+7\end{array}\right\}$ *[Sol: ∀x∈IR]*

o) $\left.\begin{array}{r}2(x-3)+6>2x\\ x+5\leq 3x+2-2x+7\end{array}\right\}$ *[∄soluc.]*

p) $\left.\begin{array}{r}4x+1<2x+9\\ x+8<5-2x\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(-∞,-1)]*

q) $\left.\begin{array}{r}5-x\leq 4x-4\\ 1-2x\geq -3\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[9/5,2]]*

r) $\left.\begin{array}{r}3(2x-1)-(5+2x)\geq -3\\ 2[3(x-5)-x+1]<1\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[5/4,29/4)]*

s) $\left.\begin{array}{l}(2x-3)^2-(x+1)(x-1)\leq 3x^2\\ (x+2)^2-(x-2)^2>2x+1\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[5/6,∞)]*

t) $\left.\begin{array}{l}2x-10>-x+2\\ 12-4x>-3x+2\\ 3(x+2)\geq 2(x+6)\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(6,10)]*

u) $\left.\begin{array}{l}2x+\frac{x}{4}\leq\frac{9}{4}-\frac{x-1}{2}\\ 2x-1-2(2x+1)<1\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(-2,1]]*

v) $\left.\begin{array}{l}2(3x-1)-(2+4x)>x\\ 2-\frac{3x+1}{2}\leq x-\frac{x+2}{3}\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[1,∞)]*

w) $\left.\begin{array}{l}\frac{2x-3}{2}-\frac{x-1}{3}>6\\ \frac{x-5}{4}+\frac{x}{8}\leq 2\end{array}\right\}$ *[∄ soluc.]*

x) $\left.\begin{array}{l}\frac{2(3x-5)}{3}-\frac{3(x-2)}{2}>1\\ \frac{2x+3(x-1)}{2}\geq x-1\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(8/3,∞)]*

y) $\left.\begin{array}{l}2(x+1)+2x\geq 3x+1-(x+3)\\ 2(2x+1)-2<3(x+1)-x\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[-2,3/2)]*

z) $\left.\begin{array}{l}5x+\frac{4x}{3}+2>\frac{10x}{3}+5\\ 2-\frac{x-3}{4}\leq 1-\frac{x}{2}\end{array}\right\}$ *[∄ soluc.]*

α) $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{2}-\frac{6-x}{4}<x+1\\ 3-\frac{5x-1}{10}\geq\frac{x-1}{5}-\frac{x-3}{2}\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(-10,9]]*

β) $\left.\begin{array}{l}\frac{x-1}{2}+\frac{2(x+1)}{5}\geq -1\\ \frac{3x+1}{4}-\frac{x}{6}<2\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[-1,3)]*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 78: 13 y 14*** *(sin denominadores)****;*** ***pág. 71: 2; pág. 78: 15*** *(con denominadores)*

(*) γ) $\left.\begin{array}{l}x(x-1)\leq 6\\ x^2+(x+2)(x-2)>(x+2)(x-1)\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[5/6,∞)]*

(*) δ) $\left.\begin{array}{l}x(x-1)<2\\ 5(x+1)\geq 4(x+2)-2\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[1,2)]*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 75: 7*** *(no lineales*

14. Considerar el sistema $\left.\begin{array}{l}-6-x<-3x+2\\ 2x+8<5-x\end{array}\right\}$ ¿Cómo podemos saber, sin resolverlo, si x=-2 y x=3 son solución?

[Sol: SÍ; NO]

15. Resolver las siguientes **inecuaciones con cocientes**:

a) $\frac{x-1}{x-4}>0$ *[Sol: x∈(-∞,1)U(4,∞)]*

b) $\frac{2x-3}{x+1}\geq 1$ *[Sol: x∈(-∞,-1)U[4,∞)]*

c) $\frac{5x-8}{x-3}\leq 4$ *[Sol: x∈[-4,3)]*

d) $\frac{3}{2x-6}\geq 2$ *[Sol: x∈(3,15/4]]*

e) $2<\frac{x+6}{x-2}$ *[Sol: x∈(2,10)]*

f) $\frac{5}{x+3}<0$ *[Sol: x∈(-∞,-3)]*

g) $\frac{-3}{2x-6}\geq 0$ *[Sol: x∈(-∞,3)]*

h) $\frac{x+3}{2x-1}>-\frac{1}{2}$ *[Sol: x∈(-∞,-5/4)U(1/2,∞)]*

i) $\frac{x+3}{x-7}\leq 2$ *[Sol: x∈(-∞,7)U[17,∞)]*

j) $\frac{x+3}{x-7}\leq\frac{1}{2}$ *[Sol: x∈[-13,7)]*

k) $\frac{x}{x+5}>x$ *[Sol: x∈(-∞,-5)U(-4,0)]*

l) $1\leq\frac{2x+3}{x-1}$ *[Sol: x∈(-∞,-4]U(1,∞)]*

☞ *Ejercicios libro: pág. 74: 6a,b,c; pág. 80: 29 y 31 (sencillos)****; pág. 74: 6d,e,f; pág. 80: 30***

16. ¿Por qué no se puede hacer $\frac{x-1}{x-4}>0\Rightarrow x-1>0$? ¿Cómo se resuelve correctamente?

__NOTA__: **Las inecuaciones de 1er grado con dos incógnitas y los sistemas de inecuaciones de 1er grado con dos incógnitas los resolveremos gráficamente al final del curso, cuando veamos el tema de rectas.**

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

RECUERDA

Al sumar o restar cualquier número en los dos miembros de una desigualdad, el signo de la desigualdad se mantiene.

Al multiplicar o dividir los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, se invierte el signo de la desigualdad.

Ejemplos: $3 < 5 \rightarrow 3 - 7 < 5 - 7 \rightarrow -4 < -2$. Verdadero

$3 < 5 \rightarrow 3(-2) < 5(-2) \rightarrow -6 < -10$ falso. $\rightarrow -6 > -10$

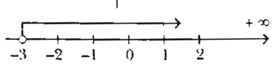
EJERCICIO RESUELTO

Resolver la inecuación $x + 1 - 3(x + 1) < 1 - x$.

$x + 1 - 3x - 3 < 1 - x \rightarrow x - 3x + x < 1 - 1 + 3 \rightarrow -x < 3 \rightarrow x > -3$

Las soluciones de la inecuación son los números mayores que -3.

Solución: $(-3, +\infty)$



1 Resuelve las siguientes inecuaciones y representa sus soluciones en la recta numérica:

a) $2x - 3 < x - 1$ (Soluc: $x<2$)

b) $3x + 4 > 1 - 2x$ (Soluc: $x>-3/5$)

c) $\frac{3x-2}{2} \leq \frac{2x+7}{3}$ (Soluc: $x\leq 4$)

d) $\frac{3x}{5} - x > -2$ (Soluc: $x<5$)

e) $\frac{x-2}{3} - \frac{3x-1}{5} \leq \frac{17}{15}$ (Soluc: $x\geq -6$)

f) $\frac{5x-2}{3} \geq \frac{x-5}{-4}$ (Soluc: $x>1$)

2 Di si cada uno de los números $0, -2, \frac{9}{4}$ y 17 es solución de algunas de las inecuaciones del ejercicio anterior.

3 Comprueba que todos los números reales son soluciones de esta inecuación:

$5(x-2) - 4(2x+1) < -3(x+3)$

4 Resuelve la inecuación $\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} \geq \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3}$. (Soluc: $x\leq -1$)

Expresa las soluciones en forma de intervalo y represéntalas en la recta numérica.

5 Comprueba que no hay ningún número que verifique esta inecuación:

$12(x+2) + 5 < 3(4x+1) + 3$

6 Resuelve la inecuación:

$$\frac{2(3-x)}{3} + \frac{1}{6}(2x+1) \geq -2 + 3\left(1 - \frac{x}{3}\right)$$ (Soluc: $x\geq -7/4$)

INECUACIONES

INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Una **inecuación** es una desigualdad entre expresiones algebraicas en las que aparecen una o varias incógnitas en algunos de sus miembros.

Resolver una inecuación es determinar el conjunto de valores que verifican la desigualdad. A dicho conjunto se le denomina **solución.**

1 Propiedades

- Si se suma o resta un mismo número o incógnita a ambos miembros de una desigualdad, el conjunto solución no varía.
- Si se multiplica o divide una desigualdad por un mismo número positivo, el conjunto solución no varía. Si dicho número es negativo, el conjunto solución no varía siempre que cambiemos el sentido de la desigualdad.

EJEMPLOS

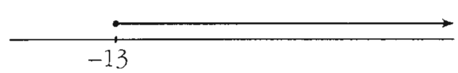
1. **Resuelve la inecuación $-x - 3 \leq 10$.**

Resolución

El primer paso consiste en operar hasta que en un miembro esté la incógnita y en el otro miembro un número:

$$-x - 3 \leq 10 \;\Rightarrow\; -x \leq 10 + 3 \;\Rightarrow\; x \geq -13$$

La solución de esta inecuación está formada por todos los números mayores o iguales que -13, es decir, el intervalo $[-13, +\infty]$ es la solución de la inecuación.



2. **Resuelve la inecuación $2(x - 3) \leq 4(x - 2) + 10$.**

Resolución

El primer paso consistirá en simplificar la expresión del primer y el segundo miembro:

$$2(x - 3) \leq 4(x - 2) + 10 \;\Rightarrow\; 2x - 6 \leq 4x - 8 + 10 \;\Rightarrow\; 2x - 6 \leq 4x + 2$$

Reagrupamos convenientemente para dejar la incógnita en el segundo miembro y operamos:

$$-6 - 2 \leq 4x - 2x \;\Rightarrow\; -8 \leq 2x \;\Rightarrow -\frac{8}{2} \leq x \;\Rightarrow\; -4 \leq x$$

La solución de esta inecuación está formada por todos los números mayores o iguales que -4, es decir, el intervalo $[-4, +\infty]$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determina si el número -9 es solución de cada una de las siguientes inecuaciones:

   a) $x \leq 0$ (Soluc: sí) b) $2x \leq -18$ (Soluc: sí)

   c) $2(x - 5) \geq 2x - 2$ (Soluc: NO) d) $(x + 9) > 0$ (Soluc: NO)

2. Resuelve la inecuación $2(x - 5) \geq 3$. (Soluc: $x \geq 13/2$)

3. Resuelve la inecuación $2x - 3 \geq 2$. (Soluc: $x \geq 5/2$)

4. Resuelve la inecuación $2x - 5 < -2$. (Soluc: $x < 3/2$)

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una inecuación de segundo grado es una expresión del tipo:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

El signo de la desigualdad puede ser $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Para resolverla:

Se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Se representan sobre la recta real las soluciones de la ecuación y se estudia el signo de la ecuación en los intervalos que se determinan. Se selecciona el intervalo o unión de intervalos donde se verifica la desigualdad inicial.

EJEMPLOS

1. Resuelve la inecuación $2x^2 - 16x + 24 < 0$.

Resolución

Para resolver inecuaciones de segundo grado, se calculan las raíces de la ecuación asociada:

$$2x^2 - 16x + 24 < 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 < 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

Se obtienen las soluciones $x = 2$ y $x = 6$.

Representamos las soluciones encontradas en la recta real:

	$(-\infty, 2)$	$(2, 6)$	$(6, \infty)$
signo $(x^2-8x+12)$	+	−	+

Seleccionamos el conjunto solución y como la inecuación pide el conjunto de números reales donde el polinomio es negativo, la solución es el intervalo (2, 6).

[soluc: $x \in (2, 6)$]

2. Resuelve la inecuación de segundo grado $x^2 + 4x + 3 > 0$.

Resolución

Buscamos las soluciones de la ecuación asociada a esta inecuación; es decir, resolvemos la ecuación $x^2 + 4x + 3 = 0$.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $x^2 + 4x + 3$:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
Signo $(x^2 + 4x + 3)$	+	−	+

Puedes observar que los intervalos en los que se verificca que el polinomio es mayor que cero son $(-\infty, -3)$ y $(-1, +\infty)$.

La solución general de esta inecuación de segundo grado será la unión de las soluciones obtenidas, es decir:

$$\boxed{\text{Soluc: } x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelve la inecuación:
[Soluc: $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$] $x^2 - 6x + 8 > 0$

2. Resuelve la inecuación:
[Soluc: $x \in (3, 5)$] $x^2 - 8x + 15 \le 0$

3. Resuelve la inecuación:
[Soluc: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$] $x^2 - 4x + 3 > 0$

4. Resuelve la inecuación:
[Soluc: $x \in (2, 3)$] $x^2 - 5x + 6 < 0$

5. Resuelve la inecuación:
[Soluc: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$] $(2x - 3)^2 > 1$

6. Resuelve la inecuación: (Soluc: $x \in [-2, 3]$)
$x^2 - x - 6 \le 0$

7. Resuelve la inecuación: [Soluc: $x \in (-\infty, 2-\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5}, \infty)$]
$x^2 - 4x + 1 \ge 2$

8. Resuelve la inecuación: [Soluc: $x \in (2, 3)$]
$x^2 - 5x + 2 < -4$

9. Resuelve la inecuación: [Soluc: $x \in (-6, -2)$]
$x^2 + 8x < -12$

10. Resuelve la inecuación: [Soluc: $x \in (-\infty, 3] \cup [6, \infty)$]
$x^2 - 8x - 1 \ge x - 19$

EJEMPLOS

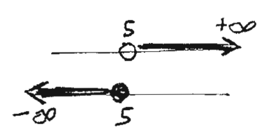
1. **Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:**

$$\begin{cases} 3x - 4 > x + 6 \\ 2x + 3 \le x - 2 \end{cases}$$

<u>Resolución</u>

Se resuelve cada inecuación por su lado:

$$\begin{cases} 3x - 4 > x + 6 \\ 2x + 3 \le x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 10 \Rightarrow x > 5 \\ x \le -5 \end{cases}$$



La solución general será la intersección de las dos soluciones obtenidas, es decir: $\boxed{\nexists \text{ soluc}}$

2. **Resuelve la siguiente inecuación:**

$$\frac{3x - 6}{x + 1} > 0$$

RAÍZ 2
RAÍZ -1

<u>Resolución</u>

Se estudia el signo del numerador y el denominador:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
Signo $(3x-6)$	–	–	+
Signo $(x+1)$	–	+	+
Signo $\left(\frac{3x-6}{x+1}\right)$	+	–	+

Por último se seleccionan los intervalos donde el cociente es positivo, y la unión de estos intervalos será la solución de la inecuación. Es decir:

$$\boxed{\text{Soluc: } x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)}$$

NOTA: En este caso, el único valor de x que anula el denominador es $x = -1$, que no pertenece a la solución.

3 . **Resuelve la siguiente inecuación:**

$$\frac{x-3}{x+5} \geq 4$$

Resolución

Operamos en la inecuación hasta obtener un cociente sencillo con el cero como segundo miembro de la inecuación:

$$\frac{x-3}{x+5} \geq 4 \Rightarrow \frac{x-3}{x+5} - 4 \geq 0 \Rightarrow \frac{x-3-4x-20}{x+5} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3x-23}{x+5} \geq 0$$

Raíz $-23/3$

Raíz -5

Para estudiar el signo del cociente estudiamos el signo del numerador y del denominador:

	$(-\infty, -\frac{23}{3})$	$(-\frac{23}{3}, -5)$	$(-5, \infty)$
Signo $(-3x-23)$	+	–	–
Signo $(x+5)$	–	–	+
Signo $\left(\frac{-3x-23}{x+5}\right)$	–	+	–

Es decir, nos queda el intervalo: $\left[\frac{-23}{3}, -5\right]$

La solución completa es dicho intervalo exceptuando el lugar donde se anula el denominador, $x = -5$:

$$\boxed{\text{Soluc: } x \in \left[\frac{-23}{3}, -5\right)}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelve el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 3(x-1) \leq 2(x-1) \\ 5x - 2 > 8 \end{cases}$$
(Soluc: $\nexists$ soluc)

2. Resuelve el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} -3x + 2 \geq x + 1 \\ x - 2 \leq 3 + 2x \end{cases}$$
(Soluc: $x \in [-5, 3/4]$)

3. Resuelve el sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} 5x + \frac{4x}{3} + 2 > \frac{10x}{3} + 5 \\ 2 - \frac{x-3}{4} \leq 1 - \frac{x}{2} \end{cases}$$
(Soluc: $\nexists$ soluc)

4. Resuelve la siguiente inecuación:
$$\frac{2x+5}{3x} > 0$$
[Soluc: $x \in (-\infty, -5/2) \cup (0, \infty)$]

5. Resuelve la siguiente inecuación:
$$\frac{7x-4}{x+2} > 1$$
[Soluc: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$]

6. Resuelve la siguiente inecuación:
$$\frac{2x+3}{x-1} > 1$$
[Soluc: $x \in (-\infty, -4) \cup (1, \infty)$]

7. Resuelve la siguiente inecuación:
$$3x - \frac{2x-5}{6} > 3 - \frac{3-6x}{4}$$
[Soluc: $x \in (17/14, \infty)$]

8. Resuelve la siguiente inecuación:
$$\frac{x-4}{4} + 1 \leq \frac{x+4}{8}$$
(Soluc: $x \in (-\infty, 4]$)

9. Resuelve la siguiente inecuación:
$$\frac{x}{x-1} < 1$$
[Soluc: $x \in (-\infty, 1)$]

10. **Resuelve la siguiente inecuación:**
$$\frac{x-1}{x-3} > 0$$
[Soluc: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$]

80 EJERCICIOS de TRIGONOMETRÍA

GRADOS Y RADIANES:

1. Pasar los siguientes ángulos a radianes:

a) 30º **b)** 45º **c)** 60º **d)** 90º **e)** 180º **f)** 270º **g)** 360º

h) 135º **i)** 235º **j)** 75º

*(Sol: **a)** π/6 rad; **b)** π/4 rad; **c)** π/3 rad; **d)** π/2 rad; **e)** π rad; **f)** 3π/2 rad; **g)** 2π rad; **h)** 3π/4 rad; **i)** 47π/36 rad; **j)** 5π/12 rad)*

2. Pasar los siguientes ángulos, expresados en radianes, a grados sexagesimales:

a) 2π/3 rad **b)** π/5 rad **c)** 4π/3 rad **d)** 3π/4 rad **e)** 5π/6 rad **f)** π/10 rad **g)** 0,2 rad

h) 1 rad *(Sol: **a)** 120º; **b)** 36º; **c)** 240º; **d)** 135º; **e)** 150º; **f)** 18º; **g)** ≅ 11º 27' 33''; **h)** ≅ 57º 17' 45'')*

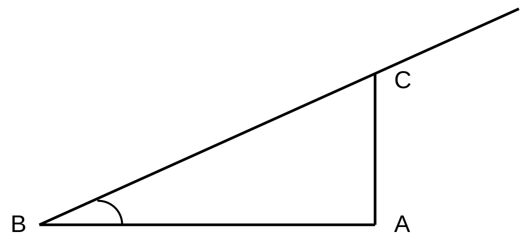
3. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

Grados	105º		320º		305º		35º
Radianes		4π/9 rad		7π/15 rad		16π/3 rad	

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS:

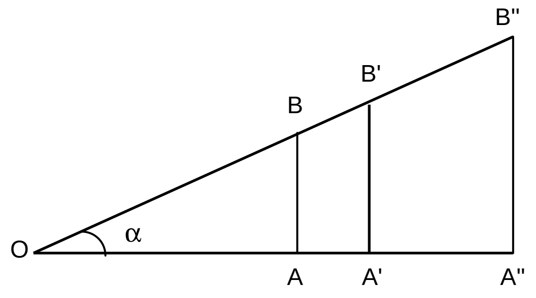
NOTA: Los ejercicios 4, 5 y 6 se realizarán en casa, con transportador de ángulos, regla y papel milimetrado.

4.



En el triángulo rectángulo de la figura medir sus lados, en mm, y hallar sen B, cos B y tg B. Medir a continuación B con el transportador de ángulos y comprobar con la calculadora lo obtenido antes (usar 4 decimales).

5.



Comprobar en la figura adjunta que el sen α sólo depende del ángulo y no del triángulo (usar 4 decimales).

6. Utilizando el transportador de ángulos, dibujar sobre papel milimetrado un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 30º, y medir a continuación sus lados para obtener sen 30º, cos 30º y tg 30º; comparar finalmente los valores obtenidos con los que proporciona la calculadora (usar 4 decimales).

☞ *Ejercicio libro: pág. 168: 16*

7. Utilizar la calculadora para obtener, con cuatro decimales bien aproximados, las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 75º **b)** cos 40º **c)** tg 75º 23' **d)** sen 23º 5' 24'' **e)** cos 18º 32' 37''

f) sec 27º **g)** cosec 36º **h)** tg 35º 30' **i)** ctg 32º 25'13'' **j)** tg 90º

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 161: 7; pág. 168: 28***

8. Hallar α en los siguientes casos, utilizando la calculadora solamente cuando sea estrictamente necesario:

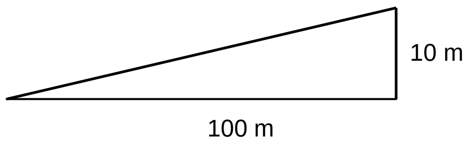
a) sen α=0,8 **b)** tg α= $\sqrt{3}$ **c)** cos α= $\sqrt{3}$ /2 **d)** sen α=1/2 **e)** cos α=1,5

f) tg α=1,5 **g)** sen α=1 **h)** cos α=1 **i)** sen α=0 **j)** cos α=0

k) ctg α= $\sqrt{3}$ /3 **l)** sec α=2 **m)** cosec α=2 $\sqrt{3}$ /3

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 168: 29 y 30***

9. Cuando una señal de tráfico indica que la pendiente de una carretera es p. ej. del 10 %, quiere decir que por cada 100 m de trayecto horizontal la carretera asciende 10 m. Comprobar que la pendiente de una carretera coincide entonces con la tangente del ángulo de inclinación α. ¿Cuánto vale tg α en ese ejemplo? *(Soluc: tg α=0,1)*



10. Supongamos que ascendemos por una carretera de montaña cuya pendiente media es del 7 % durante 10 km. ¿Cuánto hemos ganado en altitud? *(Soluc: ≅ 698 m)*

11. TEORÍA: ¿Puede ser el seno o el coseno de un ángulo mayor que 1? ¿Y la tangente? ¿Hay alguna restricción para la secante o cosecante? *(Soluc: NO; SÍ; siempre son mayores que 1)*

12. TEORÍA: ¿Puede existir un ángulo tal que su tangente y su coseno sean iguales? Razonar la respuesta. *(Soluc: NO)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 168: 31, 32 y 33***

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS:

13. a) Comprobar la relación fundamental con 30º, 45º y 60º (sin utilizar decimales ni calculadora)

b) Comprobar, mediante calculadora, la relación fundamental para 17º

14. Comprobar la relación $1+\mathrm{tg}^2 = 1/\cos^2$ con 30º, 45º y 60º (sin utilizar decimales ni calculadora)

15. De un ángulo agudo se sabe que su seno es 3/5. Mediante identidades trigonométricas, hallar sus restantes razones. *(Soluc: cos α=4/5; tg α=3/4)*

16. Sabiendo que cos α = 0,2, hallar sus restantes razones: **a)** mediante identidades trigonométricas; **b)** mediante calculadora. *(Soluc: sen α=2 $\sqrt{6}$ /5, cos α=2 $\sqrt{6}$)*

17. De un ángulo agudo se sabe que su tangente vale 2. Mediante identidades trigonométricas, hallar sus restantes razones. *(Soluc: sen α=2 $\sqrt{5}$ /5; cos α= $\sqrt{5}$ /5)*

18. Dado un ángulo agudo α, encontrar, aplicando identidades trigonométricas, las restantes razones, sabiendo que:

a) sen α=5/6 **b)** cos α=5/12 **c)** tg α=5/12 **d)** ctg α= $\sqrt{6}$ /2 **e)** sec α= $\sqrt{5}$

f) sen α=2/3 **g)** cos α=1/3 **h)** tg α=4/3

*(Soluc: **a)** cos α= $\sqrt{11}$ /6, tg α=5 $\sqrt{11}$ /11; **b)** sen α= $\sqrt{119}$ /12, tg α= $\sqrt{119}$ /5; **c)** sen α=5/13, cos α=12/13; **d)** sen α= $\sqrt{10}$ /5, cos α= $\sqrt{15}$ /5, tg α= $\sqrt{6}$ /3; **e)** sen α=2 $\sqrt{5}$ /5, cos α= $\sqrt{5}$ /5, tg α=2; **f)** cos α= $\sqrt{5}$ /3, tg α=2 $\sqrt{5}$ /5; **g)** sen α=2 $\sqrt{2}$ /3, tg α=2 $\sqrt{2}$; **h)** sen α=4/5, cos α=3/5)*

☞ *Ejercicios libro: pág. 159: 2 y 3;* ***pág. 168: 17 a 20***

19. Dado un ángulo agudo ¯ tal que ctg¯ $= \sqrt{11}$, se pide:

a) Hallar, aplicando identidades trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y tg ¯ (resultados racionalizados)
(Soluc: sen α= $\sqrt{3}$ /6, cos α= $\sqrt{33}$ /6, tg α= $\sqrt{11}$ /11)

b) Obtener, mediante calculadora, de qué ¯ se trata. *(Soluc: α ≅ 16º 46' 43'')*

20. Dado un ángulo ¯ tal que cosec ¯ $= \frac{2\sqrt{3}}{3}$, se pide:

a) Hallar, aplicando identidades trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y tg ¯ (resultados racionalizados)

b) Obtener, <u>sin calculadora</u>, de qué ¯ se trata. *(Soluc: sen α= $\sqrt{3}$ /2, cos α=1/2, tg α= $\sqrt{3}$; α=60º)*

21. **a)** Dado cos ¯ $= \sqrt{6}/3$, obtener, mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas, sen ¯ y tg ¯, dando los resultados simplificados y racionalizados (no se puede utilizar decimales).

b) Averiguar, mediante calculadora, de qué ángulo ¯ se trata, explicando el resultado.

22. **a)** Dada tg ¯ $= \sqrt{3}/2$, obtener, mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y ctg ¯ (Dar los resultados simplificados y racionalizados; no se puede utilizar decimales)
(Soluc: sen α= $\sqrt{21}$ /7, cos α=2 $\sqrt{7}$ /7, ctg α=2 $\sqrt{3}$ /3)

b) Averiguar razonadamente, mediante calculadora, ¯ *(Soluc: α ≅ 40º 53' 36'')*

23. Dado un ángulo agudo ¯ tal que sec ¯ $= \frac{3\sqrt{2}}{2}$, se pide:

a) Hallar, aplicando identidades trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y tg ¯ (resultados racionalizados)
(Soluc: sen α= $\sqrt{7}$ /3, cos α= $\sqrt{2}$ /3, tg α= $\sqrt{14}$ /2)

b) Obtener, mediante calculadora, de qué ¯ se trata. *(Soluc: α ≅ 61º 52' 28'')*

24. Dada ctg ¯=2, hallar sen ¯, cos ¯ y tg ¯ mediante identidades trigonométricas y sin utilizar decimales. ¿Cuánto vale α? *(Soluc: sen α= $\sqrt{5}$ /5, cos α=2 $\sqrt{5}$ /5, tg α=1/2; α ≅ 26º 33' 54'')*

25. **a)** Dada sec ¯ $= \sqrt{2}$, hallar, mediante identidades trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y tg ¯ (No vale utilizar decimales)

b) ¿De qué ángulo ¯ se trata? *(Soluc: sen α= $\sqrt{2}$ /2, cos α= $\sqrt{2}$ /2, tg α=1; α=45º)*

26. **a)** ¿Puede existir un ángulo tal que sen ¯ =1/5 y cos ¯ =3/5? (no vale calculadora)

b) Ídem para tg ¯=4/3 y cos ¯=3/5

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 168: 21 a 25***

27. **a)** Dado un ángulo ¯ tal que $ctg¯ = \sqrt{3}$, obtener, mediante fórmulas trigonométricas, sen ¯, cos ¯ y tg ¯
b) Obtener, <u>sin calculadora</u>, ¯ *(Soluc: sen α=1/2, cos α= $\sqrt{3}$/2, tg α= $\sqrt{3}$/3; α=30º)*

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS:

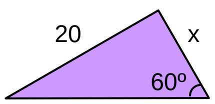
28. Resolver los siguientes triángulos, rectángulos en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

a) a=320 m, B=47º *(Soluc: C=43º; b≅234,03 m; c≅218,24 m; S_{ABC}≅25537,64 m^2)*
b) b=32,8 cm, B=22º *(Soluc: C=68º; a≅87,56 cm; c≅81,18 cm; S_{ABC}≅1331,40 cm^2)*
c) a=42,5 m, b=35,8 m *(Soluc: B≅57º23'22''; C≅32º36'38''; c≅22,90 m; S_{ABC}≅409,99 m^2)*
d) b=8 mm, c=6 mm *(Soluc: B≅53º7'48''; C≅36º52'12''; a=10 mm; S_{ABC}=24 mm^2)*
e) c=42,7 dam, C=31º *(Soluc: B=59º; a≅82,91 dam; b≅71,06 dam; S_{ABC}≅1517,23 dam^2)*
f) a=8 km, b=6 km *(Soluc: B≅48º35'; C≅41º 25'; c≅5,30 km; S_{ABC}≅15,87 km^2)*
g) a=13 m, c=5 m *(Soluc: B≅67º22'48''; C≅22º37'12''; b=12 m; S_{ABC}30 m^2)*
h) c=124 dm, B=67º 21' *(Soluc: C≅22º39'; a≅321,99 dm; b≅297,16 dm; S_{ABC}≅18423,90 dm^2)*
i) a=12,65 cm, C=48º 10' *(Soluc: B=41º50'; b≅8,44 cm; c≅9,43 cm; S_{ABC}≅39,76 cm^2)*
j) a=75 m, C=35º *(Soluc: B=55º; b≅61,44 m; c≅43,02 m)*
k) b=36, C=35º *(Soluc: B=55º; a≅43,95; c≅25,21)*
l) a=15 mm, b=12 mm *(Soluc: B≅53º7'48"; C≅36º52'12"; c=9 mm; S_{ABC}≅54 mm^2)*
m) b=24 m, c=8 m *(Soluc: B≅71º33'54"; C≅18º 26'; a≅25,30 m)*
n) b=12 cm, c=4 cm *(Soluc: B≅71º34; C≅18º26'; a≅12,65 cm)*
o) b=212 m, c=165 m *(Soluc: B≅52º6'23"; C≅37º53'37"; a≅268,64 m; S_{ABC}=17490 m^2)*
p) B=35º, a=4 cm *(Soluc: C=55º; b≅2,3 cm; c≅3,3 cm)*
q) b=5 cm, B=80º *(Soluc: C=10º; a≅5,1 cm; c≅0,9 cm)*
r) a=28 cm, C=4º *(Soluc: B=86º; b≅27,93 cm; c≅1,95 cm; S_{ABC}≅2,20 cm^2)*

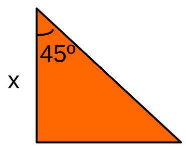
☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 162: 9; pág. 161: 8***

29. Resolver, <u>sin calculadora</u>, un triángulo de datos: A=90º, b= $\sqrt{3}$, c=1
(Soluc: a=2, B=60º, C=30º)

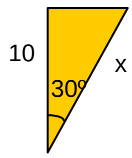
30. Hallar el valor del lado x en los siguientes triángulos rectángulos:

a)


(Soluc: x≅11,55)

b)


(Soluc: x=15)

c)


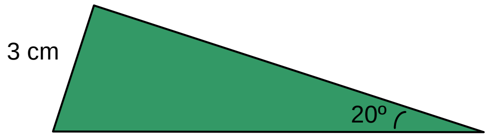
(Soluc: x≅11,55)

31. Resolver un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm y uno de sus catetos 1 cm. Hallar su área.
(Soluc: ≅19º 28' 16'', ≅70º 31' 44'', ≅2,83 cm; S ≅1,41 cm^2)

32. Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 5 y 12 cm. Hallar sus restantes elementos y calcular su área. *(Soluc: 13 cm; ≅67º 22' 48'', ≅22º 37' 12'', S = 30 cm^2)*

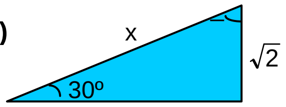
33. CUESTIÓN TEÓRICA: Probar que si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 60º, entonces la hipotenusa es igual al doble del cateto menor.

34. En el triángulo rectángulo de la figura, calcular los elementos desconocidos y obtener su área:

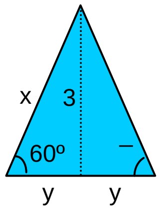


35. Hallar las incógnitas en los siguientes triángulos (no utilizar calculadora sino raíces, dando además el resultado racionalizado):

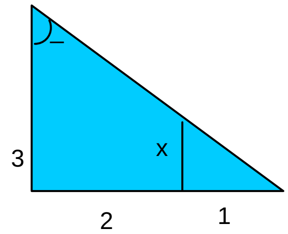
a)



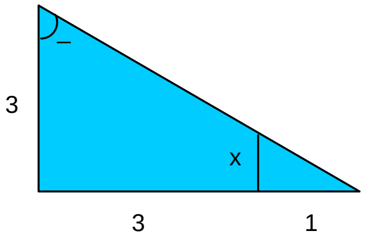
b)



c)

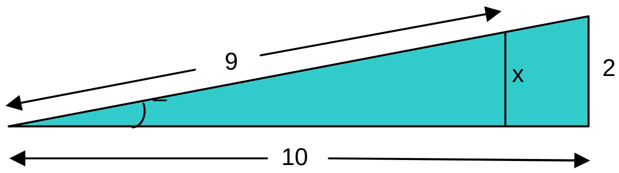


d)



*(Soluc: **a)** α=60º, $x=2\sqrt{2}$; **b)** α=60º, $x=2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$; **c)** α=45º, x=1 **d)** $\alpha \cong$53º7'48''; x=0,75)*

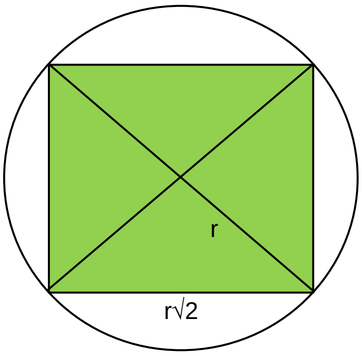
36. Ídem, pero con calculadora:



(Soluc: $\alpha \cong$ 11º 18' 36'; x $\cong$ 1,77)

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 168 y ss.:*** *26, 27,* ***34, 35, 36 y 37***

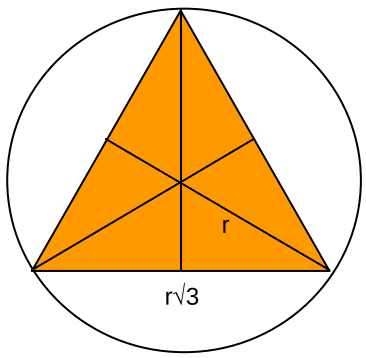
37. CUESTIÓN TEÓRICA: Cuando el gran sabio griego Tales de Mileto viajó a Egipto, le fue preguntado cuál podría ser la altura de la pirámide de Keops, por supuesto desconocida y jamás medida. Tales reflexionó unos segundos y contestó así: «Me echaré sobre la arena y determinaré la longitud de mi cuerpo. Después, me pondré en un extremo de esta línea que mide mi longitud y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide ha de medir tantos pasos como su altura». Justificar la genial respuesta del gran sabio.



38. CUESTIÓN TEÓRICA:

a) Demostrar que el lado del cuadrado inscrito (ver figura) en una circunferencia de radio r mide rK2.

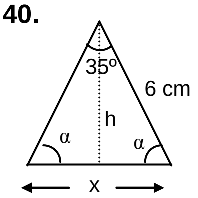
b) Demostrar que el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia (ver figura) de *radio r mide r√3.*



39. CUESTIÓN TEÓRICA: Si un rectángulo tiene mayor perímetro que otro, ¿necesariamente tendrá mayor área? Indicar ejemplos. *(Soluc: no necesariamente)*

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS:

40.

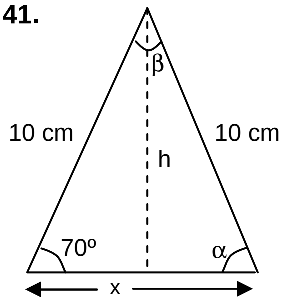


En el triángulo de la figura hallar:

a) ¯ y x *(Soluc: $\alpha \cong 72º\ 30'$; $x \cong 3,61$ cm)*

b) h y área *(Soluc: $h \cong 5,72$ cm; $S \cong 10,32\ cm^2$)*

41.



En el triángulo isósceles de la figura, hallar razonadamente:

a) α y β

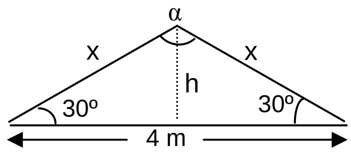
b) altura h

c) base x

d) área

(Soluc: α=70º, β=40º, h≅9,4 cm, x≅6,84 cm; S≅32,14 cm^2)

42. Dado el triángulo isósceles de la figura, hallar:



a) El ángulo desigual ¯

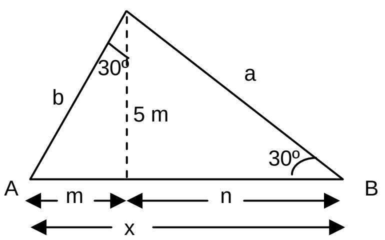
b) Los lados iguales x

c) La altura h

d) El área del triángulo.

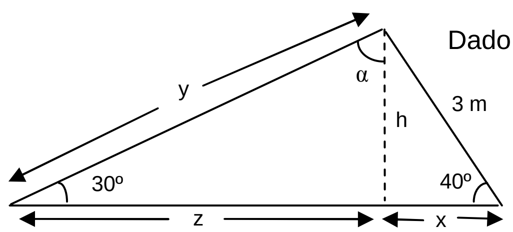
(Soluc: α=120º, x≅2,31 m, h≅1,15 m; S≅2,31 m^2)

43.



En el triángulo de la figura, calcular: **A**, **b**, **m**, **n**, **a** y **x**. Hallar su área. *(Soluc: A=60º, b ≅ 5,77 m, m ≅ 2,89 m, n ≅ 8,66 m, a=10 m, x ≅ 11,55 m; S ≅ 28,87 m^2)*

44.



Dado el triángulo de la figura se pide:

a) Hallar α, h, x, y, z

b) Calcular su área.

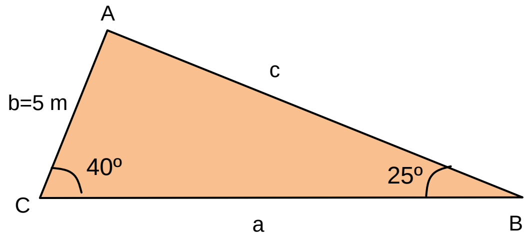
(Soluc: α = 60º, h≅1,93m, x ≅ 2,30m, y ≅ 3,86m, z ≅ 3,34m; S ≅ 5,44m^2)

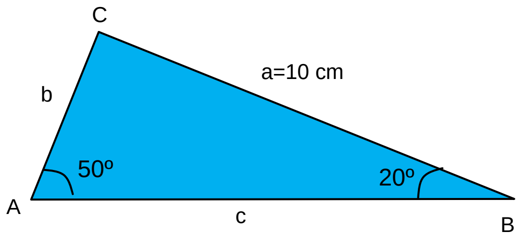
45. TEORÍA: ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? Dibujar un triángulo acutángulo, y trazar sus tres alturas. ¿Qué ocurre si el triángulo es obtusángulo?

46. a) Resolver el triángulo de la figura derecha –es decir, hallar A, a y c–, trazando para ello previamente la altura correspondiente al lado a.

b) Hallar su área.

(Soluc: A = 115º, a ≅ 10,72m, c ≅ 7,60m, S ≅ 17,21m^2)

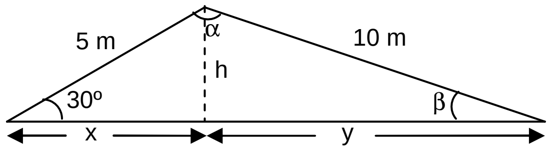




47. En el triángulo de la figura izquierda hallar C, b y c, trazando para ello previamente una altura. Hallar también su área.

(Soluc: C = 110º, b ≅ 4,46cm, c ≅ 12,27cm, S ≅ 20,98cm^2)

48. En el triángulo de la figura, se pide: **a)** Hallar h, x, y, α y β
b) Calcular su área.

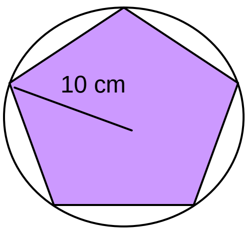


☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 164: 12; pág. 169: 38 a 44***

PROBLEMAS DE PLANTEAMIENTO:

49. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 20 cm y cada uno de los ángulos iguales mide 25º. Resolver el triángulo y calcular su área. *(Soluc: α=130º, x≅36,25 cm; S≅153,21 cm^2)*

50.



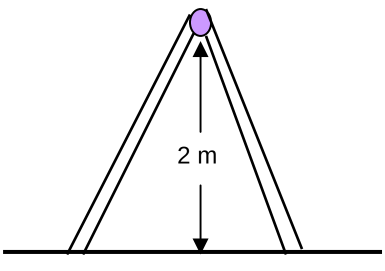
Si el radio de un pentágono regular mide 10 cm, ¿cuánto mide el lado? ¿Cuál es su área?
(Soluc: ≅ 11,76 cm y ≅237,76 cm^2 respectivamente)

51. Calcular el valor de la apotema de un decágono regular de lado 20 cm. ¿Cuál es su área? Comprobar que se verifica la fórmula ***S=p·a/2***, donde ***p*** es el perímetro y ***a*** la apotema.

52. Calcular el área de un decágono regular y de un octógono regular, ambos de 6 cm de lado. ¿Cuál es mayor?

53. Determinar la superficie de un hexágono regular inscrito en un círculo de 9 cm de radio.

54.



Un carpintero quiere construir una escalera de tijera cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de 60º. Si la altura de la escalera, estando abierta, es de 2 metros, ¿qué longitud deberá tener cada brazo? *(Soluc: ≅ 2,31 m)*

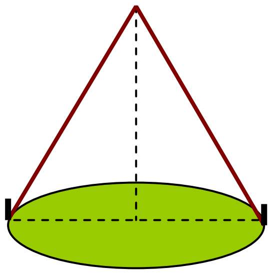
55. Un niño está haciendo volar su cometa. Ha soltado ya la totalidad del hilo, 47 m, y observa que el ángulo que forma la cuerda con el suelo es aproximadamente 45º. ¿A qué altura se encuentra la cometa? *(Soluc: ≅ 33,23 m)*

56. Calcular la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman 50º con el suelo. *(Soluc: ≅ 15,49 m)*

57. Desde lo alto de un faro colocado a 40 m sobre el nivel del mar se ve un barco formando un ángulo de 55º con la horizontal. ¿A qué distancia de la costa se halla el barco? *(Soluc: ≅ 28 m)*

58. Un avión vuela a 350 m de altura, observando el piloto que el ángulo de depresión del aeropuerto próximo es de 15º. ¿Qué distancia respecto a la vertical le separa del mismo en ese instante? *(Soluc: ≅ 1306 m)*

59.



Una tienda de campaña tiene forma cónica. La parte central tiene una altura de 4 m y está sujeta en el suelo con dos cables de 12 m de longitud. Calcular:

a) El ángulo que forman los cables con el suelo.

b) La distancia entre los dos puntos de anclaje (Sin aplicar el teorema de Pitágoras).

(Soluc: ≅19º 28' 16''; ≅22,63 m)

60. En un tramo de carretera la pendiente es del 6%. ¿Cuánto asciende un ciclista que recorra un kilómetro? *(Soluc: 60 m)*

61. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30º. Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada? *(Soluc: anchura≅15,73 m; 7,07 y 5 m respectivamente)*

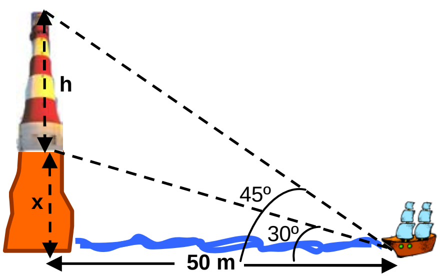
62. Si las puntas de un compás, abierto, distan 6,25 cm y cada rama mide 11,5 cm, ¿qué ángulo forman? *(Soluc: ≅ 31º 32')*

63. Una escalera de 4 metros está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 metros de la pared? *(Soluc: 60º)*

64. De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo agudo mide 45º y uno de sus catetos 5 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo? *(Soluc: 5 cm, ≅ 7,07 cm, 45º)*

65. Calcular los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 8 cm. *(Soluc: 112º 37' y 67º 23')*

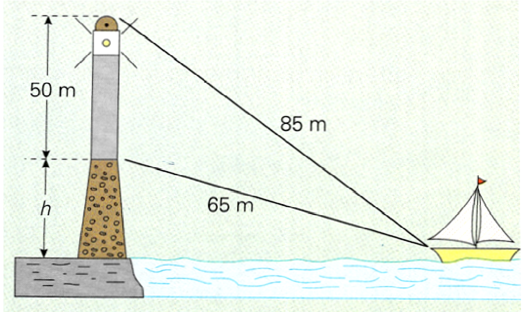
66. La base de un triángulo isósceles mide 54 cm y los ángulos en la base 42º. Calcular los lados iguales, la altura y el área. *(Soluc: ≅ 36,3 cm, ≅24,3 cm y ≅656,1 cm^2)*

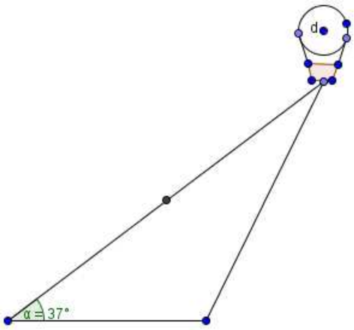


67. Si la sombra de un poste es la mitad de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el suelo? *(Soluc: 63º 26')*

68. En la figura de la izquierda, hallar la altura del acantilado, x, y la del faro, h. *(Sol: 28,87 y 21,13 m, respectivamente)*

69. En la figura adjunta aparece un faro situado bajo un promontorio. Hallar la altura, h, de éste último. (Ayuda: Aplicar el teorema de Pitágoras dos veces) *(Sol: 5 m)*

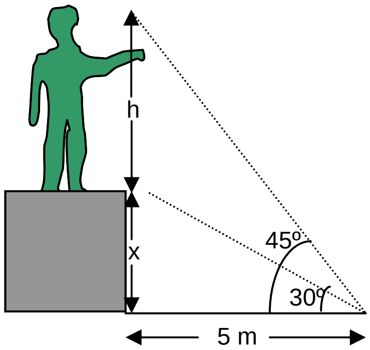




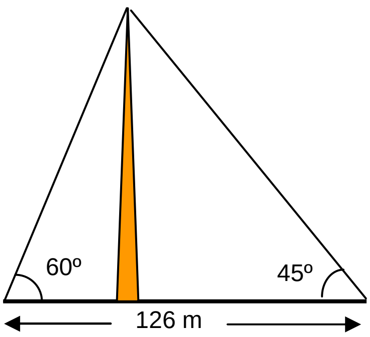
70. Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. (*Ayuda: Trazar la altura correspondiente al lado del cable más extenso).* *(Soluc: ≅71,80m; ≅119,31m)*

<u>*Método de doble observación*</u>:

71. Desde un punto del suelo situado a 5 m de la base de un pedestal se ve la parte superior de éste bajo un ángulo de 30º, mientras que la parte superior de la estatua que descansa sobre él se ve bajo un ángulo de 45º (ver figura). Hallar la altura del pedestal y de la estatua.
(Soluc: ≅2,89 m y ≅2,11 m respectivamente)



72. Queremos conocer el ancho de un río y la altura de un árbol inaccesible que está en la orilla opuesta. Para ello nos situamos en la orilla del río y vemos la copa del árbol bajo un ángulo de 41º. A continuación retrocedemos 25 m y vemos ahora el árbol bajo un ángulo de 23º. Hallar el ancho del río y la altura del árbol. *(Soluc: ≅23,86 m y ≅20,74 m respectivamente)*



73. Considerar el triángulo de datos: a=10 m, B=30º, C=45º. Resolverlo, trazando previamente la altura correspondiente al lado a, y hallar su área. (Ayuda: Plantear un sistema de ecuaciones)
(Soluc: A = 105º, b ≅5,18 m, c ≅7,32 m, S ≅18,3 m^2)

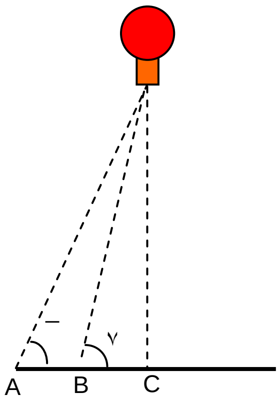
74. Una antena está sujeta al suelo por dos cables de acero, como indica la figura. Calcular la altura de la antena y la longitud de los dos cables.
(Soluc: ≅79,88 m, ≅92,24 m, ≅112,97 m respectivamente)

75. Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, este ángulo se hace de 60º. Hallar la altura de la torre. *(Soluc: ≅64,95 m)*

76. Desde un barco se ve la cima de un acantilado bajo un ángulo de 70º respecto a la horizontal. Al alejarse 100 m, el ángulo disminuye a 30º. Hallar la altura del acantilado. *(Soluc: ≅73,10 m)*

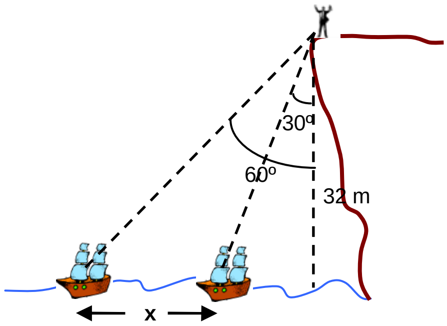
77. Dos edificios gemelos distan 150 m. Desde un punto que está entre los dos vemos que las visuales a los puntos más altos forman con la horizontal ángulos de 35º y 20º respectivamente. Hallar la altura de ambos edificios. ¿A qué distancia estamos de cada edificio? *(Soluc: ≅35,9 m, ≅51,3 m y ≅98,7 m respectivamente)*

78. Calcular la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas: 1º) El ángulo que forma la visual hacia la luz con el horizonte es de 25º 2º) Nos alejamos 200 m y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10º *(Soluc: ≅56,7 m)*



79. Para hallar la altura a la que está situado un globo, Rosa se coloca en un punto B y Carlos en un punto A, a 5 m de ella, de tal forma que los puntos A, B y C están alineados. Si los ángulos ¯ y ˠ miden 45º y 50º respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo? *(Soluc: ≅31,08 m)*

80. Sobre un acantilado de 32 m de altura un observador divisa dos embarcaciones, bajo ángulos de 30º y 60º respecto a la vertical. Hallar la distancia que las separa. *(Soluc: ≅36,95 m)*



☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 165: 13 y 14; pág. 170 y ss.: 45 a 60***

DIFERENCIA ENTRE ÁREA Y SUPERFICIE:

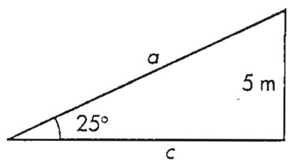
- La ***superficie*** es el conjunto de infinitos puntos contenidos dentro de una línea cerrada; el ***área*** es la medida de esa superficie: "La superficie de un cubo tiene 6,45 cm^2 de área".
- La palabra ***superficie*** describe también el borde de un objeto tridimensional, es decir, algo que se puede tocar: "La superficie de una esfera".

EJERCICIOS REPASO

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

OBSERVA

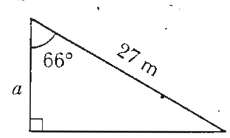
Si en un triángulo rectángulo se conocen un lado y un ángulo agudo, α, para hallar otro lado, se pone ~~la~~ razón trigonométrica de α que relaciona el lado conocido y el desconocido. Por ejemplo, así se calculan los lados a y c de la figura. (Para obtener las razones trigonométricas de 25°, se usa la calculadora).



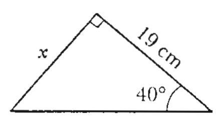
Para hallar a: $sen\ 25° = \frac{5}{a} \to a = \frac{5}{sen\ 25°} \approx \frac{5}{0{,}4226} \approx 11{,}83$ m

Para hallar c: $tg\ 25° = \frac{5}{c} \to c = \frac{5}{tg\ 25°} \approx \frac{5}{0{,}4663} \approx 10{,}72$ m

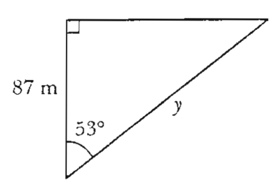
1 Calcula el lado a: (Soluc: $a \simeq 10{,}98$ m)



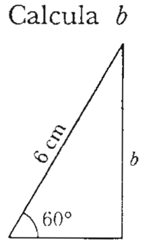
2 Calcula el lado x: (Soluc: $x \simeq 19{,}94$ cm)



3 Calcula el lado y:
(Soluc: $y \simeq 144{,}56$ m)

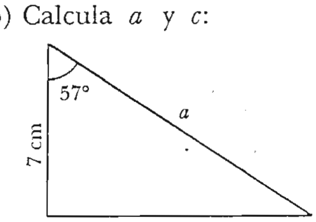


4 a) Calcula b y c:



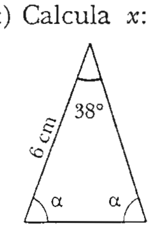
(Soluc: $b \simeq 5{,}19$ cm
$c = 3$ cm)

b) Calcula a y c:



(Soluc: $a \simeq 12{,}85$ cm
$c \simeq 10{,}78$ cm)

c) Calcula x:



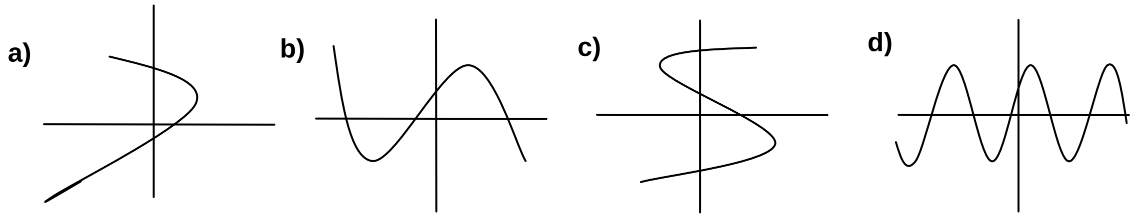
(Soluc: $x \simeq 3{,}9$ cm)

59 EJERCICIOS DE FUNCIONES

1. Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Razonar que se trata de una función.
b) Calcular f(4), f(1), f(0), f(-9), f(1/4), f(2) y f(√2)
c) Hallar la antiimagen de 3, de 25 y de -4
d) Razonar cuál es su Dom(f) e Im(f)

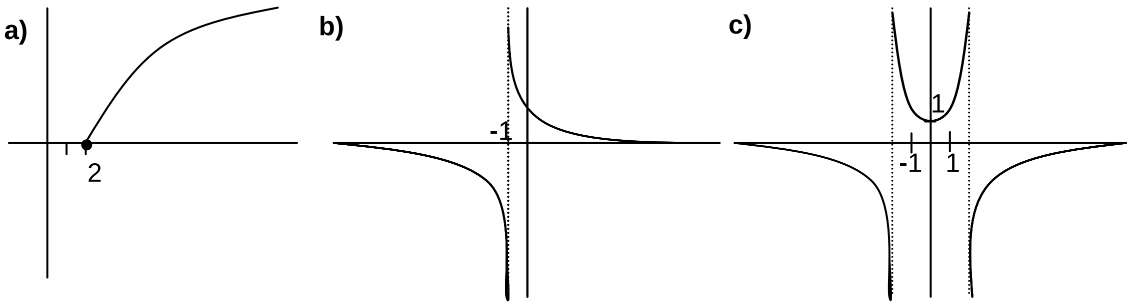
2. Ídem para f(x)=2x+1

3. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 86: 1; pág. 96: 13***

4. ¿Cuál es el Dom(f) e Im(f) de cada una de estas funciones?:



☞ *Ejercicios libro: pág. 88: 51****; pág. 97: 24***

5. Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Representarla gráficamente.
b) Razonar, a la vista de la gráfica, cuál es su Dom(f) e Im(f)

6. Para cada una de las funciones que figuran a continuación se pide:

i) Tabla de valores apropiada y representación gráfica.
ii) Dom(f) e Im(f) a la vista de la gráfica.
iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

a) $f(x)=3x+6$
b) $f(x)=x^2-4x+3$ ¿vértice?
c) $f(x)=x^3$
d) $f(x)=x^4$
e) $f(x)=2$
f) $f(x)=\sqrt{x-9}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ¿asíntotas?
h) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$?
i) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$?

☞ *Ejercicios libro: pág. 86: 2; pág. 87: 4; pág. 93: 15, 16 y 17 (relación entre tabla y gráfica);* ***pág. 108: 7****;* ***pág. 115: 35 y 36*** *(hipérbolas);* ***pág. 111: 11; pág. 116: 43 y 44*** *(funciones con radicales)*

7. Sin necesidad de representarlas, hallar <u>analíticamente</u> el Dom(f) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{8x}{x+5}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$

c) $f(x)=\dfrac{2}{4x-x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-16}$

e) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+16}$

f) $f(x)=\sqrt{x+5}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

h) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

i) $f(x)=\sqrt{4-x}$

j) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

k) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$

l) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+4}$

*** m)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-16}}$

n) $f(x)=\dfrac{x+1}{(2x-3)^2}$

o) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

p) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-12}}$

q) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4}$

r) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+2x+1}$

s) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+4}$

t) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 88: 6; pág. 96 y ss.: 20 a 23***

(Soluc: ***a)*** *IR-[-5};* ***b)*** *IR-{-2,4};* ***c)*** *IR-{0,4};* ***d)*** *IR;* ***e)*** *IR;* ***f)*** *[-5,∞);* ***g)*** *(-5,∞);* ***h)*** *[5/2,∞);* ***i)*** *(-∞,4);* ***j)*** *(-∞,3]U[3,∞);* ***k)*** *(-∞,-4]U[2,∞);* ***l)*** *(-∞,-4]U[-1,∞);* ***m)*** *(-4,0]U(4,∞);* ***n)*** *IR-{3/2};* ***o)*** *IR-{2,3};* ***p)*** *(4,∞);* ***q)*** *IR;* ***r)*** *IR-{-1};* ***s)*** *IR;* ***t)*** *IR)*

8. A la vista de sus gráficas, indicar la continuidad, posible simetría, intervalos de crecimiento y posibles M y m de las funciones del ejercicio 6

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 89: 7; pág. 97: 25*** *(continuidad);* ***pág. 90: 8; pág. 97: 26 y 27*** *(crecimiento);* ***pág. 92: 10; pág. 98: 29, 30 y 31*** *(simetría); pág. 93: 11 y 12; pág. 99: 32, 33 y 34 (límites)*

9. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones; con esa única información, hacer además la gráfica de las señaladas con **(G)**:

(G) a) $y=2x-6$

(G) b) $f(x)=x^2+2x-3$

c) $f(x)=x^2+x+1$

d) $f(x)=x^3-x^2$

e) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

f) $f(x)=\sqrt{2x+4}$

g) $f(x)=\sqrt{2x}+4$

h) $y=\dfrac{x+4}{2x+2}$

i) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$

j) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

k) $y=\sqrt{x^2+9}$

(G) l) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

m) $y=\dfrac{x^2+4}{x+2}$

n) $f(x)=\dfrac{4}{x-4}$

o) $f(x)=x^4-1$

(Soluc: ***a)*** *(3,0),(0,-6);* ***b)*** *(-3,0),(1,0),(0,-3);* ***c)*** *(0,1);* ***d)*** *(0,0),(1,0);* ***e)*** *(-2,0),(2,0),(0,-2);* ***f)*** *(-2,0),(0,2);* ***g)*** *(0,4);* ***h)*** *(-4,0),(0,2);* ***i)*** *(√3,0),(-√3,0),(0,3);* ***j)*** *(-2,0),(1,0);* ***k)*** *(0,3);* ***l)*** *(1,0),(2,0),(3,0),(0,-6);* ***m)*** *(0,2);* ***n)*** *(0,-1);* ***o)*** *(-1,0),(1,0),(0,-1))*

10. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Razonar cuál es su Dom(f) **ii)** Posibles cortes con los ejes. **iii)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **iv)** ¿Es continua? **v)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **vi)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m **vii)** Indicar su posible simetría. **viii)** Ecuación de las posibles asíntotas. **ix)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$

11. Ídem: **a)** $f(x)=x^3-3x$ **b)** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ **c)** $y=x^4-2x^2$ **d)** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=x^3-3x^2$

f) $y=2x^3-9x^2$ **g)** $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ **h)** $f(x)=x^3-6x^2+9x$ **i)** $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ **j)** $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$

k) $y=x^4-4x$ **l)** $y=2x^3-3x^2$ **m)** $y=x^3-12x$ **n)** $y=\sqrt{x^2-9}$ **o)** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

p) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 109: 8; pág. 110: 9 y 10; pág. 115:*** *37 y* ***38***

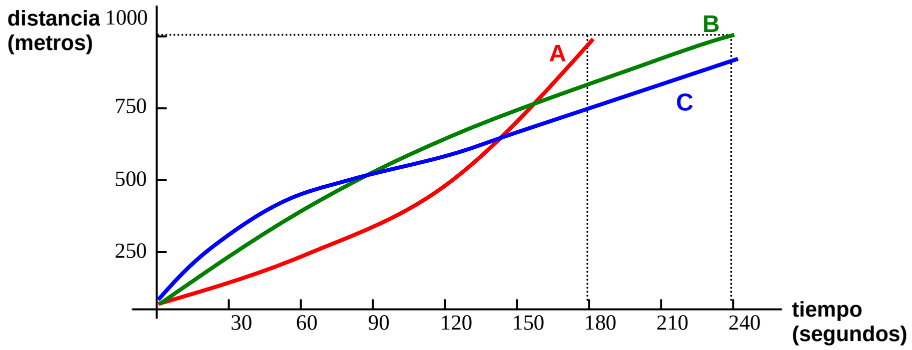
12. Representar, utilizando la calculadora: **a)** y=sen x **b)** y=cos x **c)** y= tg x

13. Un estudio de un ginecólogo muestra cómo crece un bebé antes de nacer según el mes de gestación en que se encuentre su madre, de acuerdo con la siguiente tabla:

Edad (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (cm)	4	8	15	24	29	34	38	42

Representar la función "longitud" en función de la edad del bebé. Comentar dicha gráfica.

14. Tres alumnos, que nombraremos **A**, **B** y **C**, participan en una carrera de 1000 m. La presente gráfica muestra de forma aproximada su comportamiento en la prueba. ¿Cómo describirías dicha carrera?



☞ *Ejercicios libro: pág. 99: 35 y 36*

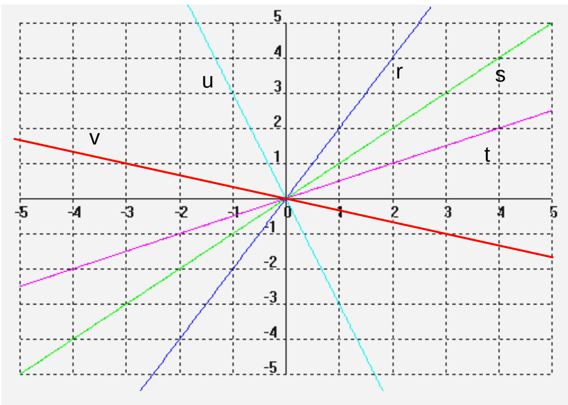
FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA *(y=mx)*:

15. a) Hallar la ecuación de una función de proporcionalidad directa sabiendo que pasa por el punto P(1,7)
b) Ídem para P(-1,3)
c) Ídem para P(2,5)

A continuación, dibujarlas y comprobar su pendiente.

16. Si se sabe que una función lineal pasa por el punto P(1,2), calcular su ecuación, y, a partir de ésta, hallar el valor de dicha función para x=3, x=5 y x=-8. Comprobar gráficamente todo lo anterior. *(Soluc: y=2x; 6, 10 y -16)*

17. Calcular la pendiente y la ecuación de las funciones de proporcionalidad directa que aparecen en el siguiente gráfico:



(Soluc: r: y=2x
s: y=x
t: y=x/2
u: y=-3x
v: y=-x/3)

18. Un kg de patatas cuesta 55 céntimos. Obtener y a continuación representar la función que define el coste de las patatas (**y**) en función de los kg comprados (**x**). ¿Cuál es su Dom(f)? ¿Cuánto costarán 3,5 kg? ¿Qué cantidad podremos comprar si sólo disponemos de un billete de 5 €? *(Soluc: 1,93 €; 9,09 kg)*

19. Un grifo vierte agua a un depósito dejando caer cada minuto 25 litros. Formar una tabla de valores apropiada para representar la función "capacidad" en función del tiempo. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar una piscina de 50 m^3? *(Soluc: 33 h 20 min)*

20. Los paquetes de folios que compra un determinado instituto constan de 500 folios y cuestan 3 €.

a) Formar una tabla que nos indique el precio de 1, 2, ..., 10 folios.

b) Dibujar la gráfica correspondiente ¿Qué tipo de función se obtiene? ¿Cuál es la ecuación?

c) ¿Cuál es su Dom(f)?

21. Pasada la Navidad, unos grandes almacenes hacen en todos los artículos un 20% de descuento.

a) ¿Cuál será el precio rebajado de unas zapatillas de deporte que costaban 45 €? ¿Y de un chándal que costaba 60 €?

b) Si llamamos **x** al antiguo precio del artículo e **y** al precio rebajado, ¿qué función se obtiene?

(Soluc: y=0,8x)

22. El IVA es un impuesto que en muchos productos supone un recargo del 16%. Si un fontanero hace una reparación de 240 €, ¿a cuánto ascenderá con el IVA? ¿Y si la reparación costara 50 €? Obtener la expresión algebraica general correspondiente al precio del trabajo del fontanero y la cantidad que se paga. *(Soluc: 278,4 €; 58 €; y=1,16x)*

23. Se quiere abrir un pozo de forma cilíndrica de diámetro 2 m. Expresar el volumen de agua que cabe en él en función de la profundidad *h*. ¿Qué tipo de función se obtiene?

FUNCIÓN AFÍN *(y=mx+n)*:

24. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1,3) y B(3,7). Representarla gráficamente, y comprobar gráficamente su pendiente y su ordenada en el origen. Hallar también, analítica y gráficamente, un tercer punto de ella. *(Soluc: y=2x+1)*

25. Ídem para: **a)** A(1,-1) y B(4,8) **b)** A(-2,4) y B(1,1) **c)** A(-4,-1) y B(2,-4) **d)** A(-1,-1) y B(2,-7) **e)** A(3,1) y B(-6,-2) **f)** A(1,1) y (3,7) *(Sol: a) y=3x-4; b) y=-x+2; c) y=-x/2-3; d) y=-2x-3; e) y=x/3; f) y=3x-2)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 114: 17 y 18***

26. Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente 5 y pasa por el punto P(-1,-2) *(Soluc: y=5x+3)*

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 104: 2; pág. 114: 14***

27. Hallar la ecuación de la recta paralela a y=2x+5 que pasa por el punto P(2,1). ¿Cuál es su pendiente? *(Soluc: y=2x-3)*

28. **a)** Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,-2) y (3,4). **b)** Hallar también una recta paralela a la anterior y que pase por el punto (-2,3) *(Soluc: y=3x-5; y=3x+9)*

29. En cada apartado, representar las siguientes rectas sobre los mismos ejes:

a) y=3x
y=3x+2
y=3x-7

b) y=-3x
y=-3x+2
y=-3x-7

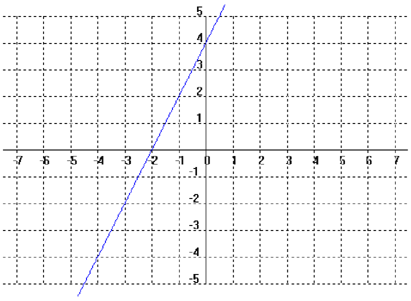
c) $y=\frac{1}{3}x$
$y=\frac{1}{3}x+2$
$y=\frac{1}{3}x-7$

d) y=0
y=x
y=-x

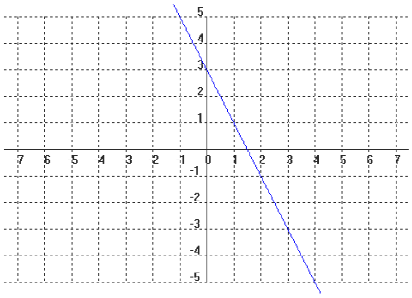
☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 104: 1; pág. 114: 13***

30. Hallar, razonadamente, la ecuación de las siguientes rectas:

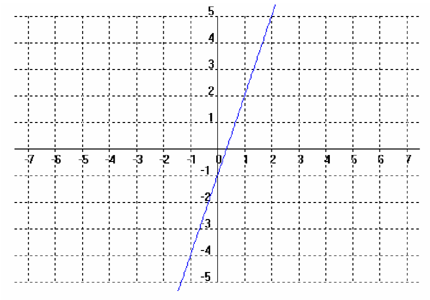
a)



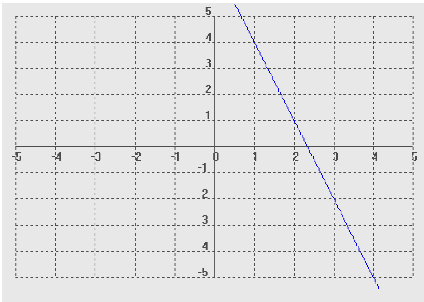
b)



c)



d)

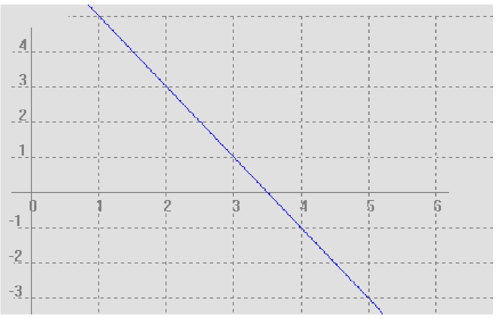


(Soluc: a) y=2x+4; b) y=-2x+3; c) y=3x-1; d) y=-3x+7)

☞ *Ejercicio libro:* ***pág. 114: 9***

31. Comprobar analíticamente si los siguientes puntos están alineados (¡no vale gráficamente!):
a) A(-1,-5), B(2,1) y C(6,9) **b)** A(-1,2), B(4,-3) y C(10,-8)

32.



Dada la recta de la figura, se pide:

a) Hallar su expresión analítica. *(Soluc: y=-2x+7)*

b) Comprobar gráficamente el valor de la pendiente obtenido en el apartado anterior.

c) Deducir, analíticamente, dónde corta a los ejes.

33. Colgado de una alcayata tenemos un muelle de 5 cm de largo; en él hemos colgado diferentes pesos y hemos medido la longitud que alcanza el muelle en cada caso, obteniendo los siguientes resultados:

Pesos (kg)	0	1	2	3	4
Longitud (cm)	5	7	9	11	13

Obtener la gráfica y contestar:

a) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

b) ¿Se trata de una función afín? ¿Por qué?

c) Hallar su pendiente. ¿Cuál es su expresión algebraica?
(Soluc: y=2x+5)

d) ¿Qué significa en este caso la ordenada en el origen?

34. La siguiente tabla corresponde a una función afín:

x	0	10	20	30	40	50
f(x)	-3					97

Completar la tabla y obtener f(x) <u>algebraicamente</u>. *(Soluc: f(x)=2x-3)*

35. Midiendo la temperatura a diferentes alturas se han obtenido los datos de la tabla:

Altura (m)	0	360	720	990
Temperatura (ºC)	10	8	6	4,5

a) Representar la temperatura en función de la altura.

b) Obtener su expresión algebraica. *(Soluc: y=-x/180+10)*

c) ¿A partir de qué altura la temperatura será menor de 0ºC? *(Soluc: x=1800 m)*

36. La tarifa de una empresa de mensajería con entrega domiciliaria es de 12 € por tasa fija más 5 € por cada kg.

a) Hallar la expresión analítica de la función "Precio del envío" en función de su peso en kg. *(Soluc: y=5x+12)*

b) Representarla gráficamente.

c) ¿Cuánto costará enviar un paquete de 750 gr? *(Soluc: 15 €)*

d) Si disponemos sólo de un billete de 50 €, ¿cuál es el peso máximo que podremos enviar? *(Soluc: 7,6 kg)*

37. Los beneficios de una empresa desde el momento de su creación son los que figuran en la siguiente tabla:

MESES TRANSCURRIDOS	0	3	6	9
BENEFICIOS (millones de €)	4	3		1

a) Representar el beneficio en función del tiempo transcurrido. ¿Qué tipo de función se obtiene?

b) Obtener gráficamente la pendiente y la ordenada en el origen, e indicar a continuación su expresión algebraica. *(Soluc: y=-x/3+4)*

c) Hallar <u>analíticamente</u> el dato que falta en la tabla. *(Soluc: 2)*

d) Hallar <u>analíticamente</u> a partir de qué mes la empresa no tendrá beneficios. *(Soluc: x=12)*

38. Una empresa de fotografía cobra, por el revelado de un carrete, un precio fijo de 1,5 €, y por cada foto, 50 céntimos.

a) Representar la función "Coste del revelado" en función del nº de fotos. Indicar su expresión algebraica.

b) ¿Cuánto costará revelar un carrete de 36 fotografías?

c) ¿Cuántas fotos podremos revelar con 100 €?

<u>Resolución gráfica de inecuaciones y sistemas de inecuaciones</u>:

39. Determinar la representación gráfica de la solución de cada una de las siguientes inecuaciones de 1^er^ grado con dos incógnitas:

a) x+2y¯3	**c)** 2x-yK4-x	**e)** y<x+2	**g)** 2x-y<6
b) x+2y<3	**d)** 3x+2y>7-3y	**f)** x+y¯5	**h)** 6x+5yK30

40. Representar gráficamente la solución de cada uno de estos sistemas de inecuaciones de 1[er] grado con dos incógnitas:

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y>-3 \\ 3x+y\le 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y\ge 6 \\ 3x+5y<10 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} y<2-x \\ y\ge x+2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x-y>6 \\ 3x+5y<10 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y\le 6 \\ -6x-4y\le -12 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x+y\le 5 \\ -2x+3y\ge 6 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} x+y\le 5 \\ 2x+2y<10 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} x\le 6 \\ y>4 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} 2x-y\le 6 \\ 2x-y>10 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} 2x-y>6 \\ 2x-y<10 \end{array}\right\}$

k) $\left.\begin{array}{r} x-y>-5 \\ x+y>-3 \\ x+y\le 10 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{r} y<3x \\ y>-x \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{r} y>-x+2 \\ y\le \frac{x}{2}+\frac{5}{2} \end{array}\right\}$

EJERCICIOS DE PARÁBOLAS:

41. Representar sobre los mismos ejes las siguientes parábolas. ¿Qué conclusiones podemos extraer?: **a)** $y=x^2$ **b)** $y=2x^2$ **c)** $y=x^2/2$ **d)** $y=-x^2$ **e)** $y=-4x^2$

42. Dadas las siguientes parábolas, hallar: i) Vértice
ii) Puntos de corte con los ejes
iii) Representación gráfica

a) $y=x^2-6x+8$
b) $y=x^2-2x-3$
c) $y=-x^2-4x-3$
d) $y=x^2-4x+7$
e) $y=x^2-6x$
f) $y=x^2+x+1$
g) $y=-x^2+5x-6$
h) $y=3x^2+15x+18$
i) $y=-x^2-2x-2$
j) $y=x^2+2x-1$
k) $y=x^2-4$
l) $y=x^2+4$
m) $y=x^2+4x+5$
n) $y=x^2+4x+3$
o) $y=-x^2-8x-4$
p) $y=2x^2+4x+6$
q) $y=-x^2-1$
r) $y=(x+5)^2-8$
s) $y=2(x-1)^2-8$
t) $y=(x-5)^2+8$
u) $y=-2(x-1)^2+8$
v) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-5$
w) $y=x^2-2x+1$
x) $y=x^2-4x+2$
y) $y=2x^2-8x+6$
z) $y=-3x^2-6x+12$
α) $y=x^2-2x+3$
β) $y=x^2-6x+5$
γ) $y=\frac{1}{4}x^2+x-2$
δ) $y=2x^2-10x+8$
ε) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$
ζ) $y=x^2-8x+7$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 106: 4; pág. 107: 6; pág. 115: 24, 25, 26****, 28, 30, 31, 33 y 34*

43. A partir de las gráficas obtenidas en el ejercicio anterior, indicar la solución de las siguientes inecuaciones de 2º grado:

a) $x^2-6x+8\ge 0$
b) $x^2-2x-3<0$
c) $-x^2-4x-3\ge 0$
d) $x^2-4x+7>0$
e) $x^2-6x\le 0$
f) $x^2+x+1\le 0$
g) $3x^2+15x+18>0$
h) $-x^2-2x-2>0$
i) $x^2+2x-1\ge 0$
j) $x^2-4<0$
k) $x^2+4\ge 0$
l) $x^2+4x+5<0$
m) $x^2+4x+3<0$
n) $-x^2-8x-4\ge 0$
o) $2x^2+4x+6\le 0$
p) $-x^2-1<0$

44. Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones de 2º grado:
a) $x^2-3x-4>0$ **b)** $2x^2+x-3\le 0$ **c)** $-x^2+x+6\ge 0$ **d)** $x^2+x+5<0$ **e)** $2x^2+x+1$¯0
f) $-x^2+6x-5<0$

45. a) Se sabe que la función $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos (1,1), (0,0) y (-1,1). Calcular **a**, **b** y **c**.
(Soluc: $y=x^2$)

b) Ídem para los puntos (1,4), (0,-1) y (2,15) *(Soluc: $y=3x^2+2x-1$)*

46. Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y=ax^2+ax+a$ y pasa por el punto P(1,9). Calcular el valor de **a**. ¿Cuál sería su vértice?

47. Calcular **b** para que la parábola $y=x^2+bx+3$ pase por el punto P(2,-1). ¿Cuál sería su vértice?

48. Calcular **m** para que la parábola $y=x^2+mx+10$ tenga el vértice en el punto V(3,1). ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

49. ¿Cuánto debe valer **k** para que la parábola $y=4x^2-20x+k$ tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas? ¿Para qué valores de **k** no cortará al eje x?

50. La parábola $y=ax^2+bx+c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá **c**? Si además sabemos que pasa por los puntos (1,3) y (4,6), ¿cómo calcularíamos **a** y **b**? Hallar a y b y representar la parábola.

51. Una parábola corta al eje de abscisas en los puntos x=1 y x=5. La ordenada del vértice es y=-2. ¿Cuál es su ecuación?

☞ *Ejercicio libro: pág. 115: 32*

52. Calcular la expresión de una función cuadrática cuya intersección con el eje x son los puntos (2,0) y (3,0)

53. **a)** Una parábola tiene su vértice en el punto V(1,1) y pasa por P(0,2). Hallar su ecuación.
(Soluc: $y=x^2-2x+2$)

b) Ídem para la parábola de vértice V(-2,3) que pasa por P(1,-3) *(Soluc: $y=-\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}$)*

54. En cada apartado, representar las parábolas sobre los mismos ejes:

a) $y=x^2$, $y=(x-4)^2$, $y=(x+5)^2$

b) $y=x^2$, $y=x^2+4$, $y=x^2-5$

c) A la vista de lo anterior, ¿cómo sería la parábola $y=(x-4)^2+5$? ¿Cuál es su vértice?

55. La longitud de la circunferencia y el área del círculo se expresan en función del radio. ¿Qué tipo de funciones son? Dibujar las gráficas sobre unos mismos ejes cartesianos. ¿Para qué valor del radio coinciden numéricamente la longitud y el área?

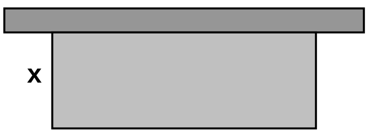
56. Con un listón de madera de 4 m de largo queremos fabricar un marco para un cuadro.

a) Indicar la expresión analítica de la función "Superficie" en función de la longitud *x* de la base.

b) Representar gráficamente la función anterior. ¿Cuál es su Dom(f)?

c) A la vista de la gráfica, ¿para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie? Interpretar el resultado.

57.



Con 100 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared de 60 metros de largo, como indica la figura.

a) Llamando **x** a uno de los lados contiguos al muro (ver fig.), expresar los otros dos lados en función de **x**

b) Obtener la función que expresa el área del recinto en función de x.

c) Representar la función anterior. ¿Cuál es su Dom(f)?

d) ¿Cuándo se hace máxima el área del recinto? ¿Cuánto vale dicha área?

58. Un labrador tiene 72 m de valla para hacer un corral de gallinas de forma rectangular. ¿Cómo cambiará el área del corral al variar la longitud *x* de uno de los lados? Representar gráficamente la función anterior.

FUNCIONES DEFINIDAS POR RAMAS:

59. Representar las siguientes **funciones definidas a trozos** e indicar: Dom(f) e Im(f), continuidad, intervalos de crecimiento, posibles M y m, y ecuación de las posibles asíntotas:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x & \text{si } x\in[2,\infty) \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-1 \\ 1-2x & \text{si } -1\le x<1 \\ 3x-1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x-2 & \text{si } x\in[2,4] \\ 5 & \text{si } x\in(4,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si } x\le 1 \\ -2 & \text{si } x=2 \\ x/2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } -5\le x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\in(1,\infty) \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x<0 \\ -2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

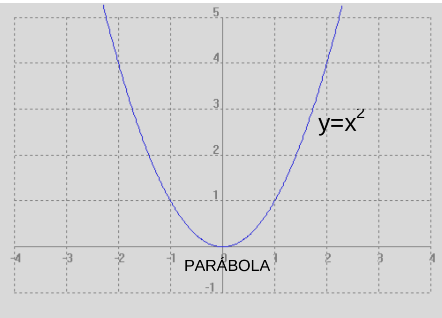
h) $f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } x\in(-\infty,2] \\ x^2-4x & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

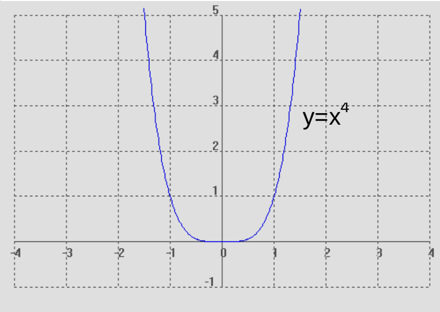
i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-5} & \text{si } x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si } x>3 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x-x^2 & \text{si } 0\le x<3 \\ x-4 & \text{si } 3\le x<6 \\ 0 & \text{si } x>6 \end{cases}$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 105: 3; pág. 114 y ss.: 20, 21 y 29***

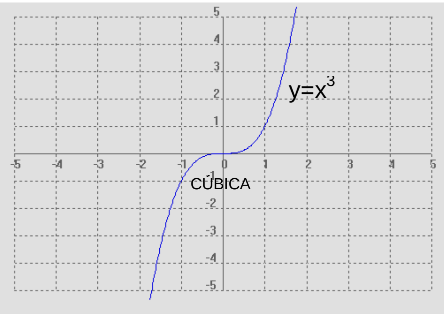
GRÁFICAS MÁS REPRESENTATIVAS

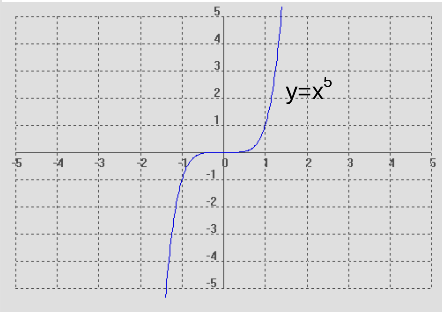




En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo par, tienen esta forma.

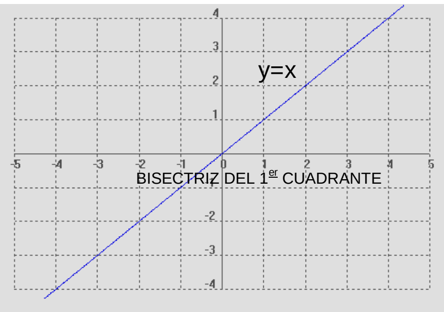
(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)

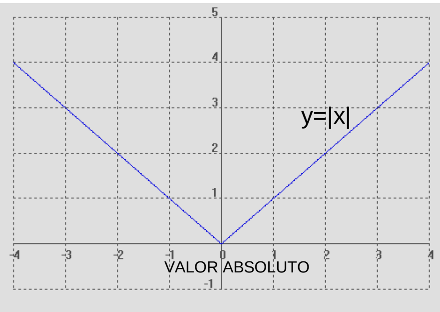




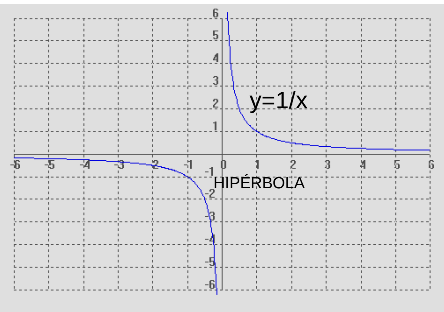
En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo impar ($\neq 1$), tienen esta forma.

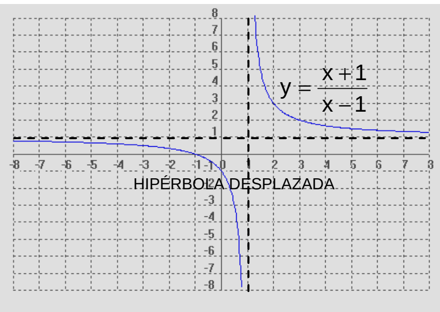
(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)





En general, la gráfica de $y=|f(x)|$ se obtiene reflejando la de $f(x)$ respecto al eje OY en el semiplano superior.

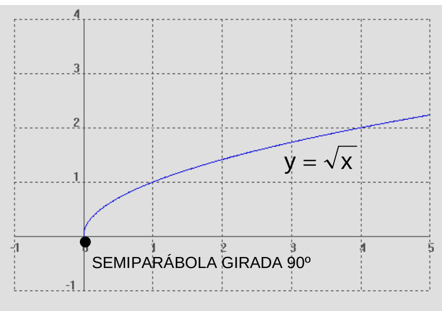


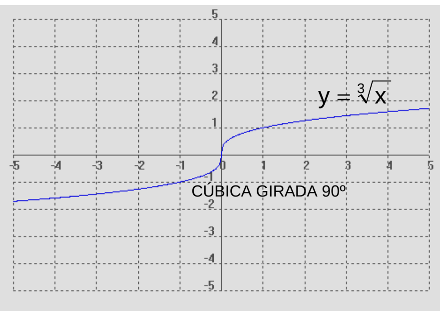


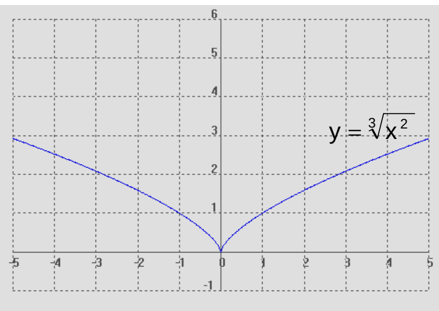
En general,

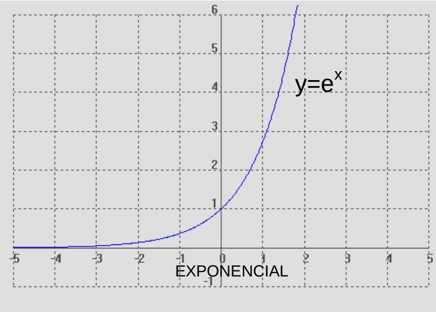
$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

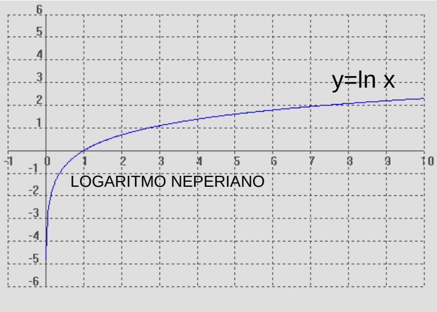
donde $c\neq 0$, es una hipérbola.

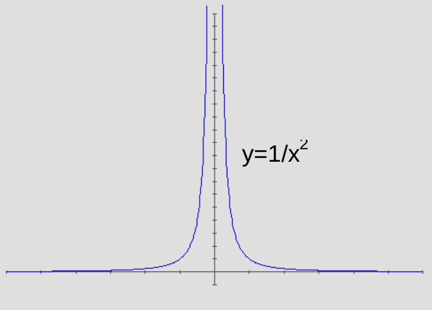


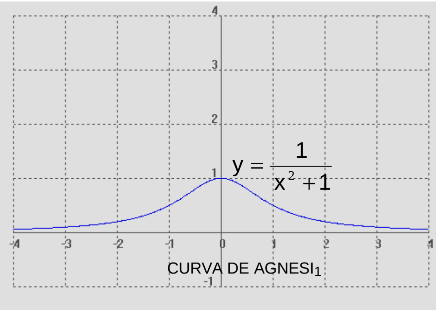


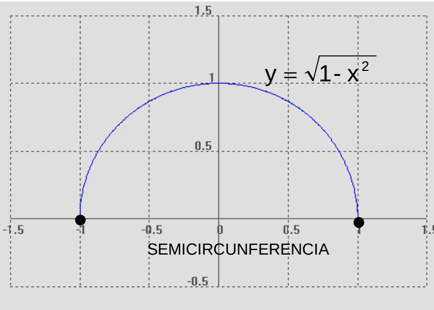


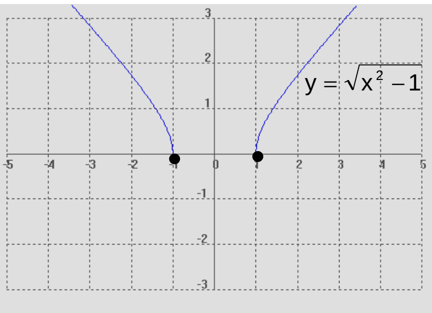


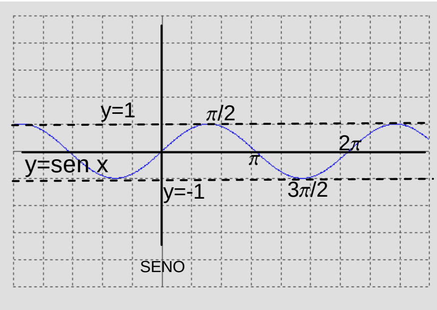


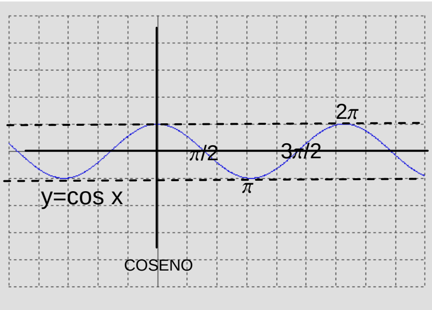


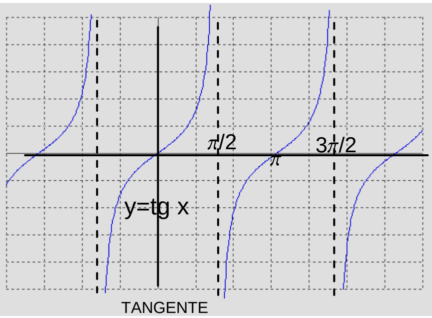












Nombre	Símbolo	
	Minúscula	**Mayúscula**
Alfa	α	Α
Beta	β	Β
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Épsilon	ε	Ε
Zeta	ζ	Ζ
Eta	η	Η
Theta	θ,ϑ	Θ
Iota	ι	Ι
Kappa	κ	Κ
Lambda	λ	Λ

My	μ	Μ
Ny	ν	Ν
Xi	ξ	Ξ
Ómicron	ο	Ο
Pi	π	Π
Rho	ρ	Ρ
Sigma	σ, ς	Σ
Tau	τ	Τ
Ípsilon	υ	Υ
Fi	ϕ,φ	Φ
Ji	χ	Χ
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

1 En honor de María Agnesi, matemática italiana del siglo XVIII, que fue la primera en investigar las propiedades de las curvas de este tipo.

ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe al menos uno
$\exists!$	Existe un único
$\nexists$	No existe
/	Tal que
:	Tal que
$<$	Menor que
$=$	Igual que
$>$	Mayor que
$\leq$	Menor o igual que
$\geq$	Mayor o igual que
∞	Infinito
$\circ$	Composición de funciones
$\propto$	Proporcional a
$\perp$	Perpendicular a
$\neq$	Distinto de
$\approx$ $\cong$ $\simeq$	Aproximadamente igual a
$\equiv$	Idéntico a
$\cup$	Unión de conjuntos
$\cap$	Intersección de conjuntos
$\subset$	Contenido en
$\supset$	Contiene a
$\in$	Perteneciente a
$\notin$	No perteneciente a
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Si y sólo si
Σ	Sumatorio
Π	Productorio
IN	Números naturales
Z	Números enteros
Q	Números racionales
I	Números irracionales[1]
IR	Números reales
₵	Números complejos

[1] En realidad esta notación no es muy estándar; la forma correcta de nombrar los irracionales sería IR-Q

La **criba de Eratóstenes** es un procedimiento para hallar todos los números primos menores que un número natural dado. Se llama así en honor al astrónomo y geógrafo griego del siglo III a. C. que, parece ser, fue el primero en dar con este método. Nosotros aquí vamos a hallar los primos menores que 1000. Para ello, eliminamos de la lista los múltiplos de 2. Luego tomamos el primer número después del 2 que no fue eliminado (el 3) y eliminamos de la lista sus múltiplos, y así sucesivamente. Es fácil advertir que bastará continuar este proceso hasta $\sqrt{1000} \cong 31{,}62...$, es decir, hasta el 31. Los números que permanecen en blanco son los primos[1]:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256
257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288
289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352
353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384
385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416
417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448
449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512
513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544
545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576
577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608
609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672
673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704
705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736
737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768
769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832
833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864
865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896
897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928
929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	1000																								

[1] Teniendo en cuenta la definición de número primo -todo número natural que tiene únicamente dos divisores naturales distintos: él mismo y el 1-, el 2 es primo (de hecho, es el único número primo par). El 1, por convenio, no se considera ni primo ni compuesto.