

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1 Indica, sin realizar la división, el tipo de expresión decimal de estos números.

a) $\frac{11}{6}$

b) $\frac{19}{33}$

c) $\frac{27}{14}$

d) $\frac{77}{50}$

a) $\frac{11}{6} \rightarrow$ Periódico mixto

c) $\frac{27}{14} \rightarrow$ Periódico mixto

b) $\frac{19}{33} \rightarrow$ Periódico puro

d) $\frac{77}{50} \rightarrow$ Decimal exacto

1.2 Señala cuáles de los siguientes números decimales no son periódicos.

a) 1,7 17 117 1117...

c) $\sqrt{5} = 2,2360679774...$

b) 3,012351235123...

d) 8,163264128256...

a) No es periódico.

c) No es periódico.

b) Sí es periódico.

d) No es periódico.

1.3 Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales.

a) $-0,1234567891011...$

c) 8,023023023...

b) $\sqrt{6} = 2,4494897427...$

d) $\sqrt[3]{8} = 2$

a) Irracional

c) Racional

b) Irracional

d) Racional

1.4 El laboratorio de ciencias es una clase rectangular de 8 metros de largo por 7 de ancho. Indica alguna medida en la clase que no pueda expresarse mediante números racionales.

La diagonal del rectángulo: $d = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$ m

1.5 Dado el número 53,2647, escribe:

a) Las mejores aproximaciones por defecto y por exceso, y los redondeos con una, dos y tres cifras decimales.

b) Los errores absolutos y relativos asociados a los redondeos.

a) Con una cifra decimal: $\begin{cases} \text{Exceso} \rightarrow 53,3 \\ \text{Defecto} \rightarrow 53,2 \\ \text{Redondeo} \rightarrow 53,3 \end{cases}$

Con tres cifras decimales: $\begin{cases} \text{Exceso} \rightarrow 53,265 \\ \text{Defecto} \rightarrow 53,264 \\ \text{Redondeo} \rightarrow 53,265 \end{cases}$

Con dos cifras decimales: $\begin{cases} \text{Exceso} \rightarrow 53,27 \\ \text{Defecto} \rightarrow 53,26 \\ \text{Redondeo} \rightarrow 53,26 \end{cases}$

b) E. abs. asociado a 53,3: $|53,3 - 53,2647| = 0,0353$

E. rel. asociado a 53,3: $\frac{0,0353}{53,2647} = 0,0007$

E. abs. asociado a 53,26: $|53,26 - 53,2647| = 0,0047$

E. rel. asociado a 53,26: $\frac{0,0047}{53,2647} = 8,8238 \cdot 10^{-5}$

E. abs. asociado a 53,265: $|53,265 - 53,2647| = 0,0003$

E. rel. asociado a 53,265: $\frac{0,0003}{53,2647} = 5,6322 \cdot 10^{-6}$

1.6 Una buena aproximación al número π es la fracción $\frac{22}{7}$. Si una fuente circular mide 12 metros de radio, ¿qué errores absoluto y relativo cometemos al medir su circunferencia tomando esta aproximación de π ?

$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3,1415 \cdot 12 = 75,396 \text{ m}$

Si aproximamos π por $\frac{22}{7}$, tenemos que $L = 75,4272 \text{ m}$.

Error absoluto: $|75,3960 - 75,4272| = 0,0312$

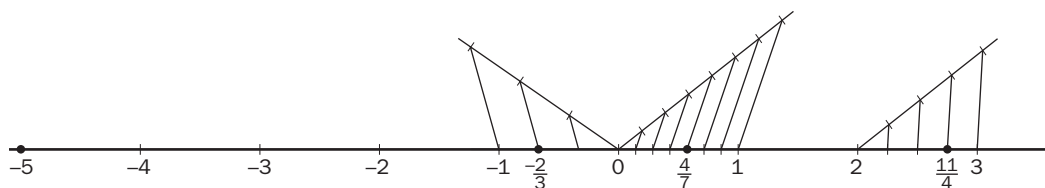
Error relativo: $\frac{0,0312}{75,3960} = 0,0004138$

1.7 Representa en la recta real estos números.

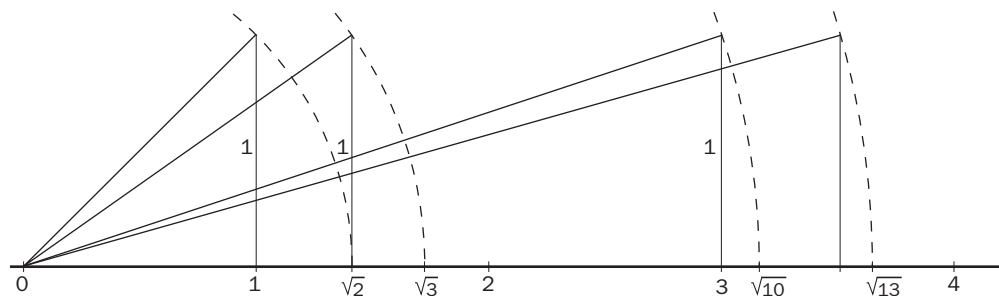
a) $-5, -\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ y $\frac{11}{4}$

b) $\sqrt{3}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$ y 2π

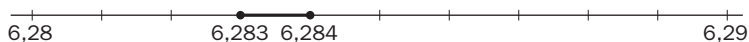
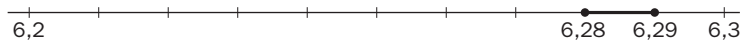
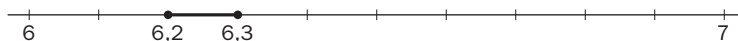
a)



b)



$2\pi = 6,283$



1.8 Realiza las siguientes operaciones en donde aparecen valores absolutos.

a) $\|-4\| + \|-4\|$

b) $\|-7\| \cdot \|2\| - \|-3\|$

a) $\|-4\| + \|-4\| = |4 - 4| = 0$

b) $\|-7\| \cdot \|2\| - \|-3\| = |7 \cdot 2 - 3| = |14 - 3| = 11$

1.9 Expresa de otras dos formas estos intervalos, e identifica cuáles son entornos.

a) $(3, 9]$

b) $-2 < x < 9$

c) $[-7, -4]$

a) $(3, 9] \rightarrow 3 < x \leq 9 \rightarrow$  No es un entorno.

b) $-2 < x < 9 \rightarrow (-2, 9) \rightarrow$  Es un entorno abierto.

c) $[-7, -4] \rightarrow -7 \leq x \leq -4 \rightarrow$  Es un entorno cerrado.

1.10 Calcula el radio y el centro de estos entornos.

a) $(-5, 5)$

c) $|x - 1| < 6$

b) $[-1, 7]$

d) $|x + 1| \leq 3$

Sea $a =$ centro y $r =$ radio.

a) $(-5, 5): a = \frac{-5 + 5}{2} = 0$

$r = \frac{5 - (-5)}{2} = \frac{10}{2} = 5$

b) $(-1, 7): a = \frac{-1 + 7}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$r = \frac{7 - (-1)}{2} = \frac{8}{2} = 4$

c) $|x - 1| < 6: a = 1 \quad r = 6$

d) $|x + 1| \leq 3: a = -1 \quad r = 3$

1.11 Realiza estas operaciones expresando el resultado como una única potencia.

a) $3^3 \cdot 3^{-2} \cdot 3$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

e) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} \cdot 2^{-2}$

c) $3^5 \cdot 3^{-3} : 3^{-2}$

f) $(4^2)^2 \cdot 4^{-1} : 4 \cdot 4^3$

a) $3^3 \cdot 3^{-2} \cdot 3 = 3^2$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^5$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

e) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} \cdot 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

c) $3^5 \cdot 3^{-3} : 3^{-2} = 3^4$

f) $(4^2)^2 \cdot 4^{-1} : 4 \cdot 4^3 = 4^5$

1.12 Expresa en notación científica estas cantidades.

a) Longitud de un paramecio: 0,000 025 metros

b) Edad del universo: 15 000 millones de años

a) $2,5 \cdot 10^{-5}$

b) $1,5 \cdot 10^{10}$

1.13 Calcula:

a) $3,62 \cdot 10^{12} - 2,4 \cdot 10^{12}$

c) $(4,35 \cdot 10^8) \cdot (2,1 \cdot 10^7)$

b) $2,45 \cdot 10^8 + 6,12 \cdot 10^7$

d) $(4,6 \cdot 10^{17}) : (8 \cdot 10^{12})$

a) $3,62 \cdot 10^{12} - 2,4 \cdot 10^{12} = 1,22 \cdot 10^{12}$

b) $2,45 \cdot 10^8 + 6,12 \cdot 10^7 = 24,5 \cdot 10^7 + 6,12 \cdot 10^7 = 30,62 \cdot 10^7$

c) $(4,35 \cdot 10^8) \cdot (2,1 \cdot 10^7) = 9,135 \cdot 10^{15}$

d) $(4,6 \cdot 10^{17}) : (8 \cdot 10^{12}) = 0,575 \cdot 10^5 = 5,75 \cdot 10^4$

1.14 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los siguientes radicales.

a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[10]{5}$

b) 3, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{3}$

a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[10]{5}$ → Reducimos a índice común los radicales: $\sqrt[10]{3^5}$, $\sqrt[10]{2^2}$, $\sqrt[10]{5}$

Ordenamos de menor a mayor: $\sqrt[10]{2^2} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[10]{3^5} \Rightarrow \sqrt[5]{2} < \sqrt[10]{5} < \sqrt{3}$

b) 3, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{3}$ → Reducimos a índice común los radicales: $\sqrt[6]{3^6}$, $\sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[6]{5^2}$, $\sqrt[6]{3}$

Ordenamos de menor a mayor: $\sqrt[6]{3} < \sqrt[6]{2^3} < \sqrt[6]{5^2} < \sqrt[6]{3^6} \Rightarrow \sqrt[6]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{5} < 3$

1.15 Indica cuántas raíces tienen los siguientes números y calcúlalas cuando sea posible.

a) $\sqrt{0,49}$

c) $\sqrt{-4}$

b) $\sqrt[3]{216}$

d) $\sqrt[3]{-125}$

a) $\sqrt{0,49}$ Tiene dos raíces reales: +0,7 y -0,7.

c) $\sqrt{-4}$ No tiene raíces reales.

b) $\sqrt[3]{216}$ Tiene una raíz real: 6.

d) $\sqrt[3]{-125}$ Tiene una raíz real: -5.

1.16 De los siguientes pares de potencias, ¿cuáles son equivalentes?

a) $21^{\frac{1}{5}}$, $21^{\frac{2}{10}}$

c) $7^{\frac{2}{4}}$, $7^{\frac{15}{30}}$

b) $13^{\frac{5}{8}}$, $13^{\frac{6}{7}}$

d) $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{0,666\dots}$

a) $21^{\frac{1}{5}}$, $21^{\frac{2}{10}}$ → Sí son equivalentes.

c) $7^{\frac{2}{4}}$, $7^{\frac{15}{30}}$ → Sí son equivalentes.

b) $13^{\frac{5}{8}}$, $13^{\frac{6}{7}}$ → No son equivalentes.

d) $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{0,666\dots}$ → Sí son equivalentes.

1.17 Expresa los siguientes radicales como potencias y, si es posible, simplificalas.

a) $\sqrt[3]{64}$

c) $\sqrt[4]{49}$

b) $\sqrt{27}$

d) $\sqrt[6]{4096}$

a) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

c) $\sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = 7^{\frac{2}{4}} = 7^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

d) $\sqrt[6]{4096} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{6}} = 2^2$

1.18 Escribe tres potencias equivalentes a:

a) $3^{\frac{1}{2}}$

b) $7^{\frac{1}{5}}$

a) $3^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3^{\frac{2}{4}}, 3^{\frac{3}{6}}, 3^{\frac{5}{10}}$

b) $7^{\frac{1}{5}} \rightarrow 7^{\frac{2}{10}}, 7^{\frac{3}{15}}, 49^{\frac{1}{10}}$

1.19 Expresa como radicales estas potencias.

a) $16^{\frac{2}{3}}$

c) $81^{\frac{3}{5}}$

b) $125^{\frac{2}{4}}$

d) $100^{\frac{5}{2}}$

a) $16^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16^2} = \sqrt[3]{2^8}$

c) $81^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{81^3} = \sqrt[5]{3^{12}}$

b) $125^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{125^2} = \sqrt[4]{5^6}$

d) $100^{\frac{5}{2}} = \sqrt{100^5}$

1.20 Los lados de tres cuadrados miden, respectivamente, $5^{\frac{1}{4}}$, $5^{\frac{1}{6}}$ y $5^{\frac{2}{3}}$ metros.

Ordénalos de menor a mayor según sus correspondientes áreas.

Reduciendo los exponentes de las potencias a común denominador: $5^{\frac{3}{12}}$, $5^{\frac{2}{12}}$, $5^{\frac{8}{12}}$.

Entonces: $5^{\frac{2}{12}} < 5^{\frac{3}{12}} < 5^{\frac{8}{12}} \rightarrow 5^{\frac{1}{6}} < 5^{\frac{1}{4}} < 5^{\frac{2}{3}}$

1.21 Haz las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{2}$

b) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2}$

d) $\sqrt[3]{10} : \sqrt{5}$

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{144} = 12$

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{3^5 \cdot 2^3} = \sqrt[15]{1944}$

b) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{10} : \sqrt{5} = \sqrt[6]{10^2 : 5^3} = \sqrt[6]{0,8}$

1.22 Realiza las operaciones siguientes.

a) $\sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[5]{9} : \sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$

b) $(\sqrt[3]{2^2})^2$

d) $(\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}})^2$

a) $\sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[5]{9} : \sqrt{3} = \sqrt[10]{4 \cdot 9^2 : 3^5} = \sqrt[10]{\frac{4}{3}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$

b) $(\sqrt[3]{2^2})^2 = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

d) $(\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}})^2 = (\sqrt[9]{3^3})^2 = \sqrt[9]{3^6} = \sqrt[3]{3^2}$

1.23 Simplifica extrayendo factores.

a) $\sqrt{180}$

c) $\sqrt[3]{72}$

b) $\sqrt[4]{162}$

d) $\sqrt[3]{24000}$

a) $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{3^2}$

b) $\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[4]{2}$

d) $\sqrt[3]{24000} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5\sqrt[3]{3} = 20\sqrt[3]{3}$

1.24 Introduce los factores enteros en los radicales.

a) $2\sqrt{5}$

c) $10\sqrt[3]{2}$

b) $11\sqrt{7}$

d) $5\sqrt[4]{2}$

a) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$

c) $10\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2000}$

b) $11\sqrt{7} = \sqrt{11^2 \cdot 7} = \sqrt{847}$

d) $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{1250}$

1.25 Opera y simplifica.

a) $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{50}$

b) $\sqrt{20} - 6\sqrt{45} + \sqrt{80}$

c) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} + 3\sqrt[4]{48}$

a) $\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + 3\sqrt[3]{3^2 \cdot 2} - \sqrt[3]{5^2 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3^2 \cdot 2} - \sqrt[3]{5^2 \cdot 2}$

b) $\sqrt{20} - 6\sqrt{45} + \sqrt{80} = \sqrt{2^2 \cdot 5} - 6\sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} - 18\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = -12\sqrt{5}$

c) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} + 3\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^5} + \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} + 3\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2} + 6\sqrt[4]{3} = 5\sqrt[4]{2} + 6\sqrt[4]{3}$

1.26 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{72}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{200}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{12}} = \frac{\sqrt[3]{12^2}}{12} = \frac{\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2}}{12} = \frac{\sqrt[3]{18}}{6}$

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{72}} = \frac{\sqrt[4]{72^3}}{72} = \frac{\sqrt[4]{2^9 \cdot 3^6}}{72} = \frac{4 \cdot 3\sqrt[4]{18}}{72} = \frac{\sqrt[4]{18}}{6}$

d) $\frac{1}{\sqrt[4]{200}} = \frac{\sqrt[4]{200^3}}{200} = \frac{\sqrt[4]{2^9 \cdot 5^6}}{200} = \frac{4 \cdot 5\sqrt[4]{50}}{200} = \frac{\sqrt[4]{50}}{10}$

1.27 Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

c) $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9} + \sqrt{15}}{3 - 5} = \frac{3 + \sqrt{15}}{-2}$

c) $\frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$

1.28 Calcula los siguientes logaritmos.

a) En base 2 de 4, 16, 64, 256, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

b) En base 3 de 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$

a) $\log_2 4 = 2$ $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

$\log_2 16 = 4$ $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

$\log_2 64 = 6$

$\log_2 256 = 8$

b) $\log_3 27 = 3$ $\log_3 \frac{1}{3} = -1$

$\log_3 9 = 2$ $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

$\log_3 3 = 1$

$\log_3 1 = 0$

1.29 Usando la definición de logaritmo, halla x.

a) $\log_x 36 = 2$

b) $-2 = \log_x \frac{1}{25}$

c) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $\log_x 36 = 2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 6^2 \Rightarrow x = 6$

b) $-2 = \log_x \frac{1}{25} \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{25} \Rightarrow x^{-2} = 5^{-2} \Rightarrow x = 5$

c) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x \Rightarrow 27^{-\frac{1}{3}} = x \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

1.30 Sin calculadora, halla la primera cifra de los logaritmos decimales de 5100; 823; 50; 0,32; 12315; -3; 0,0023; 7 y 0,00003.

$\log 5100 = 3,...$

$\log -3$ no existe.

$\log 823 = 2,...$

$\log 0,0023 = -2,...$

$\log 50 = 1,...$

$\log 7 = 0,8,...$

$\log 0,32 = -0,4,...$

$\log 0,00003 = -4,....$

$\log 12315 = 4,...$

1.31 Sabiendo que $\log 5 = 0,7$, calcula:

a) $\log 0,125$

c) $\log 500$

b) $\log 2$

d) $\log \sqrt[3]{25}$

a) $\log 0,125 = \log \frac{125}{1000} = \log \frac{5^3}{1000} = 3 \log 5 - \log 1000 = 3 \cdot 0,7 - 3 = 2,1 - 3 = -0,9$

b) $\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 0,7 = 0,3$

c) $\log 500 = \log (5 \cdot 100) = \log 5 + \log 100 = 0,7 + 2 = 2,7$

d) $\log \sqrt[3]{25} = \log 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log 5 = \frac{2}{3} \cdot 0,7 = \frac{1,4}{3} = 0,4\widehat{6}$

1.32 Mediante un cambio de base y la calculadora, halla:

a) $\log_3 20$

d) $\log_{0,1} 2$

b) $\log_5 15$

e) $\log_4 11$

c) $\log_{0,5} 10$

f) $\log_7 60$

a) $\log_3 20 = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,7268$

d) $\log_{0,1} 2 = \frac{\log 2}{\log 0,1} = -0,3010$

b) $\log_5 15 = \frac{\log 15}{\log 5} = 1,6826$

e) $\log_4 11 = \frac{\log 11}{\log 4} = 1,7297$

c) $\log_{0,5} 10 = \frac{\log 10}{\log 0,5} = -3,3219$

f) $\log_7 60 = \frac{\log 60}{\log 7} = 2,1041$

1.33 Toma logaritmos en estas expresiones.

$$\text{a) } A = \frac{100bc^3}{\sqrt{d}}$$

$$\text{b) } B = \frac{x^2y}{10\sqrt[3]{z}}$$

$$\text{a) } A = \frac{100bc^3}{\sqrt{d}} \Rightarrow \log A = \log 100bc^3 - \log \sqrt{d} = \log 100 + \log b + 3\log c - \frac{1}{2}\log d$$

$$\text{b) } B = \frac{x^2y}{10\sqrt[3]{z}} \Rightarrow \log B = \log x^2y - \log 10\sqrt[3]{z} = 2\log x + \log y - \log 10 - \frac{1}{3}\log z$$

1.34 Toma antilogaritmos en estas expresiones.

$$\text{a) } \log A = 3 \log b + \log c - 2$$

$$\text{b) } \log B = 4 \log x - \log y - \frac{\log z}{3}$$

Tomando antilogaritmos se tiene que:

$$\text{a) } A = \frac{b^3 \cdot c}{100}$$

$$\text{b) } B = \frac{x^4}{y \cdot \sqrt[3]{z}}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.35 Demuestra la igualdad siguiente, siendo n cualquier número natural.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Para $n = 1$ es cierta.

Veamos que si se cumple para un valor n , también se cumple para el siguiente, $n + 1$.

Deberíamos obtener $2^{n+2} - 1$.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = \underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n)}_{2^{n+1} - 1} + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1,$$

como queríamos demostrar.

1.36 Demuestra la igualdad siguiente, siendo n cualquier número natural.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$$

Para $n = 2$ es cierta.

Suponemos que es cierta para $n + 1$ y comprobamos que lo es para $n + 2$. Deberíamos obtener $\frac{n+1}{n+2}$.

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad es cierta.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Números reales y aproximaciones

1.37 Indica qué tipo de expresión decimal tienen los siguientes números.

a) $\frac{7}{20}$

c) $\frac{11}{18}$

b) $\frac{8}{11}$

d) $\frac{13}{35}$

a) $\frac{7}{20} = 0,35 \rightarrow$ Decimal exacto

b) $\frac{8}{11} = 0,\widehat{72} \rightarrow$ Decimal periódico puro

c) $\frac{11}{18} = 0,6\widehat{1} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

d) $\frac{13}{35} = 0,3\widehat{714285} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

1.38 Copia y completa la tabla escribiendo estos números en todos los conjuntos numéricos a los que puedan pertenecer.

$$\frac{3}{5}; -\sqrt{2}; 1,2525\dots; 2,010010001\dots; -4; 0,1\overline{6}$$

Naturales (N)	
Enteros (Z)	
Racionales (Q)	
Reales (R)	

Naturales (N)	
Enteros (Z)	-4
Racionales (Q)	$-4; \frac{3}{5}; 1,2525\dots; 0,1\overline{6}$
Reales (R)	Todos

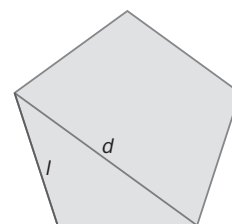
1.39 La relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado se llama número de oro o áureo, y se designa por ϕ . Su valor es $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$

¿Es irracional? ¿Por qué?

Calcula una aproximación por defecto con un error menor que una centésima.

Sí es irracional, ya que al ser $\sqrt{5}$ irracional, entonces $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ también lo es.

$$\phi = 1,61$$



1.40 ¿Qué errores absoluto y relativo se cometen cuando se aproxima 4,1592 por 4,16?

$$\text{Error absoluto} = |4,1592 - 4,16| = 0,0008$$

$$\text{Error relativo} = \frac{0,0008}{4,16} = 0,0002$$

1.41 ¿Cuántos números reales existen comprendidos entre 5,187 246 y 5,187 247? Escribe tres de ellos.

Existen infinitos números reales entre ambos, por ejemplo: 5,187 246 1; 5,187 246 2; 5,187 246 3.

1.42 Indica si los siguientes números son racionales o irracionales.

a) 5,372 727 272...

c) 3,545 445 444 5...

b) 0,127 202 002 000...

d) 8,666 126 712 67...

a) Racional

c) Irracional

b) Irracional

d) Racional

1.43 Rellena los recuadros vacíos con $<$ o $>$ según sea necesario en cada caso.

a) $\frac{1}{6} \square 0,166\ 667$

c) $1,333\ 334 \square \frac{4}{3}$

b) $1,732\ 051 \square \sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{5} \square 1,709\ 976$

a) $\frac{1}{6} < 0,166\ 667$

c) $1,333\ 334 > \frac{4}{3}$

b) $1,732\ 051 > \sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{5} < 1,709\ 976$

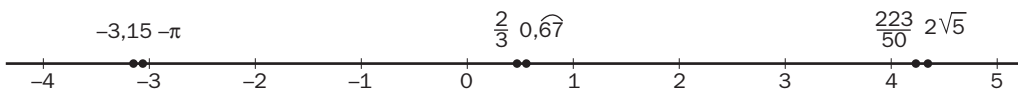
1.44 Ordena de menor a mayor y representa gráficamente los siguientes números reales.

$$-\pi; 2\sqrt{5}; \frac{2}{3}; \frac{223}{50}; -3,15; 0,\widehat{67}$$

Necesitamos tener la aproximación decimal de cada uno de los números:

$$-\pi = -3,14159\dots \quad 2\sqrt{5} = 4,4721\dots \quad \frac{2}{3} = 0,666\dots \quad \frac{223}{50} = 4,46 \Rightarrow -3,15 < -\pi < \frac{2}{3} < 0,\widehat{67} < \frac{223}{50} < 2\sqrt{5}$$

Utilizando la aproximación decimal anterior, representamos gráficamente los números:



1.45 Realiza las siguientes operaciones.

a) $|-7 + 2|$

c) $\| -9 \| + \| 2 \| \cdot \| -5 \|$

b) $\| -5 \| - \| -8 \|$

d) $\| -9 \| \| 5 - 3 \| - \| -4 \| : \| -2 \|$

a) $|-7 + 2| = 5$

c) $\| -9 \| + \| 2 \| \cdot \| -5 \| = 19$

b) $\| -5 \| - \| -8 \| = 3$

d) $\| -9 \| \| 5 - 3 \| - \| -4 \| : \| -2 \| = 16$

Intervalos, semirrectas y entornos

1.46 Expresa mediante desigualdades y también gráficamente en la recta real los siguientes intervalos y semirrectas.

a) $[-1, +\infty)$

c) $(-\infty, 3)$

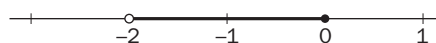
b) $(-2, 0]$

d) $[4, 8]$

a) $[-1, +\infty) \rightarrow x \geq -1 \rightarrow$



b) $(-2, 0] \rightarrow -2 < x \leq 0 \rightarrow$



c) $(-\infty, 3) \rightarrow x < 3 \rightarrow$



d) $[4, 8] \rightarrow 4 \leq x \leq 8 \rightarrow$



1.47 Señala si las siguientes igualdades son verdaderas o no.

a) $E[1, 2] = [-1, 3]$

c) $E(-2, 3) = (-5, 0)$

b) $E(0, 1) = [-1, 1]$

d) $E(4, 2) = (3, 5]$

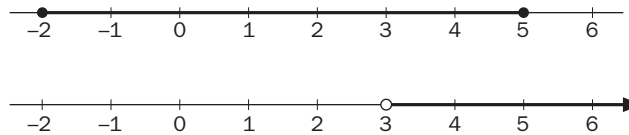
a) Verdadera

c) Falsa

b) Falsa

d) Falsa

1.48 Representa en la recta real el intervalo $A = [-2, 5]$ y la semirrecta $B = (3, +\infty)$.
¿Existe algún intervalo de puntos común a ambos? En caso afirmativo, hállalo.



Sí existe intervalo común a ambos: $(3, 5]$.

Potencias de exponente entero. Notación científica

1.49 Escribe los siguientes números como potencias cuya base sea un número primo.

a) 8, 125, 243, 1024, 2401

b) $\frac{1}{625}, \frac{1}{343}, \frac{1}{256}, \frac{1}{81}, \frac{1}{32}$

a) $8 = 2^3$; $125 = 5^3$; $243 = 3^5$; $1024 = 2^{10}$; $2401 = 7^4$

b) $\frac{1}{625} = 5^{-4}$; $\frac{1}{343} = 7^{-3}$; $\frac{1}{256} = 2^{-8}$; $\frac{1}{81} = 3^{-4}$; $\frac{1}{32} = 2^{-5}$

1.50 Haz estas operaciones con potencias.

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2$

c) $5^{-3} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2$

a) $4^{-3} \cdot 4^2 : (4)^{-1} = 1$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 3$

c) $5^{-3} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]^2 = 5$

1.51 Escribe en notación científica los números:

a) 5 182 000 000 000

c) 835 000 000 000 000

b) 0,000 000 000 369

d) 0,000 000 000 003 51

¿Cuál tiene un orden de magnitud superior?

a) $5,182 \cdot 10^{12}$

c) $8,35 \cdot 10^{14}$

b) $3,69 \cdot 10^{-10}$

d) $3,51 \cdot 10^{-12}$

Tiene mayor orden de magnitud el c.

Radicales. Potencias de exponente fraccionario

1.52 Ordena de mayor a menor estos radicales.

a) $3, \sqrt{10}, \sqrt[3]{26}$

a) $\sqrt{10} > 3 > \sqrt[3]{26}$

b) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{12}$

b) $\sqrt[5]{12} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

1.53 Calcula el valor de las siguientes potencias.

a) $25^{\frac{3}{2}}$

b) $343^{\frac{2}{3}}$

a) $25^{\frac{3}{2}} = 125$

b) $343^{\frac{2}{3}} = 49$

c) $16^{0,25}$

d) $27^{0,3333\dots}$

c) $16^{0,25} = 2$

d) $27^{0,3333\dots} = 3$

1.54 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27}$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108}$

a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{6^3} = \sqrt{216}$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^6 : 5^2} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{5^2}}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{392} = \sqrt[15]{2^{19} \cdot 7^6}$

d) $\sqrt[4]{2187} : \sqrt{108} = \sqrt{\frac{3}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$

h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{2^{-5}}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{8}}} = \sqrt[4]{2}$

h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2 = 4$

Radicales semejantes. Racionalización

1.55 Opera y simplifica.

a) $2\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{80}$

b) $4\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

a) $9\sqrt{5}$

b) $13\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{27} - 2\sqrt{32} + \sqrt{180}$

d) $3\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{375}$

c) $3\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$

d) $-14\sqrt[3]{3}$

1.56 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

e) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

a) $2\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$

e) $-3 - 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{9}$

d) $\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$

f) $-2 - \sqrt{6}$

Logaritmo de un número. Propiedades

1.57 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 32$

$\log_3 729$

$\log_{10} 1\,000\,000$

b) $\log_2 \frac{1}{16}$

$\log_3 \frac{1}{81}$

$\log_{10} \frac{1}{1000}$

c) $\log_2 \sqrt{8}$

$\log_3 \sqrt[3]{243}$

$\log_{10} \sqrt[5]{100}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

$\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100\,000}$

a) $\log_2 32 = 5$

$\log_3 729 = 6$

$\log_{10} 1\,000\,000 = 6$

b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$

$\log_3 \frac{1}{81} = -4$

$\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$

c) $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$

$\log_3 \sqrt[3]{243} = \frac{5}{3}$

$\log_{10} \sqrt[5]{100} = \frac{2}{5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$

$\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{100\,000} = \frac{-5}{3}$

1.58 Encuentra el valor de x .

a) $\log_x 125 = 3$

c) $\log_x \frac{1}{16} = -8$

b) $-3 = \log_x 2$

d) $-\frac{1}{3} = \log_{27} x$

a) $x = 5$

c) $x = \sqrt{2}$

b) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d) $x = \frac{1}{3}$

1.59 Si $\log 8 = 0,9031$, halla:

a) $\log 800$

c) $\log 0,64$

e) $\log 5$

b) $\log 2$

d) $\log 40$

f) $\log \sqrt[5]{8}$

a) $\log 800 = \log 8 + \log 100 = 0,9031 + 2 = 2,9031$

b) $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 \Rightarrow \log 2 = \frac{1}{3} \log 8 = 0,301$

c) $\log 0,64 = \log \frac{64}{100} = \log 64 - \log 100 = 2 \log 8 - 2 = -0,1938$

d) $\log 40 = \log (10 \cdot 4) = \log 10 + \log 4 = 1 + 2 \log 2 = 1,602$

e) $\log 40 = \log (8 \cdot 5) = \log 8 + \log 5 \Rightarrow \log 5 = \log 40 - \log 8 = 0,6989$

f) $\log \sqrt[5]{8} = \frac{1}{5} \log 8 = 0,1806$

1.60 Utilizando las propiedades de los logaritmos y siendo $\log x = 0,70$ y $\log y = 1,18$, calcula:

a) $\log (x^2 y)$

b) $\log \left(\frac{x^3}{y^2} \right)$

c) $\log (\sqrt{x} \sqrt[3]{y^2})$

a) $\log (x^2 \cdot y) = 2\log x + \log y = 2,58$

b) $\log \left(\frac{x^3}{y^2} \right) = 3 \log x - 2 \log y = -0,26$

c) $\log (\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}) = \frac{1}{2} \log x + \frac{2}{3} \log y = 1,137$

1.61 Aplicando un cambio de base y usando la calculadora, halla los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 14$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12$

b) $\log_3 32$

d) $\log_5 10$

a) $\log_2 14 = \frac{\log 14}{\log 2} = 3,8073$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 12 = \frac{\log 12}{\log \frac{1}{2}} = -3,5850$

b) $\log_3 32 = \frac{\log 32}{\log 3} = 3,1546$

d) $\log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5} = 1,4307$

1.62 Transforma estas expresiones algebraicas en logarítmicas.

a) $A = \frac{x^2 y^3 z^5}{t^4}$

c) $C = \frac{\sqrt{x} y z^2}{10 t^3}$

b) $B = \frac{100 x^3 y}{t^2}$

d) $D = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{y^2} z^{\frac{3}{4}}}{t^{\frac{2}{5}}}$

a) $\log A = 2 \log x + 3 \log y + 5 \log z - 4 \log t$

c) $\log C = \frac{1}{2} \log x + \log y + 2 \log z - 3 \log t - 1$

b) $\log B = 2 + 3 \log x + \log y - 2 \log t$

d) $\log D = \frac{1}{2} \log x + \frac{2}{3} \log y + \frac{3}{4} \log z - \frac{2}{5} \log t$

1.63 Tomando antilogaritmos, convierte en algebraicas las siguientes expresiones.

a) $\log A = 3 \log x + 2 \log y - 5 \log z$

b) $\log B = \frac{3}{2} \log x + \log y - \frac{2}{3} \log z - 2$

a) $A = \frac{x^3 y^2}{z^5}$

b) $B = \frac{\sqrt{x^3} \cdot y}{\sqrt[3]{z^2} \cdot 100}$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

1.64 Di si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.

a) La raíz de un número negativo no existe.

b) Todo número decimal es racional.

c) Una fracción irreducible de denominador 63 es periódica mixta.

d) El número $\sqrt{\frac{12}{3}}$ pertenece a N, Z, Q y R.

e) -1 pertenece al intervalo $(-\sqrt{25}, -\sqrt[3]{8})$.

f) $\frac{a}{b} = 3,414\ 114\ 111\dots$

a) Verdadera

c) Falsa

e) Falsa

b) Verdadera

d) Verdadera

f) Verdadera

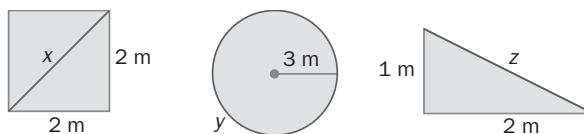
1.65 En la siguiente cadena de contenidos:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Encuentra un número que pertenezca a cada conjunto, pero no a los anteriores.

$$1 \in \mathbf{N}; -1 \in \mathbf{Z}; \frac{1}{2} \in \mathbf{Q}; \sqrt{2} \in \mathbf{R}$$

1.66 Las longitudes x , y , z , ¿pueden ponerse como cociente de dos enteros? ¿Por qué?



No, ya que $x = \sqrt{8}$, $y = 6\pi$ y $z = \sqrt{5}$ son números irracionales.

1.67 El salón de mi casa mide 4,86 metros de largo. Redondea este valor a metros y a decímetros.

$$4,86 \text{ m} \rightarrow \text{Redondeo a metros} = 5 \text{ m}$$

$$4,86 \text{ m} \rightarrow \text{Redondeo a decímetros} = 49 \text{ dm}$$

1.68 ¿Qué intervalo se puede expresar mediante la desigualdad $|x - 3| \leq 2$?

El intervalo buscado es $[1,5]$.

1.69 ¿Qué números enteros están a la vez en las semirrectas $(-\infty, -2]$ y $(-6, +\infty)$?

$-5, -4, -3$ y -2

1.70 Copia en tu cuaderno y completa los huecos utilizando la definición de logaritmo mentalmente.

a) $\log_2 8 = \square$ b) $\log_3 \square = 4$ c) $\log_{\square} 125 = 3$

a) 3 b) 81 c) 5

1.71 Di si son ciertas o no estas afirmaciones.

- a) Entre dos números reales siempre hay otro.
- b) El logaritmo de un número nunca es negativo.
- c) El logaritmo de un número negativo no existe.
- d) En el intervalo $(-4, -3)$ no hay números enteros, pero sí racionales.
- e) $|x| = -x$ para ciertos valores de x .

a) Verdadera b) Falsa c) Verdadera d) Verdadera e) Verdadera

1.72 Explica cómo expresiones tan aparentemente distintas como $2^{0.5}$, $\sqrt{2}$ y $8^{\frac{1}{6}}$ son equivalentes.

$$8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{0.5} = \sqrt{2}$$

P R O B L E M A S P A R A A P L I C A R

1.73 Para solar la entrada de una nueva sala de exposiciones se utilizan baldosas de 20×30 centímetros. Si la entrada es un recinto circular de 6 metros de radio, ¿cuántas baldosas se necesitan, como mínimo, suponiendo que se puedan aprovechar todos los recortes?

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = 36\pi \text{ m}^2 = 360\,000\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{baldosa}} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$$

$360\,000\pi : 600 \approx 1884,9 \Rightarrow$ El n.º mínimo de baldosas son 1885.

1.74 En un club matemático tienen una diana de números reales. A cada dardo se le asigna un número real y se ha de clavar en la franja de la diana correspondiente.



Si gana el jugador que realiza el mayor número de aciertos en las franjas adecuadas, ¿cuál de estos dos jugadores habrá ganado?

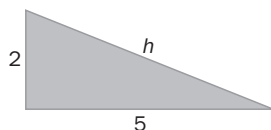
1.º jugador: 1 acierto ($-\sqrt{9} \in \mathbf{Z}$, $\sqrt{7} \notin \mathbf{Q}$); 2.º jugador: 0 aciertos ($\frac{1}{5} \notin \mathbf{Z}$) \Rightarrow Gana el 1.º jugador.

1.75 La longitud aproximada de una circunferencia de radio 7 centímetros es de 43,988 centímetros.

¿Cuál y de qué tipo es la aproximación de π que se ha utilizado?

$$43,988 = 2\pi r \Rightarrow \pi = \frac{43,988}{14} = 3,142 \quad \text{Luego se ha tomado una aproximación por exceso a la milésima.}$$

1.76 ¿Qué aproximación está más cerca del valor de la hipotenusa del triángulo de la figura, 5,385 ó 5,386 centímetros? ¿Cuánto más cerca?



La aproximación 5,385 se encuentra más cerca del valor de la hipotenusa.

Está aproximadamente 7 milésimas más cerca que 5,386.

1.77 Si entre cada dos números reales existen otros, encuentra entre $\frac{66}{25}$ y $\frac{53}{20}$ tres números irracionales del tipo $\{a\pi, a \in \mathbb{Q}\}$.

$$\begin{cases} \frac{66}{25} = 2,64 \\ \frac{53}{20} = 2,65 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{841}{1000} \pi; y = \frac{421}{500} \pi; z = \frac{843}{1000} \pi$$

1.78 En una fábrica de latas de refrescos han decidido aproximar el número π como $\frac{157}{50}$. ¿Cuánto se ahorran de área de aluminio y de volumen de líquido por lata si son cilíndricas de 3 centímetros de radio y 11 de altura?

$$\frac{157}{50} = 3,14$$

$$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 18\pi + 66\pi = 84\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{\text{aprox}} = 84 \cdot 3,14 = 263,76 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = 99\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow V_{\text{aprox}} = 99 \cdot 3,14 = 310,86 \text{ cm}^3$$

$$A_{\text{ahorrada}} = 84\pi - 263,76 = 0,13 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{ahorrado}} = 99\pi - 310,86 = 0,16 \text{ cm}^3$$

1.79 Un país invierte el 0,17% del PIB en ayuda al desarrollo del Tercer Mundo y las ONG piden cumplir la recomendación de la ONU para erradicar la pobreza, que consiste en dedicar el 0,7%.

Si el PIB del país es de 2 billones de euros al año, ¿cuánto dinero deja de destinar el país a ayuda al desarrollo según las indicaciones de la ONU? (Realiza las operaciones en notación científica.)

$$2 \text{ billones} = 2 \cdot 10^{12} \text{ €}$$

$$\text{Dinero invertido} = \frac{17}{10000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 34 \cdot 10^8 \text{ €} = 3,4 \cdot 10^9 \text{ €}$$

$$\text{Dinero recomendado} = \frac{7}{1000} \cdot 2 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^9 \text{ €} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ €}$$

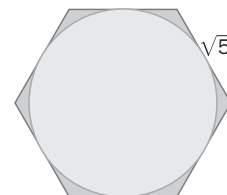
$$\text{Dinero no destinado} = 1,4 \cdot 10^{10} - 3,4 \cdot 10^9 = 10,6 \cdot 10^9 \text{ €} = 1,06 \cdot 10^{10} \text{ €}$$

- 1.80 Un profesor escribe en la pizarra la siguiente operación: $\sqrt[5]{8^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Y pide a la mitad de la clase que la desarrollen en forma de radicales, y a la otra mitad, que lo hagan en forma de potencia. ¿Qué resultado obtendrá cada una de las partes de la clase?

Desarrollando en forma de radicales se obtiene como resultado $\sqrt[30]{2}$

Desarrollando en forma de potencia se obtiene como resultado $2^{\frac{1}{30}}$

- 1.81 Calcula el área de la circunferencia inscrita en un hexágono regular de $\sqrt{5}$ centímetros de lado.



Radio = Apotema. Por el Teorema de Pitágoras: $r^2 + \frac{5}{4} = 5 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{2}$ cm²

- 1.82 Una cafetería incrementa cada año el precio de un café en un 4% (sea cual sea el IPC). Si actualmente cuesta 1,10 euros, ¿podrías encontrar la fórmula que relaciona el precio del café con los años transcurridos? ¿Cuánto costará el café dentro de 5 años?

Sea x el precio del café. Subir cada año un 4% su precio se traduce en: $x + x \cdot \frac{4}{100} = x \left(1 + \frac{4}{100}\right) = x \cdot 1,04$

Así, la fórmula pedida será $1,1 \cdot 1,04^n$ donde n = número de años transcurridos.

Aplicando dicha fórmula, dentro de 5 años el precio del café será $1,1 \cdot 1,04^5 = 1,34$

- 1.83 En un terremoto aparecen dos tipos de ondas sísmicas: las P , longitudinales y de velocidad de propagación rápida, y las ondas S , transversales y de velocidad menor. En la escala de Richter, la magnitud de un terremoto se calcula como:

$$M = \log A + 3 \log (8t) - 2,92$$

Donde A es la amplitud en milímetros de las ondas S (medidas en el sismógrafo), y t , el tiempo transcurrido, en segundos, entre la aparición de las ondas P y las S .

- a) Copia y completa la tabla, calculando las características para tres sismos diferentes.

	t (s)	A (mm)	M
1	8	15	
2	15		4
3		45	7

- b) Calcula la relación entre las amplitudes de dos terremotos de magnitudes 6 y 9. (Suponemos el mismo valor para t .)

a)

	t (s)	A (mm)	M
1	8	15	3,67
2	15	4,81	4
3	71,2	45	7

b) $\log A = 9 - 3 \log (8t) + 2,92$

$\log A' = 6 - 3 \log (8t) + 2,92$

Restando esas dos expresiones se obtiene:

$\log A - \log A' = 3 \Rightarrow \log \frac{A}{A'} = 3 \Rightarrow \frac{A}{A'} = 10^3$

Números reales y aproximaciones

1.84 Calcula los intervalos que aproximan al número $\sqrt{2} + 1$ con un error menor que una décima, una centésima y una milésima.

Error menor que una décima: (2,4;2,5)

Error menor que una centésima: (2,41;2,42)

Error menor que una milésima: (2,414;2,415)

1.85 El número irracional $\pi = 3,141\ 592\ 6\dots$ es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Halla las aproximaciones por defecto, exceso y redondeo de π a la milésima. Para el redondeo, calcula también los errores absoluto y relativo que se cometen.

Aproximación por defecto: $\pi \approx 3,141$

Aproximación por exceso: $\pi \approx 3,142$

Aproximación por redondeo: $\pi \approx 3,142$

Error Absoluto = $|3,142 - \pi| = 0,000\ 407\dots$

Error Relativo = $\left| \frac{0,000\ 407}{\pi} \right| = 0,000\ 129\dots$

Representación en intervalos y semirrectas

1.86 Relaciona en tu cuaderno las diferentes formas de representar los siguientes intervalos y semirrectas.

$[-1, 2]$	$x > 2$	
$(2, +\infty)$	$0 < x < 4$	
$(3, 6]$	$-1 \leq x \leq 2$	
$(0, 4)$	$3 < x \leq 6$	

$[-1, 2] \rightarrow -1 \leq x \leq 2 \rightarrow$	
$(2, +\infty) \rightarrow x > 2 \rightarrow$	
$(3, 6] \rightarrow 3 < x \leq 6 \rightarrow$	
$(0, 4) \rightarrow 0 < x < 4 \rightarrow$	

1.87 Dibuja los siguientes entornos en la recta real e indica mediante desigualdades los intervalos que determinan, así como su centro y su radio.

a) $E(2, 4)$

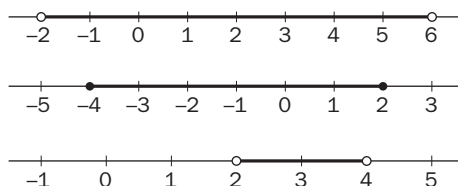
b) $E[-1, 3]$

c) $E(3, 1)$

a) $E(2, 4): -2 < x < 6$; Centro = 2 y Radio = 4 \rightarrow

b) $E[-1, 3]: -4 \leq x \leq 2$; Centro = -1 y Radio = 3 \rightarrow

c) $E(3, 1): 2 < x < 4$; Centro = 3 y Radio = 1 \rightarrow



Radicales y operaciones

1.88 Realiza las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} : (\sqrt[3]{3})^2$

b) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12}$

d) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200}$

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{1125}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} : (\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[12]{3}$

b) $\sqrt[3]{9} : \sqrt{12} = \sqrt[6]{3 \cdot 2^{-6}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

d) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - 4\sqrt{8} - \sqrt{200} = 9\sqrt{2}$

1.89 Calcula el valor de k en cada caso.

a) $\sqrt[3]{k} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt[k]{-343} = -7$

b) $\sqrt[5]{k} = -2$

d) $\sqrt[k]{625} = -5$

a) $k = \frac{1}{8}$

c) $k = 3$

b) $k = -32$

d) $k = 4$

Operaciones con logaritmos

1.90 Halla el valor de x en cada caso.

a) $\log_x 16 = -4$

c) $\log_{11} 1331 = x$

b) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$

d) $\log_x 25 = 4$

a) $x = \frac{1}{2}$

c) $x = 3$

b) $x = 343$

d) $x = \sqrt{5}$

1.91 Transforma las siguientes expresiones en un único logaritmo.

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12$

b) $\log 18 - \log 27 - \log 2$

c) $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9)$

a) $\log 16 - \log 3 + \log 12 = \log \frac{16 \cdot 12}{3} = \log \frac{2^4 \cdot 2^2 \cdot 3}{3} = \log 2^6$

b) $\log 18 - \log 27 - \log 2 = \log \frac{18}{27 \cdot 2} = \log \frac{2 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2} = \log \frac{1}{3} = -\log 3$

c) $(\log 25 + \log 4) - (\log 8 - \log 9) = \log \frac{25 \cdot 4 \cdot 9}{8} = \log \frac{5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{2^3} = \log \frac{5^2 \cdot 3^2}{2}$

AMPLIACIÓN

1.92 Redondeando π a la milésima, el volumen de una esfera es de 14,139 centímetros cúbicos. Averigua su radio.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow r = 1,5, \text{ con } \pi = 3,142$$

1.93 Marca en una recta numérica el conjunto de puntos cuyas distancias al punto -2 sean:

a) Igual a 3

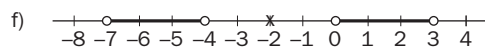
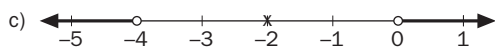
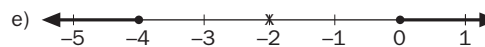
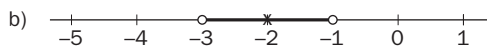
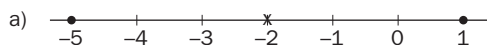
b) Menor que 1

c) Mayor que 2

d) No mayor que 3

e) No menor que 2

f) Mayor que 2 y menor que 5



1.94 Determina el conjunto de valores que verifica cada condición.

a) $|x^2| = |x|^2$

b) $|x| = \frac{1}{x}$

c) $|2x - 1| < 3$

a) $x \in \mathbf{R}$

b) $x = 1$

c) $-1 < x < 2$

1.95 Calcula a , b , c y d en esta igualdad.

$$\sqrt{10^4 \cdot 14^6 \cdot 81^{12}} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$$

$$\sqrt{2^{10} \cdot 3^{48} \cdot 5^4 \cdot 7^6} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \Rightarrow a = 5; b = 24; c = 2; d = 3$$

1.96 La sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ se va acercando cada vez más al número $e = 2,718\ 28\dots$
¿Con qué elemento de la sucesión consigues aproximar hasta la milésima dicho número?

Con el elemento $a_6 = 2,718\ 055\dots$

1.97 Ordena los siguientes logaritmos aplicando su definición y sus propiedades.

$$\log \sqrt[3]{10}, \log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}, \ln \sqrt{\frac{1}{e}}, \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{3}$$

$$\ln \sqrt{\frac{1}{e}} < \log \sqrt[3]{10} < \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{3} < \log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

1.98 Opera y simplifica:

a) $2\sqrt{x} + 5\sqrt{25x} - 3\sqrt{36x} - 4\sqrt{9x}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\sqrt{3}} : \sqrt[3]{9}$

a) $-3\sqrt{x}$

b) $x = -\frac{13}{60}$

1.99 El decibelio es la unidad que se usa para medir la sonoridad, $\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, esto es, el volumen con que percibimos un sonido determinado, donde I es la intensidad sonora, e $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado (W/m^2), la intensidad umbral que el oído humano puede percibir.

a) Calcula β para sonidos con intensidades de 10^{-6} y 10^{-9} W/m^2 , respectivamente.

b) Si el umbral del dolor para el ser humano está en 120 decibelios, determina qué intensidad debe tener un sonido para alcanzar dicho umbral.

a) $I = 10^{-9} \Rightarrow \beta = 10 \log\left(\frac{10^{-9}}{10^{-12}}\right) = 30$ decibelios

$$I = 10^{-6} \Rightarrow \beta = 10 \log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 60 \text{ decibelios}$$

b) $120 = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow 0 = \log I \Rightarrow I = 1 \text{ W/m}^2$

1.100 Gasto familiar

La siguiente tabla muestra el consumo semanal de tres alimentos que realizan las familias Martínez, Aguiar y Guindo.

	Pan (N.º de barras)	Carne (kg)	Leche (L)
Martínez	8	2,5	8
Aguiar	10	1,75	9
Guindo	6	2,25	7

Los precios en euros de la barra de pan, el kilogramo de carne y el litro de leche han variado durante las cuatro últimas semanas y están recogidos en esta tabla.

	1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a
Pan	0,45	0,40	0,40	0,45
Carne	12	11,5	12,5	13
Leche	0,9	0,9	0,95	0,95

- Calcula el gasto total correspondiente a cada una de las familias en la primera semana.
- Halla el porcentaje de variación del precio de la carne en las semanas segunda, tercera y cuarta en relación con el precio de la primera.
- Determina el porcentaje de variación del gasto total de la familia Guindo en la cuarta semana en relación con la segunda.

a) Martínez: $8 \cdot 0,45 + 2,5 \cdot 12 + 8 \cdot 0,9 = 40,80 \text{ €}$

Aguiar: $10 \cdot 0,45 + 1,75 \cdot 12 + 9 \cdot 0,9 = 33,60 \text{ €}$

Guindo: $6 \cdot 0,45 + 2,25 \cdot 12 + 7 \cdot 0,9 = 36 \text{ €}$

b) De la primera semana a la segunda: $\frac{11,5}{12} = 0,958 \quad 1 - 0,958 = 0,042 \Rightarrow$ Ha bajado un 4,2%.

De la primera semana a la tercera: $\frac{12,5}{12} = 1,042 \Rightarrow$ Ha subido un 4,2%.

De la primera semana a la cuarta: $\frac{13}{12} = 1,083 \Rightarrow$ Ha subido un 8,3%.

c) $\frac{6 \cdot 0,45 + 2,25 \cdot 13 + 7 \cdot 0,95}{6 \cdot 0,40 + 2,25 \cdot 11,5 + 7 \cdot 0,9} = \frac{38,6}{34,575} = 1,116 \Rightarrow$ Ha subido un 11,6%.

1.101 La piscina circular

En el dibujo aparece representada una piscina circular que se ha construido de forma que su contorno es el de la circunferencia inscrita a un cuadrado.



Se quiere plantar con césped el área de la corona circular limitada por la piscina y la circunferencia circunscrita al cuadrado mencionado. ¿Cuánto medirá esa área?

Datos:

Profundidad de la piscina: 2 metros

Tiempo que se ha empleado en llenar la piscina con un grifo que arroja 37,23 litros por minuto: 45 horas.

Volumen de la piscina: $37,23 \cdot 45 \cdot 60 = 100\,521 \text{ L} = 100\,521 \text{ dm}^3 = 100,521 \text{ m}^3$

Radio de la piscina: $r = \sqrt{\frac{100,521}{2\pi}} = 4 \text{ m}$

Superficie de la zona con césped: $\pi(R^2 - r^2) = \pi(32 - 16) = 16\pi = 50,27 \text{ m}^2$

AUTOEVALUACIÓN

1.A1 Sean los números $A = 1,7864\dots$ y $B = 2,3879\dots$

Calcula $A + B$ y $A - B$ con una aproximación a la milésima.

$$A + B = 4,174 \quad A - B = -0,602$$

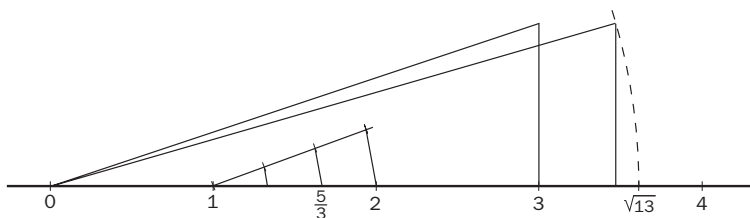
1.A2 Representa en la recta real estos números.

a) $\frac{5}{3}$

b) $\sqrt{13}$

Cuál de ellos es racional y cuál es irracional?

¿Qué teoremas has aplicado en cada caso?

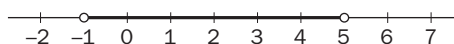


$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} \rightarrow$ Racional y para representarlo se aplica el Teorema de Tales.

$\sqrt{13} \rightarrow$ Irracional y para representarlo se aplica el Teorema de Pitágoras.

1.A3 Un conjunto de números reales x cumplen que $|x - 2| < 3$. Describe este conjunto utilizando intervalos y desigualdades, y gráficamente.

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 5) \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow$$



1.A4 Realiza la siguiente operación dando el resultado en notación científica.

$$(0,26 \cdot 10^{-4}) \cdot (8,53 \cdot 10^9)^2 + 7,2 \cdot 10^{13}$$

$$1,9638 \cdot 10^{15}$$

1.A5 Realiza las siguientes operaciones.

a) $81^{1,25}$

c) $9^{1,5}$

b) $8^{\frac{2}{3}}$

d) $125^{\frac{4}{3}}$

a) 243

c) 27

b) 4

d) 625

1.A6 Racionaliza estas expresiones.

a) $\frac{4}{\sqrt{8}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt[3]{18}}{6}$

c) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4}$

1.A7 Realiza las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2}$

c) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^4$

b) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{3}$

d) $3\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$

a) $\sqrt[4]{18}$

c) $\sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt[15]{2^5 \cdot 3^{-3}}$

d) $20\sqrt{3}$

1.A8 Sabiendo que $\log 2 = 0,301\dots$, calcula:

a) $\log 5$

c) $\log 16$

b) $\log 20$

d) $\log_5 2$

a) $\log 5 = 0,699$

c) $\log 16 = 1,204$

b) $\log 20 = 1,301$

d) $\log_5 2 = 0,43$

1.A9 Transforma esta expresión en logarítmica.

$$A = \frac{x^3 \cdot \sqrt[7]{y^2} \cdot z^{\frac{3}{4}}}{t^2}$$

$$\log A = 3 \log x + \frac{2}{7} \log y + \frac{3}{4} \log z - 2 \log t$$

1.A10 Escribe la expresión en forma algebraica.

$$\log A = \frac{1}{5} \log x + \frac{2}{9} \log y - 8 \log z$$

$$A = \frac{\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[9]{y^2}}{z^8}$$

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

La nómina de los números

En un país de números, cada habitante h recibe una nómina mensual en miles de euros igual a $\sqrt[h]{h}$. Así, el habitante 1 percibe $\sqrt[1]{1} = 1$; el 2 cobra $\sqrt[2]{2} = 1,41$, etc. ¿Cuántos individuos tiene el país? ¿Cuál de ellos es el que recibe la nómina más alta? ¿Y cuál la más baja?

- a) Existen infinitos individuos, ya que h puede ser cualquier número real positivo.
- b) Si consideramos h como número natural, el mayor salario será $\sqrt[3]{3} = 1,442$, o sea 1 442 €.

El menor $\sqrt[1]{1} = 1$, o sea 1 000 €.

Si analizamos el mayor valor de h (consideraremos un valor muy grande, por ejemplo 1 000 000) tendremos:

$$\sqrt[1\,000\,000]{1\,000\,000} \approx 1, \text{ o sea } 1\,000 \text{ €}$$

El problema puede ampliarse para valores entre 0 y 1, así: $\sqrt[0,000001]{0,000001} \approx 0$. Luego si nos acercamos a cero, no se tendrá sueldo.

El problema podría retomarse una vez se haya acabado con las aplicaciones de la derivada en bachillerato: L'Hopital y puntos críticos, así podríamos verificar que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

y que el valor máximo de la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ se da cuando $x = e$, luego el mayor salario es: $\sqrt[e]{e} = 1,4446$, o sea: 1 444,6 €.