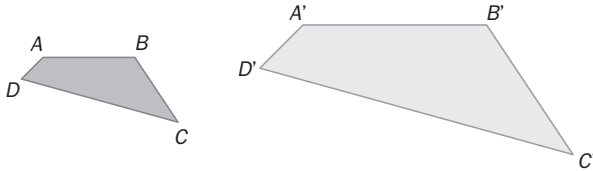


7 SEMEJANZA Y TRIGONOMETRÍA

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 7.1 Estos dos cuadriláteros son semejantes, con razón de semejanza 3. Calcula la razón de proporcionalidad que hay entre sus perímetros.



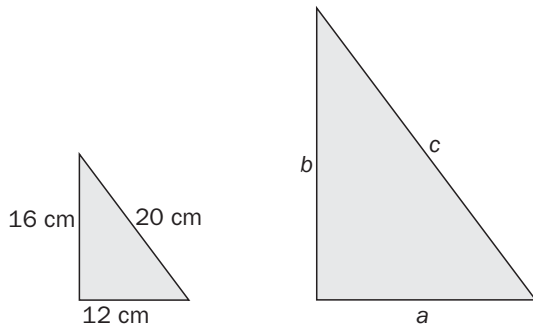
Se utiliza el teorema de Tales.

$$\begin{aligned} \text{Si } A'B' &= 3 AB; & B'C' &= 3 BC; \\ C'D' &= 3 CD; & D'A' &= 3 DA \end{aligned}$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{A'B' + B'C' + C'D' + D'A'}{AB + BC + CD + DA} = 3$$

- 7.2 Los lados de un triángulo miden 12, 16 y 20 centímetros.

Dibuja otro triángulo semejante a él sabiendo que su escala debe ser de 1:2.



Escala 1:2 → Razón de semejanza: 2

Por el teorema de Tales, los lados del triángulo dado y su semejante son proporcionales.

Los lados del triángulo buscado son:

$$a = 24 \text{ cm}$$

$$b = 32 \text{ cm}$$

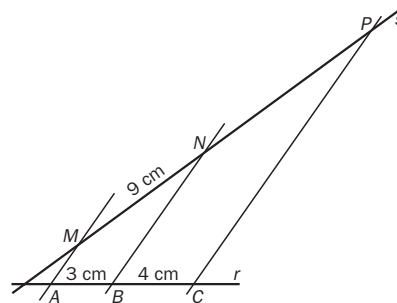
$$c = 40 \text{ cm}$$

- 7.3 En una recta r hay tres puntos, A , B y C , que distan sucesivamente 3 y 4 centímetros. Por esos puntos se trazan rectas paralelas que cortan a la recta s en M , N y P . Si MN mide 9 centímetros, ¿cuánto mide el segmento NP ?

Se utiliza el teorema de Tales.

$$\text{Razón de semejanza: } \frac{3}{9} = \frac{4}{NP}$$

Por tanto, $NP = 12 \text{ cm}$



- 7.4 Considera los triángulos ABC y DEF .

Halla la longitud del lado DF y la medida del ángulo \hat{F} de manera que ambos triángulos sean semejantes.

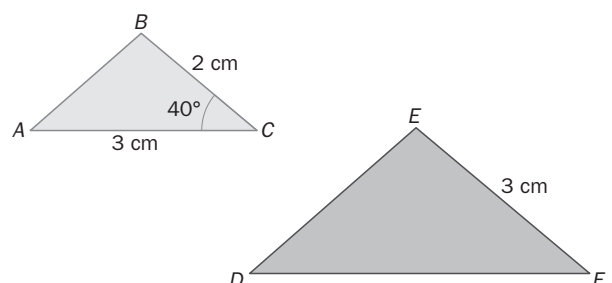
¿Qué criterio de semejanza has utilizado?

La razón de semejanza para lados homólogos ha de ser:

$$\frac{EF}{BC} = 1,5 \Rightarrow \frac{DF}{AC} = 1,5 \Rightarrow DF = 4,5 \text{ cm.}$$

Utilizando el tercer criterio de semejanza de triángulos, si ABC y DEF son semejantes:

$$\hat{F} = \hat{C} = 40^\circ$$



7.5 Utiliza los criterios de semejanza para explicar si las siguientes frases son verdaderas o falsas.

- a) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
- b) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
- c) Si dos triángulos isósceles tienen el mismo ángulo desigual, entonces son semejantes.

a) Verdadera. Los triángulos equiláteros tienen los tres lados iguales y, por tanto, los tres ángulos. Cumple el primer criterio de semejanza de triángulos.

b) Falsa. Por ser triángulos rectángulos, solo sabemos que tienen un ángulo igual. No cumplen ningún criterio de semejanza.

c) Verdadera. Un triángulo, por ser isósceles, tiene dos lados iguales y, por ello, dos ángulos también iguales.

Si dos triángulos isósceles tienen un ángulo igual, los otros dos también tienen que ser iguales. Cumplirían el primer criterio de semejanza.

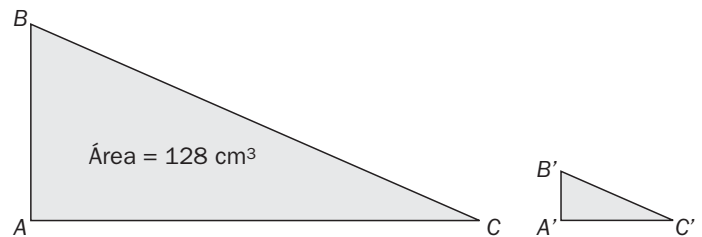
7.6 El área de un triángulo ABC mide 128 m^2 . ¿Cuál será el área de un triángulo semejante $A'B'C'$ cuyos lados midan la mitad?

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

Razón de semejanza del menor al mayor: $\frac{1}{2}$

Razón de áreas: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Área del nuevo triángulo: $128 : 4 = 32 \text{ m}^2$



7.7 De dos triángulos semejantes se sabe que en el primero, uno de sus ángulos mide 35° , y en el segundo, otro mide 55° . ¿Qué clase de triángulos son?

Si los triángulos son semejantes, tenemos 2 ángulos iguales, uno de 35° y otro de 55° . Si sumamos estos dos ángulos, el tercero valdrá 90° , por lo cual se tratará de triángulos rectángulos.

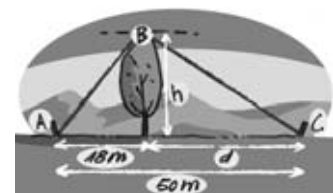
7.8 El árbol de la figura está sujeto con dos cuerdas, de manera que el triángulo ABC es rectángulo. Halla la altura del árbol y su distancia al punto C .

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$(BC)^2 = d^2 + h^2, \text{ siendo } d = (50 - 18) = 32 \text{ m}$$

Si aplicamos el teorema de la altura:

$$h^2 = 18 \cdot d = 18 \cdot 32 = 576 \Rightarrow h = 24 \text{ m}$$



7.9 Halla el área y el perímetro del triángulo de la figura.

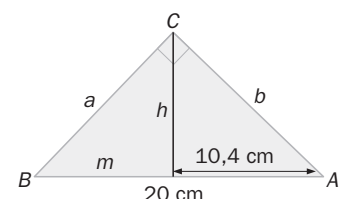
Puesto que el valor de la base es de 20 cm , se puede calcular $m = 9,6 \text{ cm}$.

Aplicando el teorema de la altura, $h^2 = m \cdot n = 9,6 \cdot 10,4 \Rightarrow h = 9,99 \text{ cm}$

El área pedida es: $A = \frac{20 \cdot 9,99}{2} = 99,92 \text{ cm}^2$

Se aplica Pitágoras para calcular los valores de a y b .

$$a = \sqrt{h^2 + m^2} = 13,85 \text{ cm} \quad b = \sqrt{h^2 + n^2} = 14,42 \text{ cm}$$



Por tanto, el perímetro $P = 48,27 \text{ cm}$

7.10 Expresa en grados los siguientes ángulos.

- a) $\frac{\pi}{5}$ rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad
 b) 0,8 rad d) 6 rad

Equivalencia: 2π rad son 360° .

A partir de la relación fundamental se obtiene la siguiente equivalencia.

- a) $\frac{\pi}{5}$ rad = $\frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ c) $\frac{\pi}{3}$ rad = $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$
 b) 0,8 rad = 46° d) 6 rad = 344°

7.11 Indica en radianes la medida de los siguientes ángulos.

- a) 37° b) 142° c) 335° d) 225°

Se utiliza la equivalencia en radianes: $360^\circ = 2\pi$.

- a) $37^\circ = 1,3$ rad c) $335^\circ = 5,8$ rad
 b) $142^\circ = 2,5$ rad d) $225^\circ = 3,9$ rad

7.12 Los lados de un triángulo ABC miden 5, 12 y 13 centímetros. Comprueba si es un triángulo rectángulo y halla las razones trigonométricas del ángulo de menor amplitud.

Si es un triángulo rectángulo, cumplirá el teorema de Pitágoras:

$$12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$$

Por tanto, se trata de un triángulo rectángulo.

El ángulo pequeño se opone al lado pequeño, que es el cateto que mide 5 cm.

Las razones trigonométricas de \hat{B} son:

$$\cos \hat{B} = \frac{12}{13} \quad \sin \hat{B} = \frac{5}{13} \quad \text{tg } \hat{B} = \frac{5}{12}$$

7.13 Utilizando la calculadora, halla el valor de x en los siguientes casos.

- a) $\text{sen } 40^\circ = x$ c) $\text{tg } x = 1$
 b) $\cos x = 0$ d) $\text{tg } 225^\circ = x$
 a) $x = 0,64$ c) $x = 45^\circ; \quad x = 225^\circ$
 b) $x = 90^\circ; \quad x = 270^\circ$ d) $x = 1$

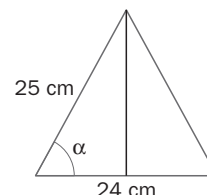
7.14 Calcula las razones trigonométricas del ángulo α .

$$\cos \alpha = \frac{12}{25} = 0,48$$

Se aplica la primera relación fundamental de la trigonometría para calcular el $\text{sen } \alpha$:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 0,88$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 1,83$$



7.15 Si el coseno de un ángulo agudo α es $\frac{\sqrt{2}}{3}$, calcula: a) $\text{sen } \alpha$, b) $\text{tg } \alpha$.

Se aplica la primera relación fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = 0,88 \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = 1,87$$

7.16 Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α si su tangente es igual a $\sqrt{5}$.

Se usa la primera relación de la trigonometría para llegar a la siguiente expresión:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2 \alpha + 1}} = 0,41$$

Se utiliza la segunda relación fundamental, de manera que: $\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{5} \cdot 0,41 = 0,91$.

7.17 Resuelve el triángulo de la figura.

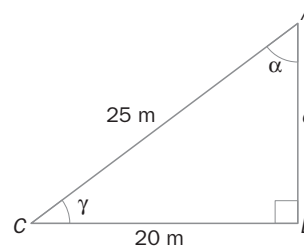
Se usa el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15\text{m}$$

Se aplican las razones trigonométricas:

$$\text{sen } \alpha = \frac{20}{25} = 0,8 \Rightarrow \alpha = 53,13^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{20}{25} = 0,8 \Rightarrow \gamma = 36,87^\circ$$



7.18 De un triángulo rectángulo ABC se conoce la hipotenusa, que mide 15 centímetros, y uno de sus ángulos, β , que mide 20° . Resuelve el triángulo.

Puesto que es un triángulo rectángulo, habrá un ángulo de 90° y se puede calcular el que falta:

$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) \Rightarrow \alpha = 70^\circ$$

Si se considera a el cateto opuesto al ángulo α , y b el cateto opuesto al ángulo β :

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \alpha = 15 \cdot \text{sen } 20^\circ \Rightarrow \alpha = 5,13 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow b = 15 \cdot \text{sen } 70^\circ \Rightarrow b = 14,09 \text{ cm}$$

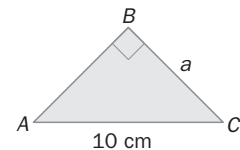
7.19 Halla los lados y ángulos que son incógnitas en este triángulo isósceles.

Por ser un triángulo rectángulo e isósceles, tiene un ángulo recto y los otros dos ángulos con el mismo valor.

$$\hat{A} = 45^\circ \quad \hat{B} = 90^\circ \quad \hat{C} = 45^\circ$$

Los lados a y c miden lo mismo por ser triángulo isósceles, y por ser rectángulo se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

$$10^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow 100 = 2a^2 \Rightarrow a = 7,07 \text{ cm} \Rightarrow c = 7,07 \text{ cm}$$



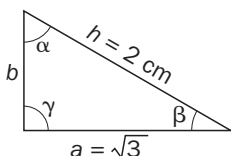
7.20 Dibuja un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 2 centímetros, y uno de sus catetos, $\sqrt{3}$. Halla la medida del resto de elementos que faltan para resolver el triángulo.

El cateto que falta se calcula con la aplicación del teorema de Pitágoras.

$$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1 \text{ cm}$$

Para calcular los ángulos, $\gamma = 90^\circ$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ; \quad \cos \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$



- 7.21 Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo miden 18 y 32 metros. Resuelve el triángulo.

Se aplica el teorema de la altura para calcular h .

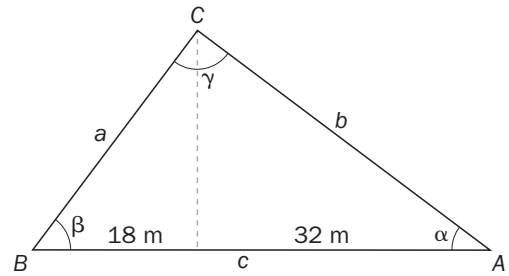
$$h^2 = 18 \cdot 32 \Rightarrow h = 24 \text{ m}$$

Sabido el valor de h , se aplica el teorema de Pitágoras para calcular a y b :

$$a = \sqrt{18^2 + 24^2} \Rightarrow a = 30 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{32^2 + 24^2} \Rightarrow b = 40 \text{ m}$$

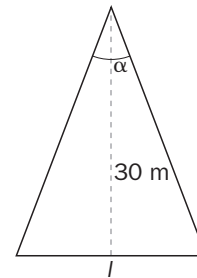
$$\gamma = 90^\circ \quad \text{sen } \alpha = \frac{24}{40} \Rightarrow \alpha = 36,9^\circ \quad \text{sen } \beta = \frac{24}{30} \Rightarrow \beta = 53,1^\circ$$



- 7.22 Un arquitecto quiere construir en una fachada de una plaza un rosetón con forma de polígono regular de 20 lados. Sabiendo que su radio medirá 30 metros, ¿cuánto medirá el lado del rosetón?

Puesto que un ángulo completo son 360° , $\alpha = 180 : 20 = 9^\circ$.

$$\frac{\alpha}{2} = 4,5^\circ \Rightarrow \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\frac{x}{2}}{r} \Rightarrow l = 4,7 \text{ m}$$

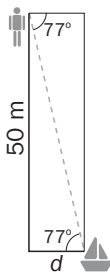


- 7.23 Los brazos de un compás miden 12 centímetros. ¿Qué ángulo forman cuando se traza un arco de 7 centímetros de radio?

Se forma un triángulo, siendo α el ángulo que forman los brazos del compás.

$$\text{Se aplica la ley de la trigonometría, } \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\frac{7}{2}}{12} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 16,96 \Rightarrow \alpha = 33,92^\circ$$

- 7.24 Desde el borde de un acantilado de 50 metros de altura, Mario observa, bajo un ángulo de 77° , un velero fondeado cerca de la playa. ¿A qué distancia del acantilado se encuentra la embarcación?



Se aplica la ley de la trigonometría,

$$\text{tg } 77^\circ = \frac{50}{d} \Rightarrow d = 11,54 \text{ m}$$

- 7.25 Se quiere calcular la altura de un castillo medieval. Utilizando un teodolito, el ángulo de elevación observado es de 55° .

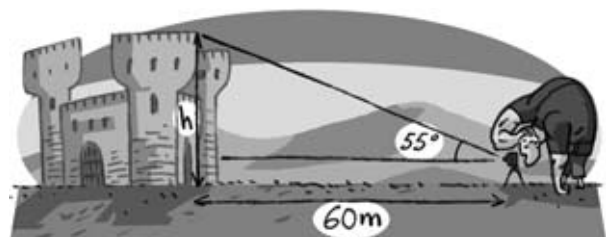
Sabiendo que el visor del teodolito está a 1,20 metros del suelo, calcula la altura del castillo.

La altura del castillo desde el visor del trípode es x .

$$\text{Por definición de tangente se tiene: } \text{tg } 55^\circ = \frac{x}{60}$$

$$\text{Se opera: } x = 60 \cdot \tan 55^\circ = 85,69 \text{ m}$$

$$\text{Altura del castillo: } 85,69 + 1,20 = 86,89 \text{ m}$$



7.26 Si el jugador quiere golpear primero la banda derecha, ¿a qué distancia de la banda inferior debe apuntar?

La proporción entre los lados de los triángulos semejantes es:

$$\frac{4}{15} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Hay que apuntar a unos $2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,66$ metros de la banda inferior.



7.27 Ahora quiere golpear primero en la banda superior. ¿Cuál debe ser el movimiento de la bola blanca?

Se observa el dibujo del ejercicio anterior.

La proporción entre los lados de los triángulos semejantes es:

$$\frac{7}{6} = \frac{x}{1} \rightarrow x = \frac{7}{6}$$

Hay que apuntar a unos $1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6} \approx 2,16$ metros de la banda inferior.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Figuras semejantes. Teorema de Tales

7.28 Calcula el valor de a y b para que los siguientes pares de triángulos sean semejantes.

a) 3, a , 5 y 1,5; 2; b

b) 3, a , 8 y $\frac{6}{5}$, $\frac{14}{5}$, b

c) 45° , 75° , 60° y 75° , \widehat{A} , \widehat{B}

$$\text{a) } \frac{3}{1,5} = \frac{a}{2} = \frac{5}{b} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot 2}{1,5} = 4 \Rightarrow b = \frac{5 \cdot 1,5}{3} = 2,5$$

$$\text{b) } \frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{a}{\frac{14}{5}} = \frac{8}{b} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot \frac{14}{5}}{\frac{6}{5}} = 7 \Rightarrow b = \frac{8 \cdot \frac{6}{5}}{3} = 16$$

$$\text{c) } \widehat{A} = 45^\circ \text{ y } \widehat{B} = 60^\circ$$

7.29 El perímetro de un cuadrado mide 32 centímetros.

a) Halla las medidas de los lados de un cuadrilátero semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{1}{2}$.
b) ¿Cuál es la razón de sus áreas?

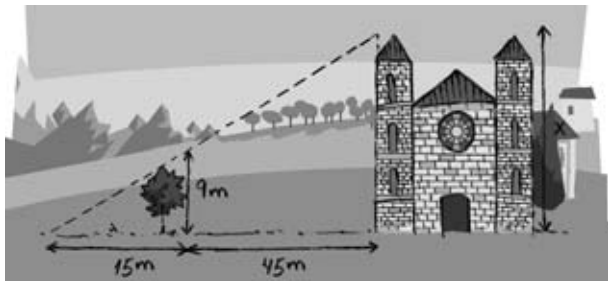
a) El lado del cuadrado es $32 : 4 = 8$ cm, y el del semejante, $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ cm

$$\text{b) } k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- 7.30 La arista de un cubo mide 8 metros. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante a él si la razón de sus volúmenes es $\frac{1}{27}$.

$$\text{La razón de los volúmenes es } k^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow k = \frac{1}{3}.$$

- 7.31 Calcula la altura de la torre de la iglesia.



$$\frac{9}{15} = \frac{h}{60}$$

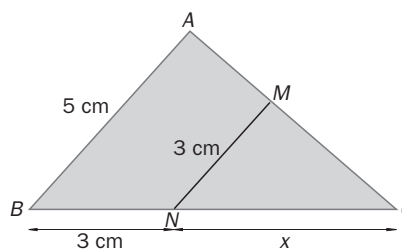
$$h = \frac{9 \cdot 60}{15} = 36 \text{ m mide la torre.}$$

- 7.32 Si los segmentos AB y MN son paralelos, halla la medida del lado BC .

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{3+x}$$

$$9 + 3x = 5x \Rightarrow 9 = 2x$$

$$x = 4,5 \text{ cm}$$



Semejanza de triángulos

- 7.33 Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes. Calcula el valor que se pide en cada caso.

a) b y c' , si a mide 9 centímetros, c mide 12; a' , 4,5, y b' , 3,5 centímetros.

b) \widehat{A} , \widehat{C} , \widehat{B}' y \widehat{C}' , si $\widehat{B} = 38^\circ$ y $\widehat{A}' = 92^\circ$.

c) a y \widehat{B}' , si c mide 18 centímetros; a' , 30; c' , 6, y $\widehat{B} = 105^\circ$.

$$\text{a) } \frac{9}{4,5} = \frac{b}{3,5} = \frac{12}{c'} \Rightarrow b = \frac{9 \cdot 3,5}{4,5} = 7 \text{ cm} \Rightarrow b = \frac{12 \cdot 4,5}{9} = 6 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \widehat{A} = \widehat{A}' = 92^\circ; \widehat{B} = \widehat{B}' = 38^\circ; \widehat{C} = \widehat{C}' = 180^\circ - (92^\circ + 38^\circ) = 50^\circ$$

$$\text{c) } \frac{a}{30} = \frac{18}{6} \Rightarrow c = \frac{30 \cdot 18}{6} = 90 \text{ cm}$$

$$\widehat{B}' = \widehat{B} = 105^\circ$$

- 7.34 En un triángulo rectángulo, los catetos miden 3 y 4 decímetros, y en otro, un cateto mide 6 decímetros, y la hipotenusa, 10. ¿Son semejantes?

La hipotenusa del triángulo de catetos 3 y 4: $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$.

Si son semejantes, la razón de semejanza es $k = 10 : 5 = 2$.

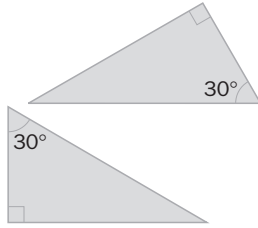
El cateto desconocido del triángulo semejante es: $c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ dm}$.

Los lados del segundo triángulo miden el doble que los lados del primero.

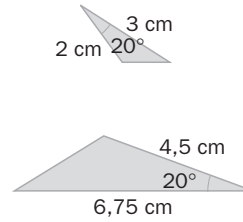
Por tanto, sí son semejantes.

7.35 Determina si los siguientes pares de triángulos son semejantes indicando, en caso afirmativo, el criterio de semejanza utilizado.

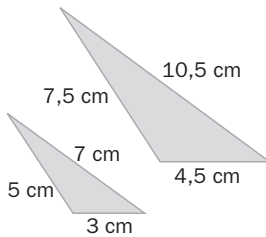
a)



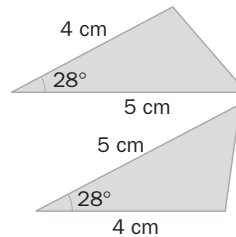
c)



b)



d)



a) Son semejantes porque los ángulos son iguales.

b) Son semejantes porque los lados son proporcionales.

c) Son semejantes porque tienen dos lados proporcionales, y el ángulo comprendido entre ellos, igual.

d) Son iguales porque tienen dos lados iguales y el ángulo que forman también igual. Por tanto, son semejantes de razón de semejanza igual a 1.

Medida de ángulos

7.36 Expresa en radianes la medida de estos ángulos.

a) 30°

b) 240°

c) 90°

d) 270°

e) 135°

f) 300°

$$a) \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{30^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 30}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$d) \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{270^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 270}{360} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

$$b) \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{240^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 240}{360} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

$$e) \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{135^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 135}{360} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$c) \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{90^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 90}{360} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$f) \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{300^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 300}{360} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

7.37 Indica la medida en el sistema sexagesimal de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) π

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{7\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{8}$

e) $\frac{4\pi}{3}$

f) $\frac{7\pi}{11}$

$$a) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot \pi}{2\pi} = 180^\circ$$

$$d) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{\pi}{8} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot \pi}{16\pi} = 22,5^\circ = 22^\circ 30'$$

$$b) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{6} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{12\pi} = 150^\circ$$

$$e) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{4\pi}{3} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 4\pi}{6\pi} = 240^\circ$$

$$c) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{4} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{8\pi} = 215^\circ$$

$$f) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{11} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{2\pi \cdot 11} = 114^\circ$$

7.38 Calcula en grados, minutos y segundos sexagesimales la medida de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) $\frac{2\pi}{13}$

b) $\frac{9\pi}{17}$

c) $\frac{5\pi}{7}$

$$a) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{2\pi}{13} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 2\pi}{2\pi \cdot 13} = 27^\circ 41' 32.31''$$

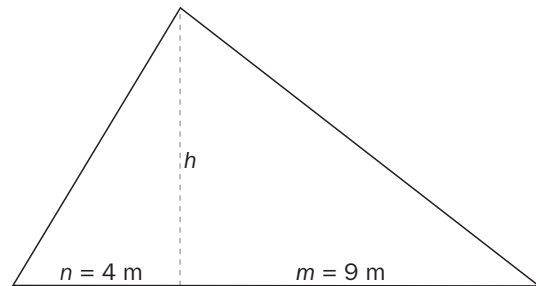
$$b) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{9\pi}{17} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{2\pi \cdot 17} = 95^\circ 17' 38.82''$$

$$c) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{7} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{2\pi \cdot 7} = 128^\circ 34' 17.1''$$

Relaciones métricas en triángulos rectángulos

7.39 Calcula la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que las proyecciones de los catetos sobre ella miden 4 y 9 metros.

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow h = 6 \text{ m}$$



7.40 Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 6,4 y 3,6 centímetros. Halla la longitud de los lados.

$$c = 6,4 + 3,6 = 10 \text{ cm mide la hipotenusa}$$

$$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 6,4 \cdot 10 = 64 \Rightarrow a = 8 \text{ cm}$$

$$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 3,6 \cdot 10 = 36 \Rightarrow b = 6 \text{ cm}$$

7.41 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 centímetros, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 4. Calcula la medida de los catetos.

$$c = m + n \Rightarrow n = 20 - 4 = 16 \text{ cm}$$

$$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 4 \cdot 20 = 80 \Rightarrow a = 8,94 \text{ cm}$$

$$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 16 \cdot 20 = 320 \Rightarrow b = 17,89 \text{ cm}$$

7.42 Calcula los lados de un triángulo rectángulo cuyas proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 32 y 8 centímetros.

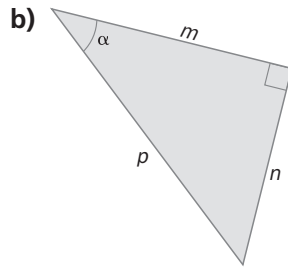
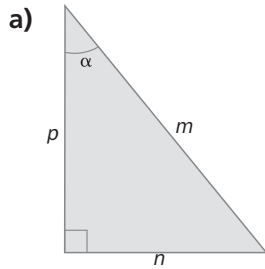
$$\text{Hipotenusa: } c = 32 + 8 = 40 \text{ cm}$$

$$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 32 \cdot 40 = 1280 \Rightarrow a = 35,78 \text{ cm}$$

$$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 8 \cdot 40 = 320 \Rightarrow b = 17,89 \text{ cm}$$

Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

7.43 Escribe, en función de m , n y p , el seno, el coseno y la tangente del ángulo α en estos triángulos.



$$\text{a) } \operatorname{sen} \alpha = \frac{n}{m}; \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{p}{m}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{p}$$

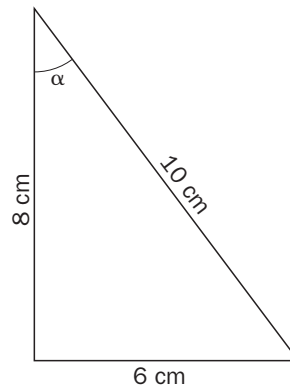
$$\text{b) } \operatorname{sen} \alpha = \frac{n}{p}; \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{m}{p}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{m}$$

7.44 La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 10, 8 y 6 decímetros.
¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud del triángulo?

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$



7.45 Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α si $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0,6^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 - 0,36 \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

7.46 Halla el seno y la tangente de un ángulo agudo α cuyo coseno es $\frac{4}{5}$.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

7.47 Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α si su tangente es igual a $\sqrt{5}$.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \sqrt{5}^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sqrt{5} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\frac{\sqrt{6}}{6}} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

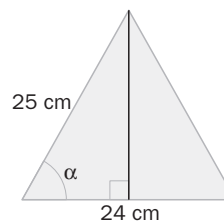
7.48 Calcula las razones trigonométricas del ángulo α .

$$h = \sqrt{25^2 - 12^2} = 21,93 \text{ cm}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{21,93}{25} = 0,8772$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{12}{25} = 0,48$$

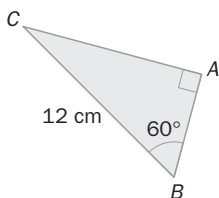
$$\text{tg } \alpha = \frac{21,93}{12} = 1,8295$$



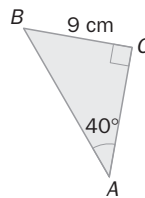
Resolución de triángulos rectángulos

7.49 Calcula la medida de los lados y los ángulos que faltan en los siguientes triángulos rectángulos.

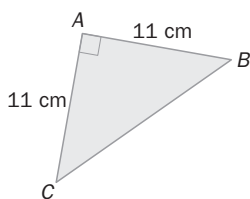
a)



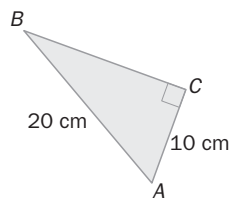
c)



b)



d)



$$\text{a) } \text{sen } 60^\circ = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12 \cdot \text{sen } 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10,39 \text{ cm}$$

$$\widehat{A} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{a}{12} \Rightarrow a = 12 \cdot \text{cos } 60^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \text{sen } 40^\circ = \frac{9}{c} \Rightarrow c = \frac{9}{\text{sen } 40^\circ} = 14 \text{ cm}$$

$$\widehat{A} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$\text{cos } 40^\circ = \frac{a}{14} \Rightarrow a = 14 \cdot \text{cos } 40^\circ = 10,72 \text{ cm}$$

$$\text{c) } \text{tg } \widehat{A} = \frac{11}{11} = 1 \Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ = \widehat{B}$$

$$c^2 = 11^2 + 11^2 \Rightarrow c = \sqrt{242} = 15,56 \text{ cm}$$

$$\text{d) } \text{cos } \widehat{A} = \frac{10}{20} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$$

$$\widehat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$b^2 = 20^2 - 10^2 \Rightarrow b = \sqrt{300} = 17,32 \text{ cm}$$

7.50 Resuelve estos triángulos sabiendo que $\widehat{C} = 90^\circ$.

a) $\widehat{A} = 55^\circ$, $a = 18$ cm

b) $c = 10$ cm, $b = 6$ cm

c) $a = 18$ cm, $b = 15$ cm

a) $\text{sen } 55^\circ = \frac{18}{c} \Rightarrow c = \frac{18}{\text{sen } 55^\circ} = 21,97$ cm

$\widehat{A} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$

$\text{tg } 55^\circ = \frac{18}{b} \Rightarrow b = \frac{18}{\text{tg } 55^\circ} = 12,60$ cm

b) $\cos \widehat{A} = \frac{6}{10} \Rightarrow \widehat{A} = 53,13^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ - 53,13^\circ = 36,87^\circ$

$a^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8$ cm

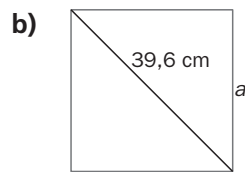
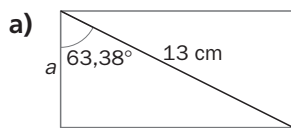
c) $\text{tg } \widehat{A} = \frac{18}{15} \Rightarrow \widehat{A} = 50,19^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ - 50,19^\circ = 39,81^\circ$

$c^2 = 18^2 + 15^2 \Rightarrow c = \sqrt{549} = 23,43$ cm

7.51 Halla la longitud de la altura de un triángulo equilátero de 12 centímetros de lado.

$h^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow h = \sqrt{108} = 10,39$ cm

7.52 Calcula el valor del lado a .



a) $a = 13 \cdot \cos 63,38^\circ = 5,82$ cm

b) $a = 39,6 \cdot \cos 45^\circ = 28$ cm

7.53 La diagonal mayor de un rombo mide 8 centímetros y forma con cada lado contiguo un ángulo de $26,4^\circ$. ¿Cuánto mide el lado del rombo?

$\cos 26,54^\circ = \frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{4}{\cos 26,54^\circ} = 4,47$ cm mide el lado.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

7.54 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.

c) Todas las circunferencias son semejantes.

d) Los polígonos iguales son semejantes y su razón de semejanza es 1.

a) Verdadera.

b) Falsa. Los ángulos son iguales.

c) Verdadera. Siempre están en la misma proporción el radio y el perímetro. El área guarda esa proporción al cuadrado.

d) Verdadera, ya que si son polígonos iguales, tienen lados y ángulos respectivamente iguales.

7.55 Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 3. Uno de ellos tiene un área de 6 unidades cuadradas. ¿Cuántas corresponden al área del otro? Elige la respuesta correcta.

- a) 40
- b) 54
- c) 200

Si la razón de semejanza es 3, la razón de las áreas es $3^2 = 9$. Por tanto, el área del otro triángulo es $6 \cdot 9 = 54$ unidades cuadradas.

7.56 Comprueba si existe un ángulo α tal que $\text{sen } \alpha = \frac{1}{4}$ y $\text{cos } \alpha = \frac{3}{4}$.

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1+9}{16} \neq 1$$

No puede existir.

7.57 Si las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tienen la misma medida, ¿cómo es el triángulo? ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?

Las hipotenusas correspondientes a los dos triángulos rectángulos que se forman son iguales, por lo que será un triángulo isósceles. Sus ángulos agudos miden 45° .

7.58 Los lados de un triángulo miden 45, 27 y 36 centímetros. Demuestra que el seno de uno de sus ángulos es $\frac{3}{5}$. ¿Cuáles son las otras dos razones trigonométricas de ese ángulo?

$$\text{sen } \alpha = \frac{27}{45} = \frac{3}{5}$$

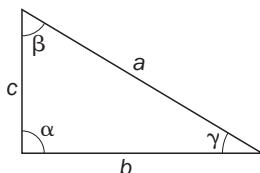
$$\text{cos } \alpha = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

7.59 ¿Se puede resolver un triángulo conociendo solo sus ángulos? Razona tu respuesta.

No, porque los triángulos semejantes tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales, y si no se conoce uno de los lados, es imposible determinar de cuál de todos los semejantes se trata.

7.60 ¿Qué relación existe entre las tangentes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?



$$\text{tg } B = \frac{b}{c}; \quad \text{tg } C = \frac{c}{b}$$

Son inversas.

7.61 Explica si es posible resolver un triángulo rectángulo conociendo la altura sobre la hipotenusa y la proyección de uno de los catetos sobre ella.

Con esos datos se puede calcular la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa, y esta, al sumar las dos proyecciones. Luego se calculan los catetos con el teorema del cateto y con los tres lados se pueden hallar los ángulos del triángulo. Por tanto, sí es posible resolverlo.

- 7.62 El logotipo de una empresa tiene la forma de un hexágono cuyos lados miden 3, 4, 5, 7, 8 y 9 centímetros.

En los carteles publicitarios se quiere dibujar un hexágono semejante de 117 centímetros de perímetro. ¿Cuánto miden los lados homólogos?

Perímetro del hexágono: $3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$ cm

La razón de semejanza es $\frac{117}{36} = 3,25$.

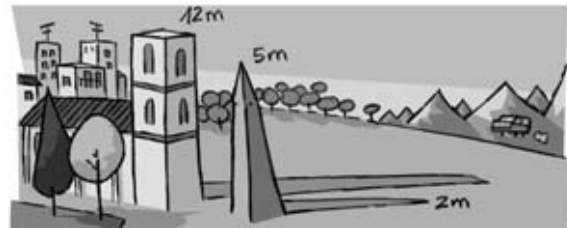
Los lados del hexágono en los carteles publicitarios medirán:

$3 \cdot 3,25 = 9,75$ cm; $4 \cdot 3,25 = 13$ cm; $5 \cdot 3,25 = 16,25$ cm; $6 \cdot 3,25 = 19,5$ cm; $7 \cdot 3,25 = 22,75$ cm; $9 \cdot 3,25 = 29,25$ cm.

- 7.63 A la misma hora del día se miden las sombras que proyectan la torre del reloj y el obelisco de una plaza. Halla la altura de la torre.

$$\frac{12}{x} = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{12 \cdot 2}{5} = 4,8 \text{ m mide el obelisco.}$$



- 7.64 Para medir la distancia entre dos puntos muy alejados A y B, se han situado dos personas sobre ellos. Una tercera persona, una mujer, está en un punto C, a 50 metros de distancia de A. Calcula la distancia que separa los puntos A y B.

Si a es la distancia que separa los puntos A y B:

$$\operatorname{tg} 82^\circ = \frac{a}{50} \Rightarrow a = 50 \cdot \operatorname{tg} 82^\circ = 355,77 \text{ m}$$



- 7.65 El tronco de una palmera mide 3,5 metros y crece de forma inclinada debido al peso de la parte superior. La perpendicular desde su parte más alta hasta la tierra mide 2 metros. Calcula el ángulo de inclinación del tronco respecto a la vertical.

$$\cos a = \frac{20}{35} \Rightarrow a = 55,15^\circ$$

- 7.66 Cuando se hace una fotografía con una cámara compacta, se produce un paralaje: la imagen que captura el visor no coincide con la del objetivo porque no están situados a la misma distancia. Calcula el ángulo α que mide este error.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{17,5}{2000} = 0,00875 \Rightarrow a = 30' 4,84''$$



7.67 Se invierten 6 segundos en la observación de un avión que sobrevuela un punto de la Tierra. En ese intervalo de tiempo, la aeronave ha cambiado ligeramente de posición.

Si el avión se observa perpendicularmente a una altura de 1350 metros y lleva una velocidad de 600 kilómetros por hora, ¿qué ángulo diferencia las dos visuales del observador?

La distancia entre las dos posiciones del avión es: $s = 600 \text{ km/h} \cdot 6 \text{ seg} = \frac{600\,000}{3600} \text{ m/s} \cdot 6 \text{ s} = 1000 \text{ m}$

El ángulo que diferencia las visuales es α : $\text{tg } \alpha = \frac{1}{1350} \Rightarrow \alpha = 2' 32,79''$

7.68 En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60° con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 metros. ¿Cuánto mide el árbol?

Si h es la altura del árbol, $\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{2,6} \Rightarrow h = 2,6 \cdot \text{tg } 60^\circ = 4,5 \text{ m}$

7.69 Unas cigüeñas han construido su nido sobre el tejado de un edificio a 25 metros del suelo. Un chico lo observa desde un punto situado a 50 metros del edificio. Calcula el ángulo de observación.

$$\text{tg } \alpha = \frac{25}{50} \Rightarrow \alpha = 26,57^\circ$$

7.70 Para realizar prácticas de óptica, un estudiante que mide 1,70 metros, situado a 12 metros de un edificio, coloca frente a sus ojos una regla vertical de 25 centímetros con la que oculta exactamente la altura del mismo.

Si la distancia del ojo a la regla es de 40 centímetros, calcula la altura del edificio.

$$\frac{x}{12} = \frac{0,25}{0,4} \Rightarrow x = 7,5 \text{ m es la altura del edificio.}$$

7.71 Alba va a poner una bombilla de bajo consumo en una lámpara que está situada a 2 metros del suelo.

Alba mide 1,53 metros, y cada lado de la escalera, 70 centímetros. Averigua si alcanza con ella para poner la bombilla.

Al abrir la escalera, sus lados forman con el suelo un triángulo isósceles. La altura del triángulo es la misma a la que estará el último peldaño una vez abierta.

$$\text{sen } 50^\circ = \frac{h}{70} \Rightarrow h = 70 \cdot \text{sen } 50^\circ = 53,62 \text{ cm.}$$

La altura a la que llegará la cabeza de Alba es:

$$53,62 + 153 = 206,62 \text{ cm}$$

Por tanto, llegará para cambiar la bombilla sin esfuerzo.

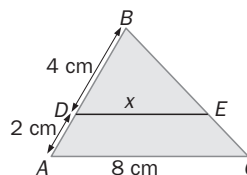


Figuras semejantes. Teorema de Tales. Semejanza de triángulos

7.72 Halla el valor de x sabiendo que los lados AB y DE son paralelos.

$$\frac{4}{x} = \frac{6}{8}$$

$$x = \frac{8 \cdot 4}{6} = 5,33 \text{ cm}$$



7.73 La razón de las áreas de dos hexágonos regulares es $\frac{49}{36}$. Si el lado de uno de ellos mide 18 centímetros, ¿cuál es el perímetro del otro?

$$\frac{49}{36} = \frac{x}{18} \Rightarrow x = 24,5 \text{ cm mide el lado del otro.}$$

$$\text{El perímetro: } P = 6 \cdot 24,5 = 147 \text{ cm}$$

7.74 Los perímetros de dos triángulos isósceles son de 15 y 5 centímetros, respectivamente. ¿Cuál es la razón de semejanza?

$$\text{La razón de semejanza y la razón de los perímetros es la misma: } k = \frac{15}{5} = 3.$$

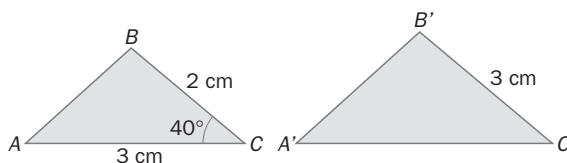
7.75 Considera los triángulos ABC y $A'B'C'$.

¿Cuánto deben medir el lado $A'C'$ y el ángulo C' para que sean dos triángulos semejantes? ¿Qué criterio de semejanza utilizas?

La razón de semejanza es $3 : 2 = 1,5$.

$$A'C' = 3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}$$

$$\widehat{C}' = \widehat{C} = 40^\circ$$



Medida de ángulos

7.76 Calcula la medida en radianes de estos ángulos.

- a) 36° b) 20° c) 216° d) 160° e) 324° f) 290°

$$\text{a) } \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{36^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 36}{360} = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

$$\text{b) } \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{20^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 20}{360} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

$$\text{c) } \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{216^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 216}{360} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$$

$$\text{d) } \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{160^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 160}{360} = \frac{8\pi}{9} \text{ rad}$$

$$\text{e) } \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{324^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 324}{360} = \frac{9\pi}{5} \text{ rad}$$

$$\text{f) } \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{290^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 290}{360} = \frac{29\pi}{18} \text{ rad}$$

7.77 Expresa en grados:

a) 4π rad

b) $\frac{9\pi}{4}$ rad

c) $\frac{7\pi}{9}$ rad

d) $\frac{13\pi}{6}$ rad

e) $\frac{5\pi}{12}$ rad

f) $\frac{11\pi}{5}$ rad

a) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{4\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 4\pi}{2\pi} = 720^\circ$

b) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{9\pi}{4} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{8\pi} = 405^\circ$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{9} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{18\pi} = 140^\circ$

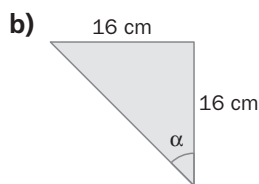
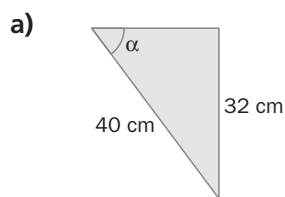
d) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{13\pi}{6} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 13\pi}{12\pi} = 390^\circ$

e) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{12} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{24\pi} = 75^\circ$

f) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{11\pi}{5} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 11\pi}{10\pi} = 396^\circ$

Razones métricas y trigonométricas en triángulos rectángulos

7.78 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en los siguientes triángulos rectángulos.



a) Si b es el cateto que falta: $b = \sqrt{40^2 - 32^2} = 24$

$\text{sen } \alpha = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$; $\text{cos } \alpha = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$; $\text{tg } \alpha = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$

b) Si a es la hipotenusa: $a = \sqrt{16^2 + 16^2} = \sqrt{2 \cdot 16^2} = 16\sqrt{2}$

$\text{sen } \alpha = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{cos } \alpha = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } \alpha = \frac{16}{16} = 1$

7.79 Calcula la tangente del ángulo agudo α en cada caso.

a) si $\text{cos } \alpha = 0,2$

b) si $\text{sen } \alpha = \frac{5}{8}$

a) $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0,2^2 + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - 0,04 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{0,96} = 0,98$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{25}{64} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{39}}{8}} = \frac{5\sqrt{39}}{39}$

7.80 Halla el área y el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 20 centímetros, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 9,6 centímetros.

El cateto cuya proyección es 9,6, $b: b^2 = 9,6 \cdot 20 \Rightarrow b = 13,86$.

La proyección del otro cateto sobre la hipotenusa, $m: m = 20 - 9,6 = 10,4$.

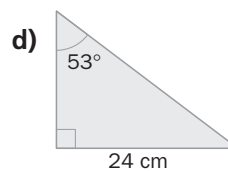
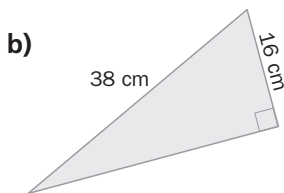
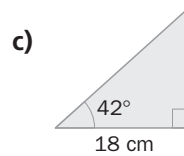
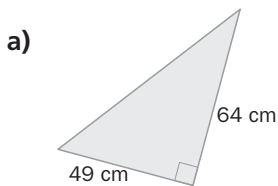
El cateto, $c: c^2 = 10,4 \cdot 20 \Rightarrow c = 14,42$.

$$P = 14,42 + 13,86 + 20 = 48,28 \text{ cm}$$

$$A = \frac{13,86 \cdot 14,42}{2} = 99,93 \text{ cm}^2$$

Resolución de triángulos rectángulos

7.81 Calcula las medidas de los ángulos y de los lados desconocidos de estos triángulos.



$$a) c = \sqrt{49^2 + 64^2} = 80,60 \text{ cm}$$

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{64}{49} \Rightarrow \hat{A} = 52,56^\circ$$

$$\hat{B} = 90^\circ - 52,56^\circ = 37,44^\circ$$

$$c) a = \sqrt{38^2 - 16^2} = 34,47 \text{ cm}$$

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{16}{38} \Rightarrow \hat{A} = 24,90^\circ$$

$$\hat{B} = 90^\circ - 24,90^\circ = 65,1^\circ$$

$$b) \hat{B} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$$

$$\text{tg } 42^\circ = \frac{x}{18} \Rightarrow x = 16,21 \text{ cm}$$

$$c = \sqrt{18^2 + 16,21^2} = 24,22 \text{ cm}$$

$$d) \hat{B} = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

$$\text{tg } 53^\circ = \frac{24}{x} \Rightarrow x = 18,09 \text{ cm}$$

$$c = \sqrt{24^2 + 18,09^2} = 30,05 \text{ cm}$$

7.82 Resuelve el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 26 centímetros, y uno de los ángulos agudos, 74° .

$$\text{sen } 74^\circ = \frac{x}{26} \Rightarrow x = 26 \cdot \text{sen } 74^\circ = 25 \text{ cm}$$

$$\text{cos } 74^\circ = \frac{y}{26} \Rightarrow y = 26 \cdot \text{cos } 74^\circ = 7,17 \text{ cm}$$

Los ángulos miden: $\hat{A} = 90^\circ$ $\hat{B} = 74^\circ$ $\hat{C} = 26^\circ$

AMPLIACIÓN

- 7.83** La diagonal de una pista deportiva rectangular mide 13 metros y la razón de sus lados es 2,4. Existe otra pista semejante con perímetro de 102 metros. ¿Cuánto mide su diagonal?

Si x e y son las medidas de los lados de la pista, la diagonal será: $13^2 = x^2 + y^2$.

Su perímetro es $102 : 2,4 = 42,5$, puesto que la razón del perímetro coincide con la razón de los lados. El perímetro de la pista inicial es: $2x + 2y = 42,5$.

Planteando un sistema de ecuaciones y despejando y de esta última: $y = 21,25 - x$.

$$13^2 = x^2 + (21,25 - x)^2$$

$$169 = x^2 + 451,56 + x^2 - 42,5x$$

$$2x^2 - 42,5x - 282,56 = 0$$

$$x = \frac{42,5 \pm \sqrt{42,5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-282,56)}}{2} = \frac{42,5 \pm 37,59}{2} = \begin{cases} 40,05 \\ 2,46 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -18,8 \\ 28,79 \end{cases}$$

Los lados de la pista inicial miden 2,46 y 18,79 cm. Su diagonal: $d = \sqrt{2,46^2 + 18,79^2} = 18,95$ cm.

La diagonal de la pista semejante a ella: $d' = 2,4 \cdot 18,95 = 45,48$ cm.

- 7.84** Un alumno de 4.º de ESO necesita para la realización de un trabajo una copia reducida de un dibujo rectangular de 35 centímetros de alto y 15 de ancho. ¿Qué porcentaje de reducción tiene que aplicar para incluirlo en un hueco de 20 centímetros de alto?

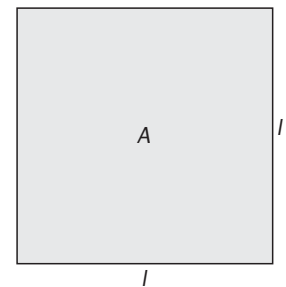
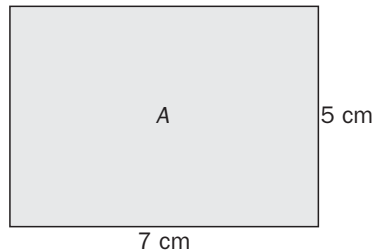
Se reducen $35 - 20 = 15$ cm

$$\text{Porcentaje de reducción} = \frac{15 \cdot 100}{35} = 42,86\%$$

- 7.85** Dibuja un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo cuyos lados miden 5 y 7 centímetros. Utiliza el teorema de la altura.

$$A = 5 \cdot 7 = 35 \text{ cm}^2$$

$$l^2 = 35 \Rightarrow l = \sqrt{35} = 5,92 \text{ cm}$$



- 7.86** Resuelve este triángulo.

Hipotenusa del triángulo de la derecha, que es el cateto mayor del triángulo a resolver:

$$\cos 53,13^\circ = \frac{33,33}{a} \Rightarrow a = \frac{33,33}{\cos 53,13^\circ} = 55,55 \text{ dm}$$

El ángulo superior del triángulo rectángulo de la izquierda:

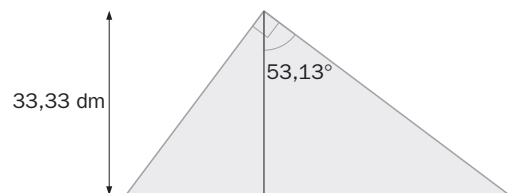
$$90^\circ - 53,13^\circ = 36,87^\circ.$$

La hipotenusa de ese triángulo que coincide con el cateto menor del triángulo a resolver:

$$\cos 36,87^\circ = \frac{33,33}{b} \Rightarrow b = \frac{33,33}{\cos 36,87^\circ} = 41,66 \text{ dm}.$$

La hipotenusa del triángulo:

$$c = \sqrt{41,66^2 + 55,55^2} = 69,44 \text{ dm}.$$



7.87 Un ángulo mayor de 360° es la suma de varios ángulos de 360° más uno menor de ese valor y, por tanto, equivale a este último.

Calcula el ángulo menor de 360° al que equivale, y las razones trigonométricas de 450° , 1125° y 2190° .

$$\text{sen } 450^\circ = \text{sen } (360^\circ \cdot 1 + 90^\circ) = \text{sen } 90^\circ = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow 1 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{cos } \alpha = 0 \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{sen } 1125^\circ &= \text{sen } (360^\circ \cdot 3 + 45^\circ) = \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{cos } \alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sen } 2190^\circ &= \text{sen}(360^\circ \cdot 6 + 30^\circ) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{cos } \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

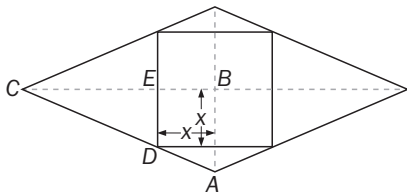
PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

7.88 Losetas de dos colores

Se quieren fabricar losetas como las de la figura que estén formadas por un rombo de 18,10 centímetros de diagonal mayor y 8,36 centímetros de diagonal menor, y un cuadrado inscrito en él.

Calcula el área de la zona gris y la suma de las áreas de las zonas naranjas.

La zona gris corresponde al cuadrado interior, y las zonas naranjas son las superficies restantes del rombo.



Los triángulos ABC y DEC son semejantes.

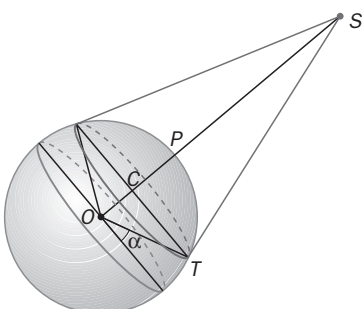
$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{DE}{EC} \Rightarrow \frac{4,18}{9,05} = \frac{x}{9,05} - x \Rightarrow 37,829 - 4,18x = 9,05x \\ &\Rightarrow x = \frac{37,829}{13,23} = 2,86 \end{aligned}$$

$$\text{Área gris: } (2 \cdot 2,86)^2 = 32,7 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área naranja: } \frac{18,10 \cdot 8,36}{2} - 32,7 = 42,9 \text{ cm}^2$$

7.89 Altura del satélite de GPS

En el planeta imaginario $AXT22$ se quiere colocar un satélite, S , a una altura desde la que el mayor paralelo que se pueda divisar sea el de latitud $\alpha = 20^\circ$. Si el radio del planeta es de 4000 kilómetros, calcula:



a) El radio, CT , del paralelo.

b) Las distancias SO , del satélite al centro del planeta, y SP , del satélite a la superficie del planeta.

a) En el triángulo rectángulo OCT :

$$CT = 4000 \cdot \text{cos } \alpha = 4000 \cdot \text{cos } 20 = 3759$$

b) El ángulo $\widehat{OCT} = 20^\circ$ y, por tanto:

$$SO = \frac{4000}{\text{sen } 20} = 11\,695 \text{ km}$$

$$\Rightarrow SP = 11\,695 - 4000 = 7695 \text{ km}$$

7.A1 Indica cuáles de los siguientes pares de triángulos son semejantes y, en ese caso, calcula la razón de semejanza de sus lados.

- a) 3, 4, 5 y 4,5; 6; 7,5 cm
b) 2, 5, 6 y 4, 10, 11 cm

- c) 5, 12, 13 y 12,5; 30; 32,5 cm
d) 4, 7, 10 y 2,4; 4,2; 6 cm

a) Sí $\Rightarrow k = \frac{3}{2}$

b) No

c) Sí. $k = \frac{5}{2}$

d) Sí $\Rightarrow k = \frac{3}{5}$

7.A2 Considera los triángulos de la figura.

a) ¿Cómo deben ser los lados MN y BC para que los triángulos AMN y ABC sean semejantes?

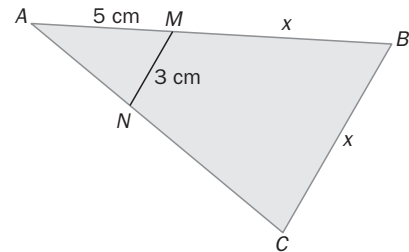
b) Halla el valor de x .

a) Paralelos, para que verifiquen el teorema de Tales.

b) $\frac{x}{3} = \frac{x}{x+5} \Rightarrow x^2 + 5x = 3x \Rightarrow x^2 + 5x - 3x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$

Como 0 no puede ser la solución, puesto que en ese caso no existiría triángulo, la solución es $x = 2$.



7.A3 En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 2 y 18 centímetros, respectivamente.

Calcula el área de un triángulo rectángulo semejante con razón de semejanza $k = \frac{3}{2}$.

Por el teorema de la altura: $h^2 = 18 \cdot 2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6$ cm

$b' = b \cdot k = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30$ cm $h' = h \cdot k = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$ cm

$A = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{30 \cdot 9}{2} = 135$ cm²

7.A4 Expresa en grados la medida de estos ángulos.

- a) $\frac{3\pi}{5}$ rad b) $\frac{15\pi}{4}$ rad c) 9π rad

a) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{3\pi}{5} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 3\pi}{10\pi} = 108^\circ$

b) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{\frac{15\pi}{4} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 15\pi}{8\pi} = 675^\circ$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{x}{9\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{2\pi} = 1620^\circ$

7.A5 Expresa en radianes las medidas de los siguientes ángulos.

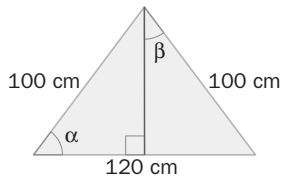
- a) 36° b) 100° c) 310°

a) $\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{36^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 36}{360} = \frac{\pi}{5}$ rad

b) $\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{100^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 100}{360} = \frac{5\pi}{9}$ rad

c) $\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{x}{310^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 310}{360} = \frac{31\pi}{18}$ rad

7.A6 Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β del siguiente triángulo.



$$h = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80 \text{ cm}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{80}{100} = 0,8; \text{cos } \alpha = \frac{60}{100} = 0,6; \text{tg } \alpha = \frac{80}{60} = 1,33$$

7.A7 Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 5 y 8 centímetros.

a) Calcula la altura sobre la hipotenusa.

b) Resuelve el triángulo.

a) $h^2 = 5 \cdot 8 = 40 \Rightarrow h = 6,32 \text{ cm}$

b) $c = m + n = 5 + 8 = 13$

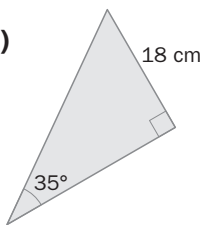
$$a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 5 \cdot 13 = 65 \Rightarrow a = 8,06 \text{ cm}$$

$$b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 8 \cdot 13 = 104 \Rightarrow b = 10,20 \text{ cm}$$

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{10,20}{8,06} \Rightarrow \hat{A} = 51,67^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - 51,67^\circ = 38,33^\circ$$

7.A8 Calcula la medida de los lados y de los ángulos desconocidos.

a)

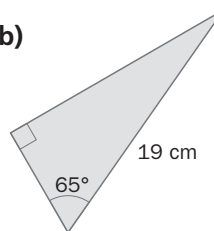


$$\hat{B} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

$$c = \frac{18}{\text{sen } 35^\circ} = 31,38 \text{ cm}$$

$$b = 31,38 \cdot \text{sen } 55^\circ = 25,70 \text{ cm}$$

b)

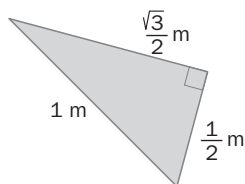


$$b = 19 \cdot \text{sen } 65^\circ = 17,22 \text{ cm}$$

$$\hat{C} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

$$c = 19 \cdot \text{sen } 25^\circ = 8,03 \text{ cm}$$

7.A9 Calcula la medida de los ángulos agudos del siguiente triángulo.

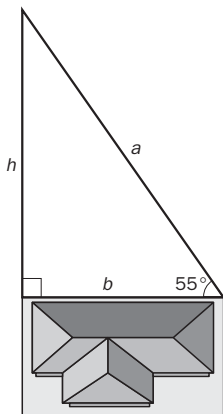


$$\text{sen } \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

MATETIEMPOS

La parcela de mi abuelo

Mi padre ha heredado una parcela triangular de 400 metros cuadrados. Uno de sus lados está limitado por la casa de un vecino, y los otros dos forman con ella ángulos de 55° y 90° de amplitud, respectivamente. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?"



El terreno forma un triángulo rectángulo. Si llamo b a uno de los catetos y h al otro, me queda el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b \cdot h}{2} = 400 \\ \text{tg } 55 = \frac{h}{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = \frac{800}{b} \\ \text{tg } 55 = \frac{800}{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tg } 55 = \frac{800}{b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{800}{\text{tg } 55} \Rightarrow b^2 = 560,17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 23,67 \text{ m} \\ \Rightarrow h = 33,8 \text{ m}$$

$$a = \sqrt{23,67^2 + 33,8^2} = 41,26 \text{ m}$$