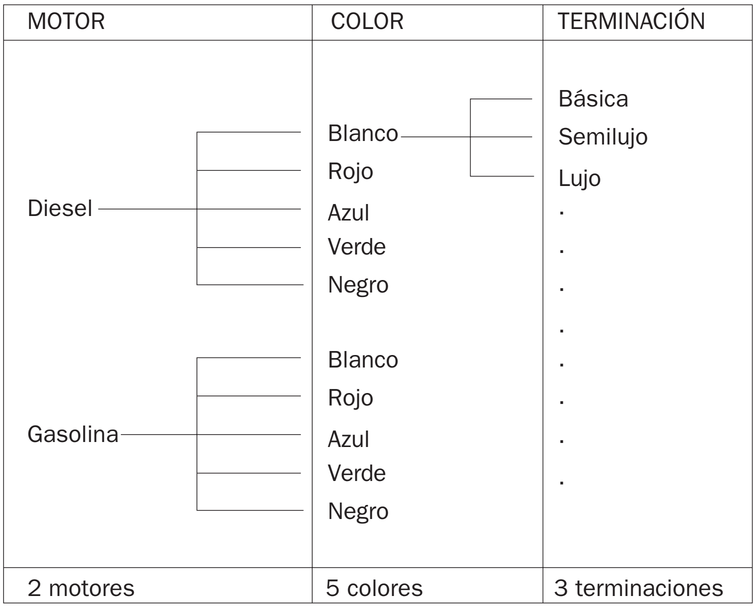
### E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

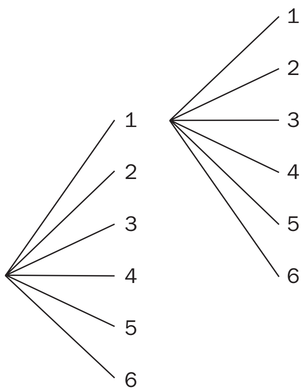
**14.1 Un determinado modelo de automóvil se fabrica con dos tipos de motores: diésel y gasolina. En cinco colores: blanco, rojo, azul, verde y negro, y con tres terminaciones: básica, semilujo y lujo. ¿Cuántos modelos diferentes se fabrican?**

Formamos el siguiente diagrama de árbol.




Por tanto, se fabrican 30 modelos diferentes de coches.

**14.2 Se lanzan al aire 2 dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6 y, cuando caen al suelo, se anota el resultado de la cara superior. Forma un diagrama en árbol para calcular los diferentes resultados que se pueden obtener. ¿Y si se lanzan tres dados cúbicos?**




Por tanto, se pueden obtener $6 \cdot 6 = 36$ resultados diferentes.

Para el caso de tres dados, el número de resultados diferentes que se pueden obtener es: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

**14.3 Un partido político tiene 18 candidatos para formar las listas de unas elecciones. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar a los 4 primeros de las listas?**

Se trata de obtener las variaciones sin repetición de 18 elementos tomados de 4 en 4:

$V_{18,4} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73\,440$ formas

**14.4 En una clase con 30 alumnos, se van a elegir el delegado, el subdelegado y el secretario. ¿De cuántas formas se pueden asignar los tres cargos?**

Se trata de obtener las variaciones sin repetición de 30 elementos tomados de 3 en 3:

$V_{30,3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$ formas

**14.5 ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?**

Se trata de obtener las variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3:

$VR_{5,3} = 5^3 = 125$ números

**14.6 ¿Cuántos números de tres formas se pueden formar con los dígitos del 0 al 9?**

Como ha de ser un número de tres dígitos, el primer dígito tiene que ser distinto de 0. Así que el primer dígito puede ser cualquier cifra del 1 al 9, y el segundo y el tercer dígito pueden ser cualquier cifra del 0 al 9.

Luego habrá $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números distintos.

**14.7 En España, las matrículas de los coches están representadas por 4 números, repetidos o no, seguidos de tres letras consonantes repetidas o no, exceptuando la ñ, q, ll y ch. ¿Cuántos coches se podrán matricular con este sistema?**

Formaciones diferentes de los 4 números: $VR_{10,\,4} = 10^4$.

Formaciones diferentes de las 26 letras: $VR_{26,\,3} = 26^3$.

Matrículas diferentes que se pueden formar $= 10^4 \cdot 26^3 = 175\,760\,000$.

**14.8 Calcula las siguientes operaciones con factoriales.**

**a)** $5!$ **b)** $\dfrac{6!}{4!}$ **c)** $\dfrac{9!}{7!}$ **d)** $\dfrac{10!}{6! \cdot 4!}$

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

b) $\dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

c) $\dfrac{9!}{7!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$

d) $\dfrac{10!}{6! \cdot 4!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

**14.9 Pedro tiene que colocar en una estantería 24 libros y un diccionario.**

**a) ¿De cuántas formas diferentes los puede colocar?**

**b) ¿De cuántas maneras distintas los puede ordenar si quiere que el diccionario quede siempre el primero por la izquierda?**

a) Se trata de hallar las diferentes maneras de ordenar 25 elementos; por tanto, $P_{25} = 25! = 1{,}55 \cdot 10^{25}$.

b) Se coloca el diccionario a la izquierda, y se trata de hallar las diferentes maneras de ordenar 24 elementos; por tanto, $P_{24} = 24! = 6{,}2 \cdot 10^{23}$.

**14.10 ¿Cuántos números diferentes se pueden obtener si permutamos de todas las formas posibles las cifras del número 2323? Escríbelos.**

Se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 4 elementos que se repiten 2 veces cada uno:

$P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ formas

Los números son los siguientes: 2233, 2323, 2332, 3223, 3232 y 3322.

**14.11 ¿De cuántas formas distintas se puede alinear ocho signos más y seis signos menos?**

Se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 14 elementos que se repiten 8 y 6 veces:

$P_{14}^{6,8} = \dfrac{14!}{6! \cdot 8!} = 3003$ formas

**14.12 Escribe el enunciado de un problema que se resuelva calculando las $P_6^{1,2,3}$.**

¿Cuántos números diferentes se pueden obtener al permutar de todas las formas posibles las cifras del número 888776?

Para resolver el problema es necesario obtener el número de permutaciones con repetición de 6 elementos que se repite un elemento tres veces, otro elemento dos veces y un elemento una vez.

$$P_6^{1,2,3} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60 \text{ formas}$$

**14.13 En una bolsa hay cuatro bolas blancas y tres negras. Se sacan las bolas una a una. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?**

Se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 7 elementos que se repiten 4 y 3 veces:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35 \text{ resultados distintos}$$

**14.14 Se añade una bola a la bolsa del ejercicio anterior y se repite el experimento. Calcula cuántos resultados distintos se pueden conseguir dependiendo del color de la nueva bola.**

Si la bola es blanca, se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 8 elementos que se repiten 5 y 3 veces:

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56 \text{ resultados distintos}$$

Si la bola es negra, se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 8 elementos que se repiten 4 veces cada uno:

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70 \text{ resultados distintos}$$

**14.15 Se han reunido 5 amigos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado si se han saludado todos entre sí?**

Como no influye el orden, se trata de hallar el número de combinaciones de 5 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{5,2} = \frac{V_{5,2}}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ saludos}$$

**14.16 ¿Cuántas carreteras hay que construir para comunicar siete pueblos de manera que cada dos pueblos queden unidos por una carretera?**

Se trata de hallar el número de combinaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{7,2} = \frac{V_{7,2}}{P_2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ carreteras}$$

**14.17 Una ONG dedicada a la conservación del medio ambiente necesita elegir entre sus 96 miembros un equipo compuesto por 4 personas. ¿Cuántos equipos diferentes se pueden formar?**

Se trata de hallar el número de combinaciones de 96 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{96,4} = \frac{V_{96,4}}{P_4} = \frac{96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 3\,321\,960 \text{ equipos}$$

**14.18 Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? ¿Y cuántos números de cuatros cifras diferentes se pueden formar?**

Números de cinco cifras:

Como influye el orden e intervienen todos los elementos, se trata de una permutación de 5 elementos:

$P_5 = 5! = 120$ números

Números de cuatro cifras:

Como influye el orden, no intervienen todos los elementos y estos no se pueden repetir, se trata de obtener las variaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 4 en 4:

$V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ números

**14.19 ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 12 alumnos en los cuatro asientos de la primera fila de una clase? ¿Y si el primer puesto está reservado siempre para el delegado?**

Hay 12 alumnos y hay que seleccionar a 4. Como no influye el orden, se trata de calcular el número de combinaciones de 12 elementos tomados de 4 en 4:

$$C_{12,4} = \frac{V_{12,4}}{P_4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495 \text{ formas}$$

Si el primer puesto está reservado para el delegado, hay que seleccionar 3 alumnos de un grupo de 11. Como no influye el orden, se trata de calcular el número de combinaciones de 11 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{11,3} = \frac{V_{11,3}}{P_3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165 \text{ formas}$$

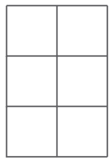
## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**14.20 En un tablero de ajedrez un rey hace un recorrido desde la casilla *A*-1 hasta la casilla *H*-8, de forma que en cada paso va de una casilla a otra contigua de color diferente. ¿Cuántos caminos distintos puede seguir teniendo en cuenta que nunca retrocede?**

La condición de ir alternando colores impide que el rey vaya en diagonal. Moviendo el rey, se puede comprobar que hay que hacer 7 movimientos hacia la derecha y 7 hacia abajo, es decir, 14 en total. No tiene sentido un movimiento hacia arriba o hacia la izquierda, que aleja del objetivo.

La solución, al igual que en el problema resuelto, es $P_{14}^{7,7} = \dfrac{14!}{7! \cdot 7!} = 3432$ caminos posibles.

**14.21 En Braille se utiliza como base un rectángulo como el de la figura, en el que en cada casilla se puede colocar un punto en relieve o dejarla vacía. Si cada combinación representa un carácter, ¿cuántos se pueden representar?**



En cada rectángulo se pueden colocar 0, 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 puntos.

Colocando 0 puntos hay 1 posibilidad.

Colocando un punto, hay que dejar cinco huecos libres y uno ocupado. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde un elemento se repite una vez y otro se repite cinco veces.

$$P_6^{1,5} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6 \text{ posibilidades}$$

Colocando dos puntos, hay que dejar cuatro huecos libres y dos ocupados. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde un elemento se repite dos veces y otro se repite cuatro veces.

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 \text{ posibilidades}$$

Colocando tres puntos, hay que dejar tres huecos libres y tres ocupados. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde cada elemento se repite tres veces.

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20 \text{ posibilidades}$$

Colocando cuatro puntos, hay que dejar dos huecos libres y cuatro ocupados. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde un elemento se repite dos veces y otro se repite cuatro veces.

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 \text{ posibilidades}$$

Colocando cinco puntos, hay que dejar un hueco libre y cinco ocupados. Por tanto, se trata de una permutación con repetición de 6 elementos, donde un elemento se repite una vez y otro se repite cinco veces.

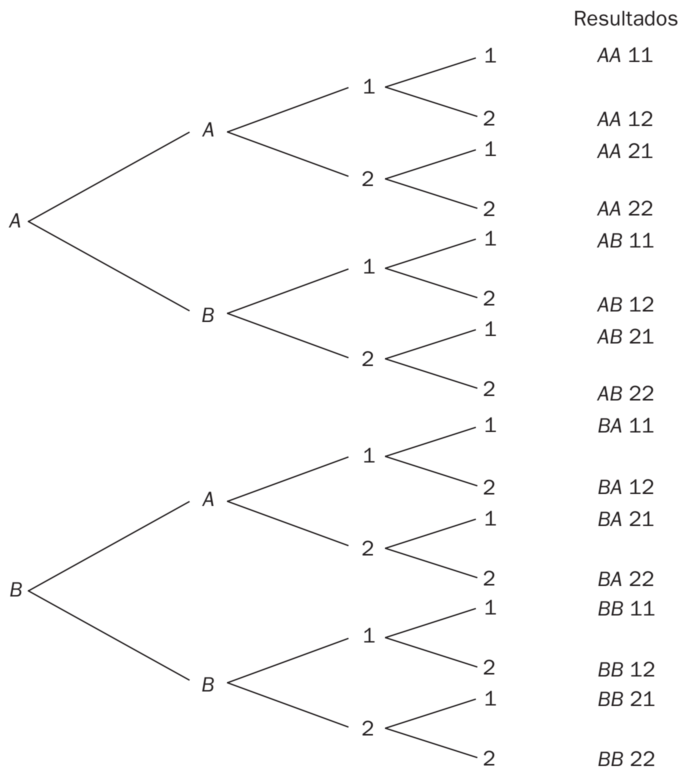
$$P_6^{1,5} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6 \text{ posibilidades}$$

En total hay $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$ posibilidades.

**E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E**

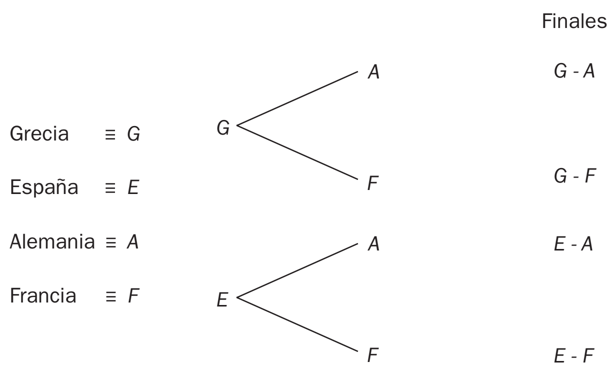
## Diagrama en árbol. Recuento

**14.22 El código de un candado consta de 2 letras (*A* y *B*) y de 2 números (1 y 2). Realiza el diagrama en árbol y calcula el número de códigos posibles.**

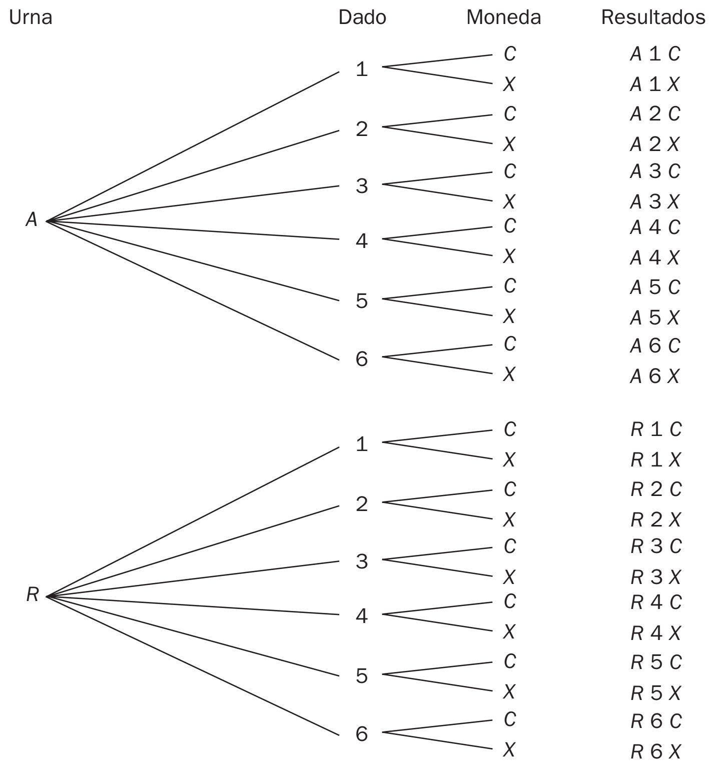



Número de códigos posibles: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

**14.23 Los partidos de semifinales de una competición europea de baloncesto son Grecia-España y Alemania-Francia. Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a las posibles finales.**



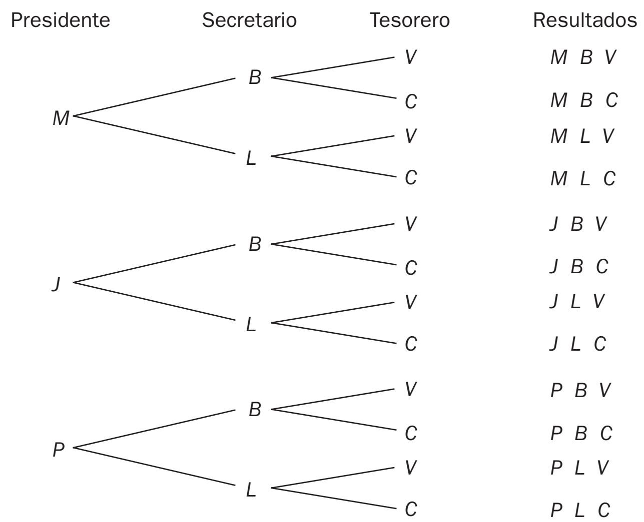
**14.24 Utilizando un diagrama en árbol, calcula el número de resultados posibles al extraer una bola de una urna que contiene una azul y otra roja, y a la vez que se lanza un dado cúbico y una moneda.**




Número de resultados posibles: $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$.

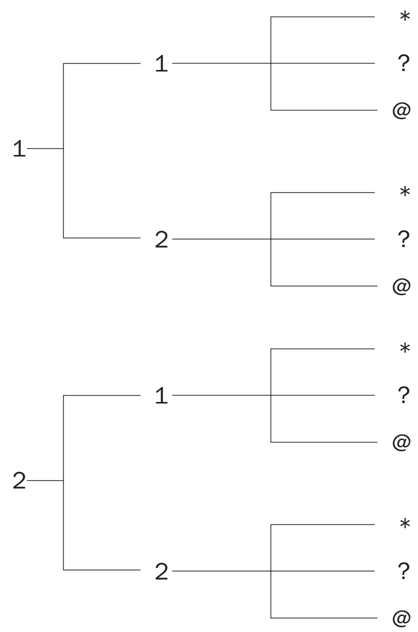
**14.25 Una ONG quiere escoger una nueva junta directiva. Al cargo de presidente optan 3 personas: María, Julia y Pedro; al de secretario, 2: Belén y Luis, y al de tesorero, otras 2: Vanesa y Carlos. Representa en un diagrama en árbol todas las posibilidades de elección.**

María ≡ $M$
Julia ≡ $J$
Pedro ≡ $P$
Belén ≡ $B$
Luis ≡ $L$
Vanesa ≡ $V$
Carlos ≡ $C$




Número de elecciones posibles: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

14.26 **El código de la taquilla del instituto de Zaira está formado, en primer lugar, por 2 números (1 y 2) y, posteriormente, por 3 símbolos (*, ?, @). Con ayuda de un diagrama en árbol, describe y calcula el número de posibles códigos que se pueden utilizar para abrir la taquilla.**




Número de códigos posibles: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

## Permutaciones, variaciones y combinaciones

14.27 **Un chico coloca cada día los libros de texto en su estantería al llegar a casa. En ella dispone los 6 libros que utiliza con mayor frecuencia.**

**¿Cuántas ordenaciones distintas puede realizar?**

Número de ordenaciones distintas: $P_6 = 6! = 720$

14.28 **Con las letras de la palabra FLAMENCO, ¿cuántos grupos diferentes de 8 letras se pueden formar?**

Grupos diferentes de 8 letras: $P_8 = 8! = 40\,320$

14.29 **En un juego de azar se eligen 6 números del 1 al 49, ambos inclusive.**

**¿Cuántas jugadas distintas pueden efectuarse?**

Número de jugadas distintas: $C_{49,\,6} = \dfrac{49!}{6!\,43!} = 13\,983\,816$

14.30 **El AVE que une las ciudades de Madrid y Zaragoza está formado por 6 vagones: 4 de clase turista y 2 de *business class*.**

**¿De cuántas formas posibles pueden ordenarse los vagones detrás de la locomotora?**

$P_6^{4,2} = \dfrac{6!}{4!\,2!}$ posibles ordenaciones de los vagones

14.31 **La comida básica de un poblado está basada en el arroz, las judías, el maíz y la patata.**

**¿Cuántos platos distintos pueden realizar mezclando 3 alimentos a la vez?**

Número de platos distintos: $C_{4,\,3} = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$

**14.32 El aula de informática de un instituto tiene 10 ventanas. Teniendo en cuenta que sus posiciones posibles son abiertas o cerradas, y que debe haber 6 abiertas y 4 cerradas, calcula el número de posiciones distintas que pueden tener las ventanas.**

$P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!\,4!}$ 30 posiciones de las ventanas

**14.33 En un juego de cartas, una mano está compuesta por 4 naipes.**

**¿Cuántas manos distintas se pueden formar con una baraja española (40 cartas)?**

Número de manos distintas: $C_{40,4} = \frac{40!}{4!\,36!} = 91\,390$

**14.34 En una clase de 4.º de ESO se realiza la elección del delegado y del subdelegado entre 5 alumnos.**

**a) ¿Cuántos resultados posibles existen?**

**b) Si Juan Gómez es uno de los candidatos, ¿en cuántos de los resultados anteriores es elegido como subdelegado?**

a) Resultados posibles: $V_{5,\,2} = 5 \cdot 4 = 20$

b) Juan Gómez sería subdelegado con 4 posibles delegados; por tanto, estaría en 4 elecciones.

**14.35 En un juego de mesa se utilizan 15 tarjetas de 3 colores distintos.**

**Si cada uno de los chicos coge 3 tarjetas, ¿cuántas posibilidades hay de que los dos tengan la misma combinación de colores?**

Número de posibilidades de que los chicos tengan la misma combinación: $P_3 = 3! = 6$

**14.36 Cierto alfabeto está formado por los siguientes símbolos: %, $, € y @.**

**¿Cuántas posibles palabras de 8 símbolos se pueden formar teniendo en cuenta que debe haber dos símbolos de cada tipo?**

$P_8^{2,2,2,2} = \frac{8}{2!2!2!2!} = 2520$ posibles palabras

**14.37 El diseño de un nuevo circuito de velocidad debe incluir 9 curvas, de las que cuatro deben ser hacia la derecha y cinco hacia la izquierda.**

**¿De cuántas formas distintas pueden distribuirse las curvas en el circuito?**

$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126$ disposiciones distintas de las curvas en el circuito

**14.38 Los alumnos del último curso de un centro escolar desean formar una comisión con 3 alumnas y 2 alumnos para organizar el viaje de fin de curso. El número total de alumnas es de 25 y el de alumnos es de 20.**

**¿De cuántas formas distintas pueden completar dicha comisión?**

Formas de completar la comisión: $C_{25,3} \cdot C_{20,2} = \binom{25}{3} \cdot \binom{20}{2} = \frac{25!}{22!\,3!} \cdot \frac{20!}{18!\,2!} = 437\,000$

**14.39 Con las letras de la palabra EUROPA, ¿cuántos grupos de 4 letras se pueden formar? ¿Cuántos de ellos acaban en vocal?**

Se pueden formar en total: $V_{6,4} = 360$ grupos de 4 letras. En vocal acaban: $4 \cdot V_{5,3} = 240$ grupos.

**14.40 Fayna dispone de 5 faldas, 4 camisetas y 3 pares de zapatos.**

**¿Cuántas posibilidades tiene para elegir el conjunto que vestirá mañana? ¿En cuántas de ellas no intervienen ni el rojo ni el negro?**

Posibilidades para elegir el conjunto que vestirá: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Posibilidades en las que no intervienen ni el rojo ni el negro: $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$.

**14.41 Halla el valor de $x$ en estas igualdades.**

**a)** $3V_{x,2} = 10C_{x-1,2}$ **b)** $5V_{x,3} = V_{x+2,3}$ **c)** $\frac{12}{5}P_x^{2,3} = P_{x-1}$ **d)** $8P_{x+1}^{2,4} = P_x$

a) $3V_{x,2} = 10C_{x-1,2}$ ($x \neq 1, 2$, pues si no, $C_{x-1,2}$ no tendría sentido).

$$3 \cdot x \cdot (x-1) = 10 \cdot \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{2} \Rightarrow 3 \cdot x \cdot (x-1) = 5 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \Rightarrow 3x = 5 \cdot (x-2) \Rightarrow x = 5$$

b) $5V_{x,3} = V_{x+2,3}$ ($x \neq 0$, pues si no, $V_{x+2,3}$ no tendría sentido).

$$5 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = (x+2) \cdot (x+1) \cdot x \Rightarrow 5 \cdot (x-1) \cdot (x-2) = (x+2) \cdot (x+1) \Rightarrow 5x^2 - 15x + 10 =$$

$$= x^2 + 3x + 2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 18x + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} = \begin{cases} 4 \\ 2/4 = 1/2 \end{cases}$$

Como $x = \frac{1}{2}$ no tiene sentido, entonces $x = 4$.

c) $\frac{12}{5}P_x^{2,3} = P_{x-1}$

$x \neq 1$, pues si no, $P_{x-1}$ no tendría sentido. Además, $x = 2 + 3 = 5$ para que $P_x^{2,3}$ esté correctamente definido.

Veamos: $= \frac{12}{5} \cdot \frac{x!}{2! \cdot 3!} = (x-1)! \Rightarrow \frac{12}{5} \cdot \frac{x \cdot (x-1)!}{12} = (x-1)! \Rightarrow \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$

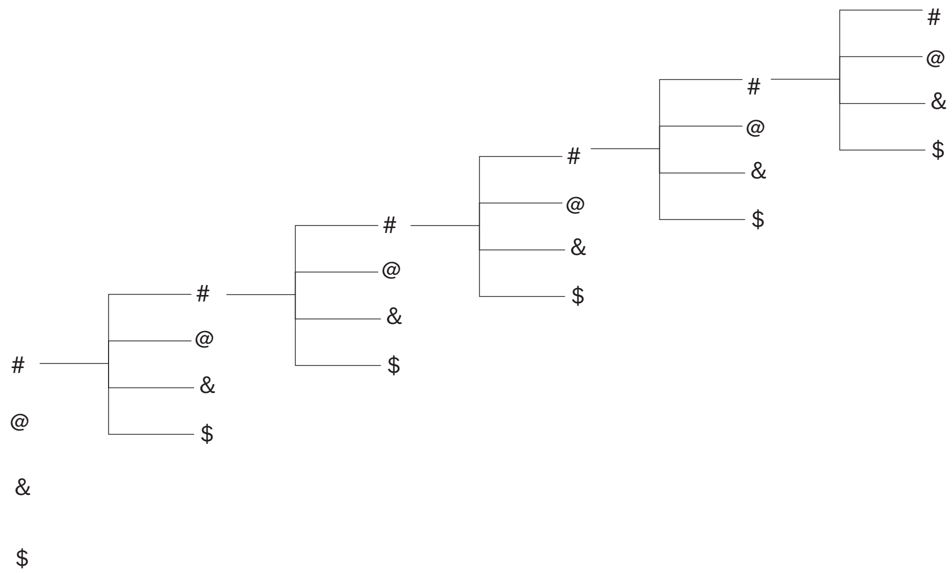
d) $8P_{x+1}^{2,4} = P_x$

$x \neq 0$, pues si no, $P_x$ no tendría sentido. Además, para que $8P_{x+1}^{2,4}$ esté definido, $x + 1 = 2 + 4$, luego $x = 5$.

Veamos: $\frac{(x+1)!}{2! \cdot 4!} = x! \Rightarrow \frac{(x+1) \cdot x!}{6} = x! \Rightarrow \frac{x+1}{6} = 1 \Rightarrow x = 5$

**14.42 Con estos símbolos: #, @, &, $, ¿cuántos posibles grupos de 6 símbolos se pueden formar teniendo en cuenta que no hace falta que intervengan todos?**

**Utiliza un diagrama en árbol y establece el recuento de resultados.**




Se pueden formar todos los grupos de 6 elementos con 4 integrantes distintos, es decir, los grupos correspondientes a las $VR_{4,6} = 4096$.

**14.43 ¿De qué forma se obtienen más grupos diferentes de 4 letras distintas: permutando las de la palabra CANOA o las de la palabra LIBRO? ¿Por qué?**

Permutando las letras de la palabra LIBRO, ya que todas sus letras son distintas, y las $P_5$ palabras posibles son todas diferentes. La palabra CANOA, sin embargo, tiene dos letras iguales que generan palabras repetidas.

**14.44 ¿Por qué 7! es múltiplo de 2, 3 y 5 a la vez?**

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow 7!$ es múltiplo de 2, 3 y 5 a la vez porque tiene estos tres números entre sus factores.

**14.45 Si 9! = 362 880, calcula de forma inmediata el valor de 10! ¿Qué relación existe entre n! y (n + 1)!?**

$10! = 10 \cdot 9! = 3\,628\,800$

Relación entre $n!$ y $(n+1)!$ : $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

**14.46 Si $x! = 479\,001\,600$ y $(x - 1)! = 43\,545\,600$, halla el valor de $x$.**

$$11 = \frac{479\,001\,600}{43\,545\,600} = \frac{x!}{(x-1)!} = \frac{x \cdot (x-1)!}{(x-1)!} = x$$

**14.47 ¿Tiene sentido calcular el número de variaciones de 3 elementos tomados de 5 en 5? Razona tu respuesta.**

No, ya que es imposible formar grupos de 5 miembros con tan solo 3 integrantes si no se pueden repetir.

**14.48 Con los dígitos 3, 5 y 9 se forman todos los números posibles de 4 cifras. ¿Cómo hallamos el número de resultados, con $VR_{3,4}$ o con $V_{4,3}$?**

Con $VR_{3,4}$, pues es inevitable que haya repetición, al ser mayor el número de cifras que el número de los dígitos disponibles.

**14.49** **Relaciona en tu cuaderno las operaciones de la columna de la izquierda con la herramienta combinatoria correspondiente de la derecha.**

| | |
|---|---|
| $\mathbf{7^4}$ | $\boldsymbol{P_7}$ |
| $\mathbf{\dfrac{7!}{4!3!}}$ | $\boldsymbol{VR_{7,\,4}}$ |
| $\mathbf{7!}$ | $\boldsymbol{V_{7,\,4}}$ |
| $\mathbf{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$ | $\boldsymbol{C_{7,\,4}}$ |

$7^4 = VR_{7,\,4}$ $\qquad \dfrac{7!}{4!3!} = C_{7,4}$ $\qquad 7! = P_7$ $\qquad 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = V_{7,4}$

**14.50** **Calcula:**

**a)** $\boldsymbol{V_{5,\,5}}$ **b)** $\boldsymbol{P_5}$ **c)** $\boldsymbol{P_8}$ **d)** $\boldsymbol{V_{8,\,8}}$

**¿Qué observas? ¿Cuál es la relación entre las variaciones de *n* elementos tomados de *n* en *n* y las permutaciones de *n* elementos?**

a) $V_{5,\,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

d) $V_{8,\,8} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

Se observa que $V_{5,\,5} = P_5$ y que $P_8 = V_{8,\,8}$. Se deduce, pues, que, en general, $P_n = V_{n,\,n}$.

**14.51** **Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.**

**a) En las variaciones con repetición no importa el orden.**

**b) En las variaciones sin repetición sí importa el orden.**

**c) En las permutaciones importa el orden.**

**d) En las combinaciones importa el orden.**

a) Falso

b) Verdadero

c) Verdadero

d) Falso

**14.52** **a) ¿Qué relación existe entre** $\boldsymbol{P_6^{2,4}}$**,** $\boldsymbol{C_{6,2}}$ **y** $\boldsymbol{C_{6,4}}$**?**

**b) ¿Qué diferencia hay entre las permutaciones con repetición y las combinaciones?**

**c) ¿Cómo han de ser las permutaciones con repetición y las combinaciones para que ocurra lo del apartado a)?**

a) Aplicando las fórmulas correspondientes a cada expresión, obtenemos:

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{4!2!} = 15\,;\ C_{6,2} = \frac{V_{6,2}}{P_2} = 15\,;\ C_{6,4} = \frac{V_{6,4}}{P_4} = 15$$

Por tanto, se deduce que valen lo mismo las tres expresiones.

b) En las permutaciones con repetición importa el orden a la hora de formar los grupos de elementos, mientras que en las combinaciones el orden no importa.

c) La estructura ha de ser la siguiente:

$P_n^{a,b} = C_{n,a}$ o $P_n^{a,b} = C_{n,b}$

**14.53 Una persona ha olvidado su clave de la tarjeta de crédito. Sólo recuerda que empieza por 9 y que es un número par.**

**¿Qué posibilidad tiene de encontrarla sabiendo que las claves son de 4 cifras con posible repetición?**

Las posibilidades en cada cifra son las siguientes: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$.

**14.54 En un intercambio cultural, el monitor responsable desea distribuir por parejas a los 24 alumnos que participan para completar los asientos del autobús que van a utilizar en los desplazamientos.**

**¿De cuántas formas puede realizarlo?**

**Si hay 8 alumnos del mismo país, ¿en cuántas disposiciones estos 8 alumnos no están emparejados entre ellos?**

En total hay $C_{24,\,2} = 276$ agrupamientos posibles.

En $C_{8,\,2} = 28$ de esos agrupamientos están los alumnos del mismo país juntos.

Por tanto, en $276 - 28 = 248$, los alumnos del mismo país están mezclados con el resto.

**14.55 Uniendo 5 vértices de un heptágono se obtiene un pentágono.**

**¿Cuántos pentágonos distintos se pueden conseguir siguiendo este procedimiento?**

Número de pentágonos: $C_{7,5} = \dfrac{7!}{2!\,5!} = 21$

**14.56 Los números escritos en base ocho solo permiten el uso de las cifras del 0 al 7.**

**¿Cuántos números de 4 cifras escritos en dicha base tienen todas las cifras distintas?**

Números de 4 cifras: $V_{8,4} = \dfrac{8!}{4!} = 1680$

**14.57 Un equipo de balonmano está formado por seis jugadores de campo y por un portero. Si un entrenador dispone de 12 jugadores de campo y de 2 porteros, ¿cuántas alineaciones distintas puede completar?**

Número de alineaciones distintas: $2 \cdot C_{12,6} = \dfrac{12!}{6!\,6!} = 1848$

**14.58 La contraseña de acceso a la cuenta de cierto correo electrónico está formada por 8 caracteres: los 5 primeros son dígitos del 1 al 9, y los 3 últimos son vocales.**

**¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar?**

Número de contraseñas distintas: $VR_{9,5} \cdot VR_{5,3} = 9^5 \cdot 5^3 = 7\,381\,125$

**14.59 Un programa de ordenador descifra claves secretas en tiempo récord. Una agencia de investigación necesita descubrir un código de 5 dígitos y 3 letras (y en ese orden).**

**Sabiendo que emplea una milésima de segundo en analizar cada código, ¿cuántos días tardará en desvelar el código secreto?**

Número de códigos posibles: $VR_{10,5} \cdot VR_{27,3} = 10^5 \cdot 27^3 = 1\,968\,300\,000$

El tiempo que se tarda en descifrarlos será igual a:

$1\,968\,300\,000 \cdot 0{,}001 = 1\,968\,300$ segundos $= 22{,}8$ días, aproximadamente

**14.60 La codificación de los libros de una biblioteca se establece de la siguiente manera: los 3 primeros dígitos del código hacen referencia a la sección a la que pertenecen; los 2 siguientes, al número de la estantería en la que se encuentran, y los 2 últimos, a la posición que ocupan dentro de dicha estantería.**

**Teniendo en cuenta que se utilizan las cifras del 0 al 9, ¿cuántos libros se pueden codificar?**

Número de libros que se pueden codificar: $VR_{10,7} = 10^7 = 10\,000\,000$.

**14.61 Entre las actividades de fin de curso de un centro se organiza un partido y se premia a quien adivine el resultado del encuentro. Contabiliza todos los tanteos que en principio se pueden producir si se ha decidido imponer un tope de 7 goles por equipo.**

**Si han apostado 4 personas por cada resultado y cada apuesta cuesta un euro, ¿cuánto recibe cada uno de los que ganen?**

Tanteos posibles: $VR_{8,\,2} = 8^2 = 64$.

Dinero recaudado: $64 \cdot 4 = 256$ €.

Por tanto, cada uno de los cuatro ganadores recibirá $256 : 4 = 64$ €.

**14.62 Con las 27 letras independientes del alfabeto:**

**a) ¿Cuántos grupos de 5 letras distintas se pueden formar?**

**b) ¿Cuántos empiezan y terminan con vocal?**

**c) ¿Cuántos empiezan por consonante y terminan con vocal?**

a) Grupos de 5 letras distintas: $V_{27,\,5} = 9\,687\,600$

b) Grupos que empiezan y terminan con vocal:

$V_{25,\,5}$ (las 3 letras del centro) $\cdot$ $V_{5,2}$ (las posibles ordenaciones de las 5 vocales en el inicio y final) $= 276\,000$

c) Grupos que empiezan por consonante y terminan con vocal:

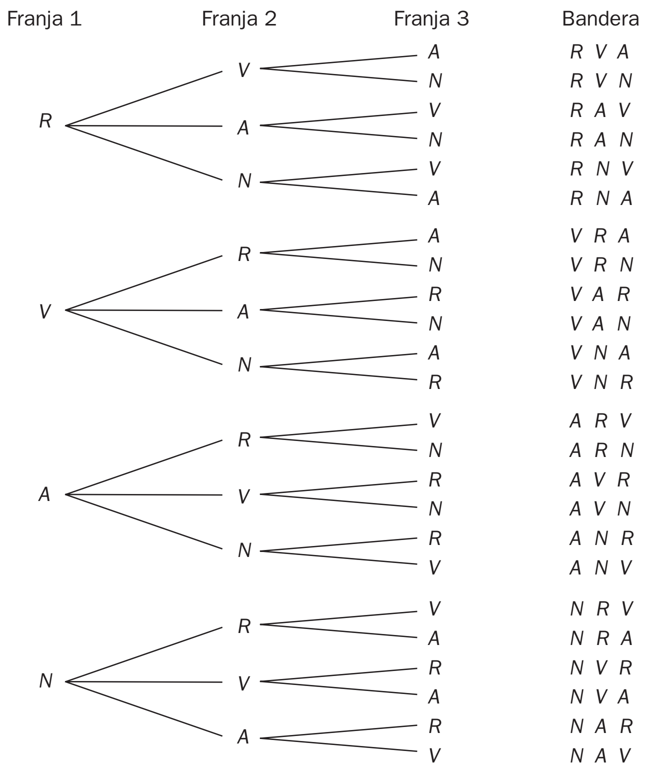
22 (posibles consonantes) $\cdot$ $V_{25,\,3}$ (ordenaciones en puestos del centro de todas las letras menos 2) $\cdot$ 5 (posibles vocales al final) $= 1\,518\,000$

**R E F U E R Z O**

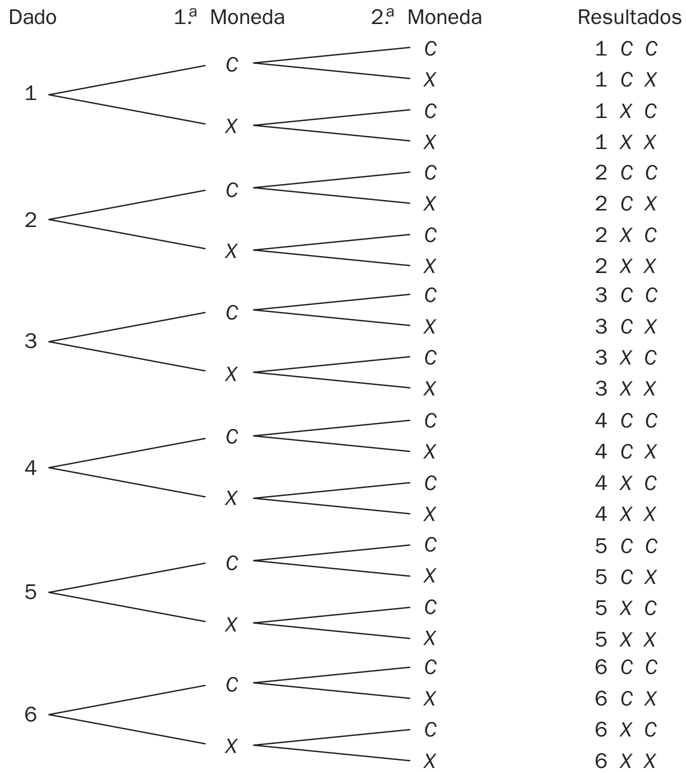
## Diagramas de árbol

**14.63 Disponemos de los colores rojo, verde, amarillo y negro para formar todas las banderas posibles con 3 franjas verticales.**

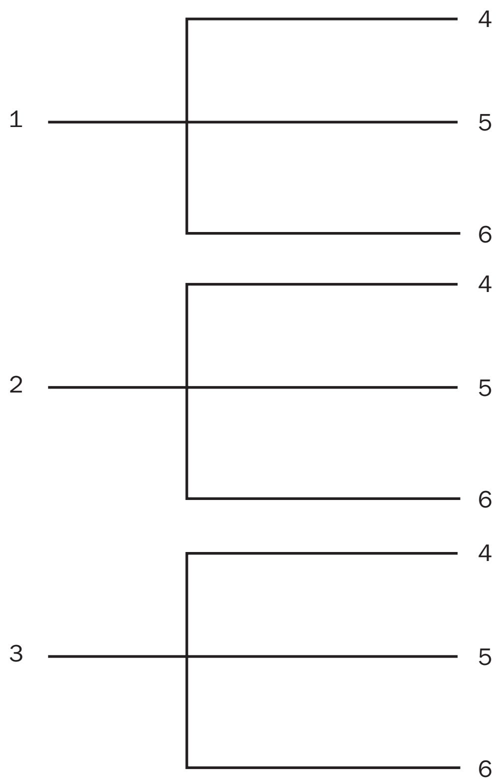
**Dibuja un diagrama en árbol que represente todas las banderas resultantes de tal manera que no se repitan colores en la misma bandera.**



**14.64** **Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y dos monedas de un euro.**




**14.65** **Hacemos girar una ruleta que contiene números del 1 al 3, y a continuación otra con los números del 4 al 6. Calcula cuántos números de dos cifras se pueden formar al girar cada ruleta, en el orden indicado. Forma un diagrama de árbol que ilustre este experimento.**




Hay $3 \cdot 3 = 9$ números.

## Permutaciones, variaciones y combinaciones

14.66 **a) ¿Cuántos números distintos de 6 cifras existen en los que aparezca dos veces el 3, dos veces el 4 y dos el 5?**

**b) ¿Cuántos de esos números son pares?**

a) $P_6^{2,2,2} = \dfrac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$ números distintos

b) La única manera de que sean pares es que acaben en 4; por tanto, *fijamos* uno de los cuatros en la última posición, y obtenemos:

$P_5^{2,2,1} = \dfrac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$ números son pares

14.67 **Cierta comarca está formada por 15 pueblos, y todos sus ayuntamientos deciden rehabilitar sus carreteras.**

**Si todas las localidades se encuentran comunicadas entre sí, ¿cuántas carreteras deberán rehabilitarse?**

Número de carreteras que se deben rehabilitar: $C_{15,2} = \dfrac{15!}{2!\,13!} = 105$

14.68 **¿De cuántas maneras se pueden sentar 7 amigos que acuden a un concierto de música clásica en una fila de 7 butacas?**

Formas de sentarse: $P_7 = 7! = 5040$

14.69 **En una bolsa hay 8 bolas numeradas del 1 al 8. Extraemos una, anotamos su número y la devolvemos a la bolsa. Repetimos la operación 3 veces.**

**¿Cuántos resultados distintos se pueden dar?**

Número de resultados distintos: $VR_{8,3} = 8^3 = 512$

14.70 **Con las cifras impares:**

**a) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar?**

**b) ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden conseguir?**

**c) ¿Cuántos productos de 3 factores distintos se pueden realizar?**

Tenemos 5 cifras impares {1, 3, 5, 7, 9}.

a) Números de 3 cifras distintas: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) Números de 5 cifras diferentes: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) Productos de 3 factores distintos: $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$

14.71 **Se define un *byte* como una combinación de 8 dígitos que solo pueden ser ceros y unos. ¿Cuántos *bytes* distintos hay que tengan 6 ceros y 2 unos? ¿Cuántos de estos *bytes* terminan en 1?**

El número de *bytes* que podemos formar con esas condiciones es: $P_8^{6,2} = \dfrac{8!}{6!\,2!} = 28$

Para que acaben en uno, en la última posición *fijamos* uno de los unos, y obtenemos:

$P_7^{6,1} = \dfrac{7!}{6!\,1!} = 7$ *bytes* que terminen en uno.

**14.72 Con los números del 1 al 6 (ambos inclusive), ¿cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse que sean divisibles por 3?**

Podrán formarse $8 \cdot 3! = 48$ números de 3 cifras distintos.

**14.73 ¿Cuántos números capicúas de 4 cifras existen? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos son múltiplos de 5? ¿Cuántos son menores que 3200?**

Números capicúas de 4 cifras: $VR_{10,\,2} = 10^2 = 100$. Ahora, 100 – 10 (los que empiezan por 0) = 90.

Números capicúas pares: $4 \cdot 10 = 40$

Números capicúas múltiplos de 5 son solo los que terminan por 5. Hay 10 que empiezan o terminan por 5.

Números capicúas menores que 3200 son los que empiezan por 1 (hay 10), los que empiezan por 2 (hay 10) y los que empiezan por 31 (hay 1). En total tendremos 21.

**14.74 De todos los resultados posibles al lanzar 3 dados cúbicos, ¿en cuántos de ellos aparece al menos un 5?**

Todas las posibilidades son: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$.

(Salir al menos un cinco) U (Salir ningún cinco) = Total.

Salir ningún cinco: $VR_{5,\,3} = 5^3 = 125$.

Salir al menos un cinco: 216 – 125 = 91.

**14.75 Con las cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9:**

**a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener al sumar las cifras de 3 en 3?**

**b) De los números de 5 cifras diferentes que se pueden formar, ¿cuántos son mayores que 70 000?**

**c) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden conseguir? Averigua la suma de todos ellos.**

a) Número de resultados distintos al sumar de 3 en 3 las cifras $= C_{5,\,3} = 10$.

b) De los números de 5 cifras diferentes que se pueden formar son mayores que 70 000: $2 \cdot P_4 = 48$.

c) Números de 3 cifras distintas $= V_{5,\,3} = 60$

Para calcular la suma de todos ellos:

Al ser números de tres cifras, serán de la forma *C D U* (centenas, decenas y unidades).

$$\sum U = V_{4,2} \cdot 9 + V_{4,2} \cdot 7 + V_{4,2} \cdot 5 + \ldots + V_{4,2} \cdot 1 = 300$$

$$\sum D = 10 \cdot 300 = 3000$$

$$\sum C = 100 \cdot 300 = 30000$$

$$\sum Total = 33\,300$$

**14.76 Determina cuál de las siguientes relaciones es la correcta, siendo *n* un número natural mayor que 1, y justifica tu respuesta.**

**$n! < n^n$** **$n! = n^n$** **$n! > n^n$**

La relación correcta es la primera, ya que $\underbrace{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}_{(n \text{ factores})} < \underbrace{n^n = n \cdot n \cdot n \cdot n \ldots \cdot n}_{(n \text{ factores})}$

**14.77 Halla todos los valores de *n* que verifican la siguiente igualdad. $\dfrac{P_n^{4,2,1}}{P_{n-2}^{2,2,1}} = \dfrac{21}{6}$**

$$\frac{\dfrac{n!}{4! \cdot 2! \cdot 1!}}{\dfrac{(n-2)!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}} = \frac{21}{6} \Rightarrow \frac{\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{48}}{\dfrac{(n-2)!}{4}} = \frac{21}{6} \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1)!}{12} = \frac{21}{6} \Rightarrow n^2 - n + 42 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm 13}{2} = \begin{cases} 7 \\ -6 \end{cases}$$

Descartamos la solución $n = -6$, pues no tiene sentido. Luego $n = 7$.

**14.78 El número de combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n* es igual a $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$, pero hay otra manera de calcular este número en la que la expresión obtenida depende solo de factoriales. Obtén esta fórmula y, a partir de ella, deduce una expresión para hallar las $V_{m,n}$ en la que solo aparezcan factoriales.**

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} = \frac{m \cdot \ldots \cdot (m-n+1) \cdot (m-n)!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Por tanto, $C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Partiendo de la expresión inicial, tenemos:

$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} \Rightarrow V_{m,n} = C_{m,n} \cdot P_n$, sustituyendo la expresión obtenida anteriormente, llegamos a:

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} \cdot n! = \frac{m!}{(m-n)!}$$

## PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

**14.79 Un nuevo lenguaje de programación**

**Un grupo de aficionados a la informática ha ideado un lenguaje de programación al que han llamado Artex. Las palabras reservadas en este lenguaje, que sirven para establecer todo tipo de órdenes de forma automática, son las que se obtienen al permutar las letras de *Artex*, y se clasifican en:**

| Tipo de orden | Empiezan por | Acaban en |
|---|---|---|
| Instrucciones aritméticas básicas | Consonante | Consonante |
| Instrucciones algebraicas | A | Consonante |
| Instrucciones condicionales | E | X |
| Instrucciones de iteración | E | Consonante distinta de X |
| Funciones y procedimientos | Vocal | Vocal |

**a) ¿Cuántas palabras reservadas diferentes tiene este lenguaje?**

**b) Calcula el número de órdenes de cada tipo que se pueden establecer.**

**c) ¿Existen palabras reservadas no utilizadas en ninguna de las órdenes? En caso afirmativo, calcula su número y descríbelas.**

a) $P_5 = 5! = 120$ palabras reservadas diferentes

b) Instrucciones aritméticas básicas: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 36$

Instrucciones algebraicas: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

Instrucciones condicionales: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$

Instrucciones de iteración: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Procedimientos y funciones: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$

c) Hay $120 - 84 = 36$ permutaciones no utilizadas que corresponden con las palabras que empiezan por consonante y acaban por vocal. Es decir: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 36$.

**14.80** **Santi, Pilar, Ana, Rodrigo y Elena van a ir de viaje en un coche de 5 plazas con dos asientos delanteros y tres traseros.**

**Solo las chicas tienen el carnet de conducir y, además, Santi tiene que ir en los asientos delanteros porque se marea.**

**Teniendo en cuenta estas condiciones:**

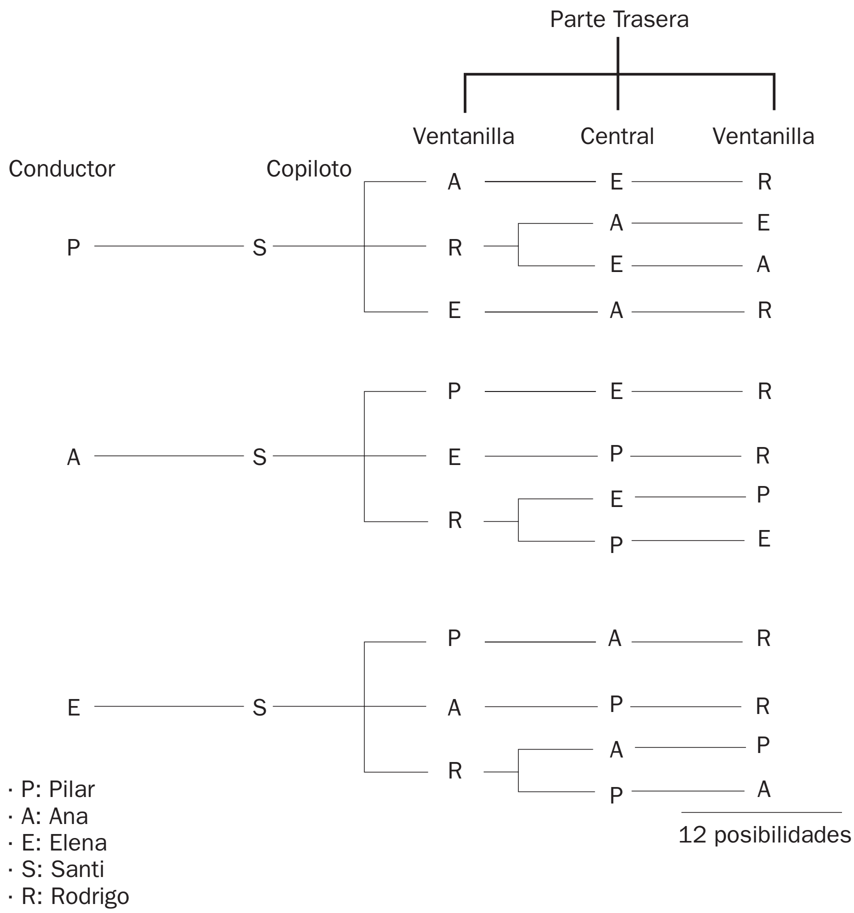
**a) ¿De cuántas formas diferentes pueden ocupar los asientos del coche?**

**b) ¿En cuántas de estas formas irá Rodrigo sentado al lado de una de las cuatro ventanillas?**

**c) ¿En cuántos casos irá Ana sentada entre Pilar y Rodrigo?**

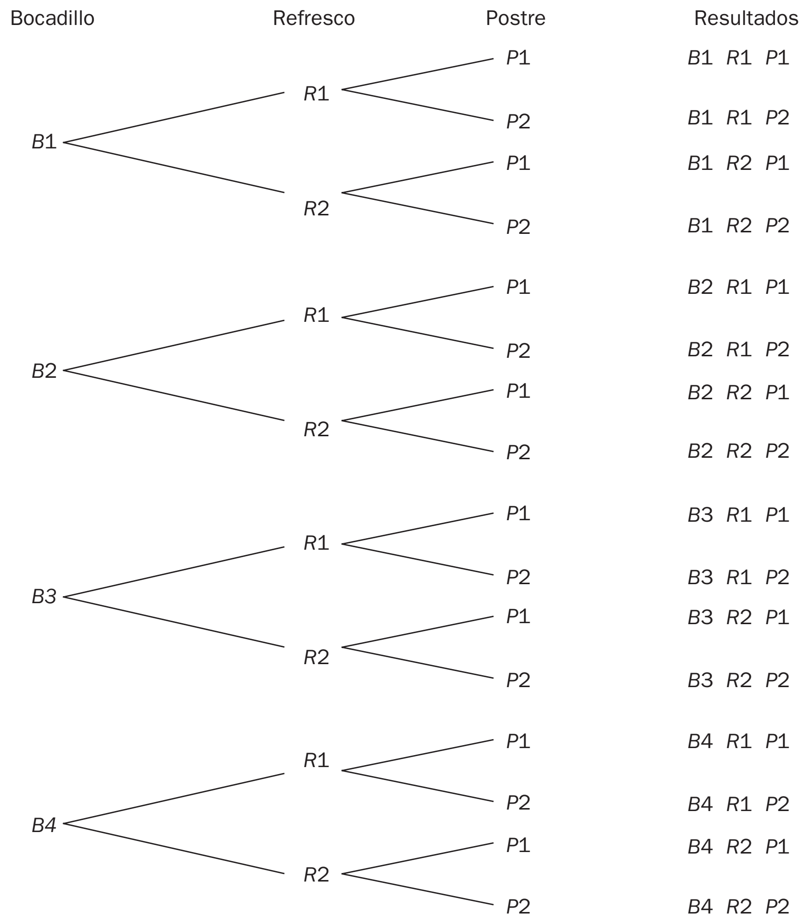
a) Santi debe ir en el asiento delantero y una chica conduciendo. Luego las posibilidades son: $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.

b) Hacemos el diagrama en árbol que describe esta situación:




c) Para que Ana vaya sentada entre Pilar y Rodrigo, estos tres deben ir en el asiento trasero del coche. Por tanto, Elena tiene que ir conduciendo, y Santi, en el asiento del copiloto. En el asiento trasero, para que se dé la condición del enunciado, pueden ir sentados Pilar-Ana-Rodrigo o Rodrigo-Ana-Pilar. Por tanto, hay dos posibilidades.

**14.A1 Se organiza una fiesta solidaria con el fin de recaudar fondos para el centro de personas mayores del barrio. En dicha fiesta se disponen 4 tipos de bocadillos, 2 clases de refrescos y 2 postres. Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a la elección de un bocadillo, un refresco y un postre. ¿Cuántas posibilidades distintas existen?**




Hay $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ posibilidades distintas.

**14.A2 La primera fila del palco presidencial de un estadio de fútbol se halla compuesta de 11 asientos. ¿De cuántas formas pueden completarse con los miembros de los equipos directivos de manera que los dos presidentes se sienten juntos?**

Número de formas de sentarse de modo que los dos presidentes estén juntos: $2 \cdot P_{10} = 2 \cdot 10! = 7\,257\,600$

**14.A3 Juan quiere irse de viaje el fin de semana, y dispone de 5 camisetas de las cuales desea llevar 3. ¿De cuántas formas distintas puede realizar la elección?**

Número de formas distintas de hacer la elección: $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$

**14.A4 ¿De cuántas formas diferentes se pueden escoger 3 figuras de entre todas las existentes en una baraja española de 40 cartas?**

Número de formas distintas de hacer la elección: $C_{12,3} = \dfrac{12!}{3!\,9!} = 220$

**14.A5 ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden constituir con los dígitos 2, 4, 6, 8 y 9? ¿Cuántos de ellos son pares? ¿Cuántos se podrían formar sin repetir ningún dígito?**

Números de 4 cifras: $VR_{5,4} = 625$

Números pares: $4 \cdot VR_{5,3} = 500$

Números con cifras distintas: $V_{5,4} = 120$

**14.A6 Calcula el valor de *x* en estas igualdades.**

**a)** $V_{x,\,4} = 6V_{x,\,2}$

**b)** $P_x = 20P_{x,\,2}$

**c)** $P_x = 20P_{x\,-\,2}$

**d)** $V_{x,3} = 4C_{x\,+\,1,2}$

a) $\dfrac{x!}{(x-4)!} = 6 \cdot \dfrac{x!}{(x-2)!} \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 5$

b) $x! = 20 \cdot (x - 2)! \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$

c) $x! = 20 \cdot (x - 2)! \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$

d) $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 4 \cdot \dfrac{(x + 1) \cdot x}{2} \Rightarrow x = 5$

**14.A7 Los 4 refugios de un parque natural están comunicados todos ellos dos a dos. ¿Cuántos caminos diferentes hay?**

Caminos diferentes: $C_{4,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$

**14.A8 Los 7 miembros de un grupo *scout* llevan gorra, siendo 4 rojas y 3 azules. ¿Cuántas posibles ordenaciones por colores pueden hacer cuando caminan en fila?**

Posibles ordenaciones $P_7^{4,3} = \dfrac{7!}{4!\,3!} = 35$

**MATETIEMPOS**

## El precio de la gasolina

**La capacidad media de un barril de petróleo es de 158,98 litros. El coste medio del barril en el mercado de Londres durante un determinado mes es de 70 dólares. Si el precio de la gasolina, en ese mismo mes, fue de 1 euro por litro y un dólar se cotizó a 0,7 euros, ¿cuál fue la diferencia entre el precio de coste y el de venta?**

Precio de un litro de petróleo en dólares: $\dfrac{70}{158,98} = 0,4403$

Precio de un litro de petróleo en euros: $0,4403 \cdot 0,7 = 0,3082$

Diferencia, en euros, entre el precio de un litro de gasolina y el de un litro de petróleo: $1 - 0,3082 = 0,6918$