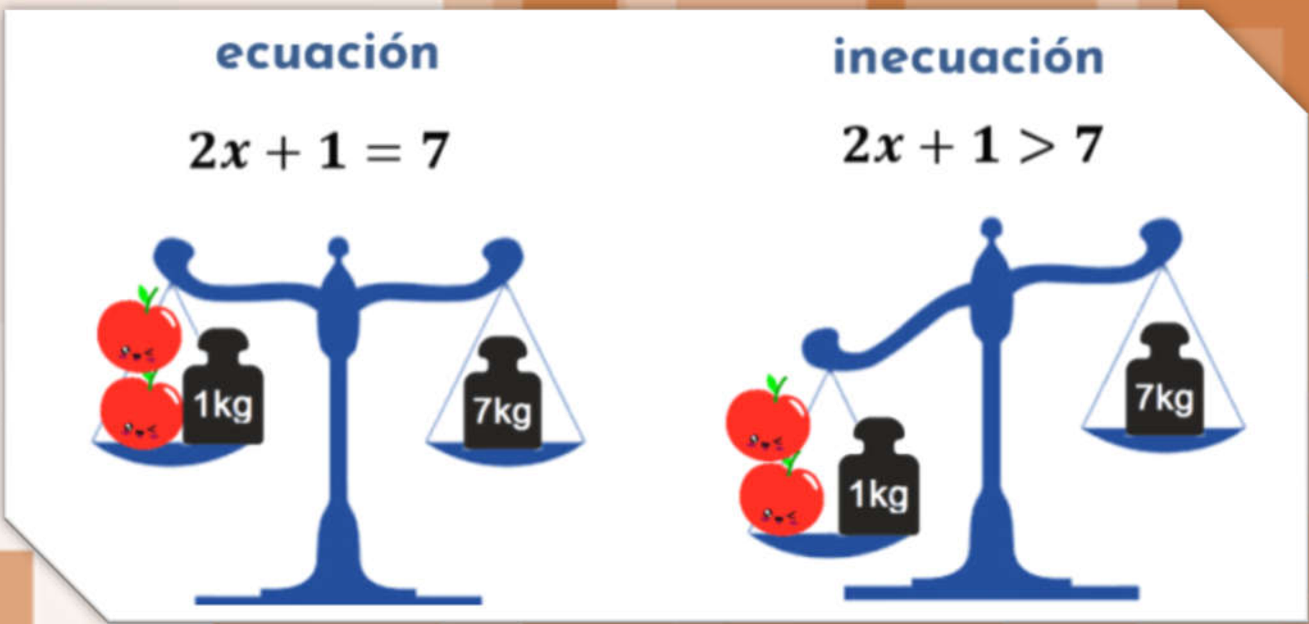
Unidad Didáctica 4

ECUACIONES e INECUACIONES

4º ESO



En esta unidad vas a:

1. Distinguir e identificar ecuaciones e identidades.
2. Plantear y resolver ecuaciones de cualquier tipo.
3. Resolver problemas con la ayuda de ecuaciones.
4. Plantear y resolver Inecuaciones polinómicas y racionales.
5. Resolver problemas con la ayuda de inecuaciones.

SUMARIO

4.00.- Lectura Comprensiva

La última Noche

Durante un corto intervalo de tiempo la actividad del joven cesó, y en la pequeña habitación de la pensión donde vivía solo se escuchaba su agitada respiración, pues parecía que ni durmiendo descansaba.

El ruido producido por un carruaje sobre el empedrado de la calle hizo que primero entornara los ojos y después, como si hubiera sido poseído, tomara pluma y papel y comenzara a escribir.

Évariste Galois, presintiendo lo inevitable, escribió sus cartas con un carácter inequívoco de última voluntad, como si se dictara a sí mismo.

> **[...] Vuestra tarea es sencilla: demostrad que he de combatir contra mi voluntad, tras haber agotado todos los medios de reconciliación. [...] Por favor recordadme, ya que el destino no me ha dado vida bastante para ser recordado por mi patria.**

Tras sellar esta primera carta, más tranquilo, comenzó a escribir la segunda:

> **[...] He hecho algunos descubrimientos nuevos en Matemáticas que puedes ver en tres memorias que dejo aquí... Haz llegar estos trabajos a la Academia de las Ciencias. [...] Confío en que después de leerlos alguien encuentre provecho en organizarlo todo. [...]**

El premonitorio estado de ánimo de Galois estaba plenamente justificado: al amanecer sería herido de muerte en un duelo y moriría al día siguiente, abandonado por todos, en un hospital de París. Pese a fallecer con tan solo veinte años, sus trabajos sobre ecuaciones fueron absolutamente geniales.

Si eres capaz, escribe tres ecuaciones: una que no tenga solución, otra que tenga una solución y una tercera con más de una solución.

<u>Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:</u>

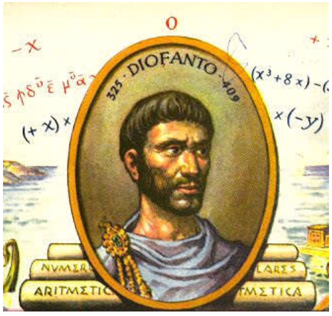
1.- ¿De qué trata el texto?

2.- ¿Qué te parece la historia?

3.- Busca información en Internet del protagonista de esta historia.

4.01.- Introducción

Desde el siglo XVII A.C. los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones. En el siglo XVI A.C. los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales. Ya para entonces tenían un método para resolver ecuaciones de primer grado que se llamaba el "método de la falsa posición". No tenían notación simbólica, pero utilizaron el jeroglífico **hau** (que quiere decir montón o pila) para designar la incógnita.



Alrededor del siglo I D.C. los matemáticos chinos escribieron el libro **Jiu zhang suan shu** (que significa El Arte del cálculo), en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones.

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a **Diofanto** (250 D.C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era, como hemos visto, mayor por la geometría.

En el siglo III el matemático griego **Diofanto de Alejandría** publicó su Aritmética en la cual, por primera vez en la historia de las matemáticas griegas, se trataron de una forma rigurosa las ecuaciones de primer grado. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega **arithmos**, que significa número. Los problemas de álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería "la teoría de ecuaciones". A pesar de lo rudimentario de su notación simbólica y de lo poco elegantes que eran los métodos que usaba, se le puede considerar como uno de los precursores del álgebra moderna.

El planteamiento de ecuaciones en matemáticas responde a la necesidad de expresar simbólicamente los problemas y los pensamientos.

Sobre la vida de Diofanto aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal, propuesto por un discípulo suyo para explicar datos de la vida de este sabio griego.

Epitafio de Diofanto

¡Caminante!
Aquí yacen los restos de Diofanto.
Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida,
cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
A partir de ahí, la séptima parte de existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito.
Éste entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.
Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte.

En 1557 el matemático inglés **Robert Recorde** inventó el símbolo de la igualdad, =.

En 1591 el matemático francés **François Viète** desarrolló una notación algebraica muy cómoda, representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes.

4.02.- Conceptos Generales

En esta unidad, vamos a relacionar expresiones algebraicas, que pueden ser polinomios, utilizando los signos:

$$= \qquad < \qquad > \qquad \leq \qquad \geq$$

- Si las expresiones algebraicas se construyen mediante el signo igual, =, se construye una ecuación.
- Si las expresiones algebraicas se construyen mediante alguno de los otros cuatro signos de desigualdad, $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$, se construye una inecuación.

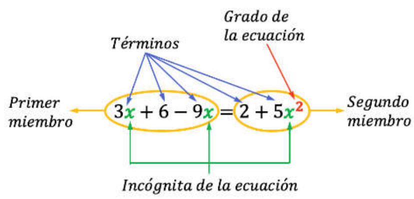
4.2.1.- Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros y separadas por el signo igual. En ellas, aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Cuando esta igualdad es cierta para cualquier valor de la incógnita recibe el nombre de **Identidad**.

$$\underbrace{\underbrace{3x+5}_{Primer\ miembro} = \underbrace{2x-4}_{Segundo\ miembro}}_{\text{ECUACIÓN}} \qquad \underbrace{(x+2)^2 = x^2+4x+4}_{\text{IDENTIDAD}}$$

Las incógnitas, representadas generalmente por letras, son las variables que se pretenden encontrar. En general utilizaremos la letra **x**, aunque también se suelen utilizar la **y** y la **z**.

- **Los elementos de una ecuación son:**



- ✓ Miembro: Expresión algebraica que hay a ambos lados del =.
- ✓ Término: Cada uno de los sumandos que hay en los dos miembros.
  - o Término Independiente: Es aquel que no tiene parte literal.
- ✓ Incógnita: Cada una de las letras de valor desconocido y que queremos calcular.
- ✓ Grado: Es el mayor de los grados de sus términos

Recuerda que decimos que dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

- **Resolver una ecuación** es encontrar el valor, o los valores, que debe tomar la incógnita (o incógnitas) para que la igualdad sea cierta. En el caso de que no exista ningún valor que verifique la igualdad, diremos que la ecuación no tiene solución. Para resolverlas, las transformaremos mediante la transposición y la reducción en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita.

Ejemplo

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+3(2x-1)=x+67 \xrightarrow[\text{Rompemos Paréntesis}]{} 2x+6x-3=x+67 \xrightarrow[\text{Agrupamos términos}]{} 8x-3=x+67 \xrightarrow[\text{Trasponemos términos}]{} 8x-x=67+3$

$\xrightarrow[\text{Agrupamos términos}]{} 7x=70 \xrightarrow[\text{Despejamos la incógnita}]{} x=\dfrac{70}{7}=10 \xrightarrow[\text{Solución}]{} x=10$

b) $4x-6=4(x+3) \rightarrow 4x-6=4x+12 \rightarrow 4x-4x=12+6 \rightarrow 0x=18 \rightarrow$ Sin Solución

c) $4x-6=4(x-2)+2 \rightarrow 4x-6=4x-8+2 \rightarrow 4x-4x=6-8+2 \rightarrow 0x=0 \rightarrow \infty$ Soluciones

4.03.- Ecuaciones Polinómicas

Una **ecuación polinómica** es una igualdad de dos polinomios, que se puede escribir de forma que en el primer miembro haya un polinomio y en el segundo un 0.

$$P(x)=0 \quad \rightarrow \quad \text{Ejemplo: } 3x^3-2x^2+4x-7=0$$

Dependiendo del grado del polinomio P, la ecuación será de primer grado, de segundo grado, ..., etc.

4.3.1.- Ecuaciones de primer grado

Son de la forma $ax+b=0$ y cuya solución viene dada por la expresión: $x=-\frac{b}{a}$

Ejemplo

2.- Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $\frac{x}{3}-\frac{13-2x}{2}=\frac{1}{3}$

$$\frac{x}{3}-\frac{13-2x}{2}=\frac{1}{3} \rightarrow m.c.d.(3,2,6)=6 \rightarrow \frac{2x}{6}-\frac{3\cdot(13-2x)}{6}=\frac{2}{6} \rightarrow 2x-3\cdot(13-2x)=2 \rightarrow 2x-38+6x=2$$

$$\rightarrow 8x-38=2 \rightarrow 8x=38+2 \rightarrow 8x=40 \rightarrow x=\frac{40}{8} \rightarrow x=5$$

4.3.2.- Ecuaciones de segundo grado

Son de la forma $ax^2+bx+c=0$ y cuya solución viene dada por la expresión: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$

Dependiendo del valor del discriminante $\Delta=b^2-4ac$, tendremos dos, una o ninguna solución:

$$\Delta=b^2-4ac \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet\ Si\ \Delta>0 & \rightarrow \quad La\ ecuación\ tiene\ 2\ soluciones \\ \bullet\ Si\ \Delta=0 & \rightarrow \quad La\ ecuación\ tiene\ 1\ solución\ (Polo\ doble) \\ \bullet\ Si\ \Delta<0 & \rightarrow \quad La\ ecuación\ no\ tiene\ solución \end{cases}$$

- Decimos que una ecuación de segundo grado es completa si los coeficientes a, b y c son distintos de cero:

$$Si\ a,b,c\neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Ec. Completa}$$

- Decimos que una ecuación es incompleta si alguno de los coeficientes a, b o c es nulo.

$$Si\ a\ ó\ b\ ó\ c=0 \quad \rightarrow \quad \text{Ec. Incompleta}$$

En el caso de que una ecuación de segundo grado sea incompleta, se puede resolver utilizando la fórmula general, pero, es preferible hacerlo de la siguiente manera:

- Si c=0, la ecuación será de la forma: $ax^2+bx=0$ y la resolveremos sacando factor común la x:

$$ax^2+bx=0 \quad \rightarrow \quad x\cdot(ax+b)=0 \quad \overset{*}{\rightarrow} \quad \begin{cases} x_1=0 \\ ax+b=0 \quad \rightarrow \quad x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

*Recordar que si el producto de dos números es cero es porque alguno de ellos es cero.

- Si $b=0$, la ecuación será de la forma: $ax^2+c=0$ y la resolveremos despejando la x:

$$ax^2+c=0 \rightarrow ax^2=-c \rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \underset{**}{\rightarrow} x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \rightarrow \begin{cases} x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}$$

** Esta ecuación sólo tendrá solución si los signos de c y a son opuestos, en otro caso no tendrá solución porque no existe la raíz cuadrada negativa de un número.

Ejemplo

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2+5x-6=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \end{cases} \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2} \rightarrow x=\frac{-5\pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-5+7}{2}=\frac{2}{2}=1 \\ x_2=\frac{-5-7}{2}=\frac{-12}{2}=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-6 \end{cases}$

b) $x^2+5x=0 \rightarrow x(x+5)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-5 \end{cases}$

c) $x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm\sqrt{9} \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$

4.3.3.- Ecuaciones bicuadradas y bicúbicas (tricuadradas)

Son ecuaciones de cuarto o sexto grado que se resuelven de forma similar a las ecuaciones de segundo grado, pero haciendo antes un cambio de variable.

Ecuaciones Bicuadradas	Ecuaciones Bicúbicas
$ax^4+bx^2+c=0$	$ax^6+bx^3+c=0$

Tanto en una como en otra se realiza un cambio de variable, transformándolas en una ecuación de segundo grado.

Ejemplo

4.- Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada: $x^4-5x^2-36=0$

Lo primero es hacer un cambio de variable para convertirla en una ecuación de segundo grado: $z=x^2$

$$x^4-5x^2-36=0 \xrightarrow[z=x^2]{\text{Cambio de Variable}} z^2-5z-36=0$$

Hecho esto, resolvemos la ecuación de segundo grado:

$z^2-5z-36=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ z=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-36)}}{2\cdot 1} \end{cases} \rightarrow z=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow z=\frac{5\pm\sqrt{169}}{2} \rightarrow z=\frac{5\pm 13}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=\frac{5+13}{2}=\frac{18}{2}=9 \\ z_2=\frac{5-13}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1=9 \\ z_2=-4 \end{cases}$

Resuelta la ecuación en z, deshacemos el cambio de variable y calculamos x.

$$\text{Si } z=x^2 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{z} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \\ x=\pm\sqrt{-8}=\text{No sol} \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1=-3 \qquad x_2=+3$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $x^4-5x^2-36=0$ son $x_1=-3$ $\quad x_2=+3$

Ejemplo

5.- Resuelve la siguiente ecuación bicúbica: $x^6-9x^3+8=0$

Lo primero es hacer un cambio de variable para convertirla en una ecuación de segundo grado: $z=x^2$

$$x^6-9x^3+8=0 \quad \xrightarrow[z=x^3]{\text{Cambio de Variable}} \quad z^2-9z+8=0$$

Hecho esto, resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$z^2-9z+8=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-9 \\ c=8 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ z=\dfrac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1} \end{cases} \quad \rightarrow \quad z=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad z=\frac{9\pm\sqrt{49}}{2} \quad \rightarrow \quad z=\frac{9\pm 7}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z_1=\dfrac{9+7}{2}=\dfrac{16}{2}=8 \\ z_2=\dfrac{9-7}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z_1=8 \\ z_2=1 \end{cases}$$

Resuelta la ecuación en z, deshacemos el cambio de variable y calculamos x.

$$\text{Si } z=x^3 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt[3]{z} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1=\sqrt[3]{8}=2 \\ x_2=\sqrt[3]{1}=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1=2 \qquad x_2=1$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $z^2-9z+8=0$ son $x_1=2$ $\quad x_2=1$

Piensa y practica

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado: Sol: a) –4; b) –27/29; c) –38/11

$a)\ 3x+\frac{1}{2}x+6=2x$ $\qquad b)\ \frac{3x-11}{20}-\frac{5x-1}{14}=\frac{x-7}{10}-\frac{5x-6}{21}$ $\qquad c)\ \frac{-6}{2}\left(\frac{5+x}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(4-\frac{4x}{2}\right)+\frac{3x}{2}$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2° grado: Sol: a) 0 y 12; b) –4 y 3; c) –2/3 y 5

$a)\ (x+13)^2=(x+12)^2+(x-5)^2$ $\qquad b)\ (x+4)^3-(x-3)^3=343$ $\qquad c)\ \frac{x+3}{2x-1}-\frac{5x-1}{4x+7}=0$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas: Sol: a) –4, –3, 3 y 4; b) –1/2 y 1/2; c) –5, –2, 2 y 5

$a)\ x^4-25x^2+144=0$ $\qquad b)\ 4x^4+19x^2-5=0$ $\qquad c)\ \frac{x^2(x^2-9)}{20}+1=x^2-4$

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones bicúbicas: Sol: a) –2 y 3; b) –2 y 1; c) 1 y 2; d) 1 y 3

$a)\ x^6-19x^3=216$ $\qquad b)\ x^6+7x^3-8=0$ $\qquad c)\ x^6-9x^3+8=0$ $\qquad d)\ x^6-28x^3+27=0$

4.3.4.- Ecuaciones con producto de factores, ecuaciones factorizadas

Llamamos ecuaciones factorizadas a aquellas ecuaciones polinómicas, en las que en el primer miembro aparece el producto de diferentes factores. Son de la forma:

$$(ax+b)\cdot(bx+c)\cdots\cdots\cdot(cx+d)=0$$

Y se resuelven igualando a cero cada uno de los factores, puesto que el producto de varios factores es cero, si alguno de ellos es cero.

Ejemplo

6.- Resuelve la siguiente ecuación con factores: $(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x^2-9)=0$

Sabemos que cuando el producto de dos o más números es cero, es porque alguno de esos números es cero. En nuestro caso, y de forma similar, si el producto de dos o más factores es nulo, tiene que ser porque alguno de ellos será cero.

$$(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x^2-9)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x-1=0 \\ x+3=0 \\ x^2-9=0 \end{cases}$$

Igualamos a cero cada uno de ellos, obteniendo ecuaciones de menor grado y más fáciles de resolver:

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow x_1=1 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow x_2=-3 \\ x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm\sqrt{9} \rightarrow x_3=-3 \text{ y } x_4=+3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x^2-9)=0$ son $x_1=1$ $\quad x_2=-3$ $\quad x_3=3$

4.3.5.- Ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2, factorizables

Para resolver ecuaciones polinómicas de tercer y de cuarto grado, existen fórmulas que dan las soluciones, pero son muy complicadas. Si la ecuación es de quinto grado o mayor, no existe una fórmula general que permita calcular sus soluciones. Por ese motivo, no se utilizan habitualmente, sino que se recurre a otras técnicas.

Como las soluciones de una ecuación polinómica de la forma P(x)=0 coinciden con las raíces del polinomio, el método más empleado consiste en factorizar el polinomio e igualar a cero cada uno de los factores resultantes de la factorización. De esta forma, se consigue reducir el grado de las ecuaciones implicadas.

Ejemplo

7.- Resuelve la siguiente ecuación polinómica: $2x^4+x^3-11x^2-4x+12=0$

Se trata de una ecuación de 4° grado que vamos a resolver descomponiendo en factores mediante la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -11 & -4 & 12 \\ -2 & & -4 & 6 & 10 & -12 \\ \hline & 2 & -3 & -5 & 6 & \underline{|0} \\ 1 & & 2 & -1 & -6 & \\ \hline & 2 & -1 & -6 & \underline{|0} & \\ 2 & & 4 & 6 & & \\ \hline & 2 & 3 & \underline{|0} & & \end{array} \quad\rightarrow\quad 2x^4+x^3-11x^2-4x+12=(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(2x+3)$$

Por tanto, la ecuación queda de la forma: $2x^4+x^3-11x^2-4x+12=0 \quad\rightarrow\quad (x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(2x+3)=0$

Y cuya solución viene dada al igualar a cero cada uno de los factores:

$$(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(2x+3)=0 \quad\leftrightarrow\quad \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x_1=-2 \\ x-1=0 \rightarrow x_2=1 \\ x-2=0 \rightarrow x_3=2 \\ 2x-3=0 \rightarrow x_4=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación $2x^4+x^3-11x^2-4x+12=0$ son: −2, 1, 3/2 y 2

Piensa y practica

5.- Resuelve las siguientes ecuaciones factorizadas:	Sol: a) −2 y 2; b) −1 y 2
a) $\left(3x^2-12\right)\cdot\left(x^2-x+2\right)\cdot\left(x^2+1\right)=0$	b) $(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2+3x+4\right)=0$
6.- Resuelve las siguientes ecuaciones factorizables:	Sol: a) −1, 0, 2/3 y 1; b) −2, 0 y 2; c) −2, −1/2, 0 y 3
a) $3x^4-2x^3-3x^2+2x=0$ b) $x^6-16x^2=0$	c) $10x^4-5x^3-65x^2-30x=0$

4.04.- Ecuaciones Racionales

Las ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen fracciones algebraicas de denominador no nulo, como, por ejemplo:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{(x+2)^2}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x}$$

El método general para resolver este tipo de ecuaciones consiste en reducir todas las fracciones algebraicas a común denominador (mínimo común múltiplo de los denominadores), pudiendo así eliminarlos y transformarla en una ecuación polinómica. Una vez resuelta la ecuación, hemos de comprobar las soluciones, para rechazar posibles soluciones extrañas provenientes de la ecuación transformada, pero que no lo son de la ecuación original (en general son aquellas soluciones que anulan denominadores).

Ejemplo

8.- Resuelve la siguiente ecuación polinómica: $\frac{x}{x+1}=\frac{(x+2)^2}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x}$

Se trata de una ecuación racional, así que lo primero es calcular el m.c.m. de los denominadores para reducir a común denominador.

$m.c.m.(x+1,x)=x\cdot(x+1)$

Hecho esto, escribimos fracciones equivalentes con este nuevo denominador, utilizando la misma técnica utilizada en las fracciones numéricas:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{(x+2)^2}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x}\quad\rightarrow\quad\frac{x\cdot x}{x(x+1)}=\frac{(x+2)^2}{x(x+1)}+\frac{(x+1)\cdot(x+1)}{x(x+1)}\quad\rightarrow\quad\frac{x^2}{\cancel{x(x+1)}}=\frac{(x+2)^2}{\cancel{x(x+1)}}+\frac{(x+1)^2}{\cancel{x(x+1)}}\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad x^2=(x+2)^2+(x+1)^2\quad\rightarrow\quad x^2=x^2+4x+4+x^2+2x+1\quad\rightarrow\quad x^2+6x+5=0$$

Por tanto, la ecuación queda de la forma $x^2+6x+5=0$ que podemos resolver factorizándola:

$$x^2+6x+5=0\quad\leftrightarrow\quad(x+5)\cdot(x+1)=0\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x+5=0 & \leftrightarrow\quad x=-5\\ x+1=0 & \leftrightarrow\quad x=-1\end{cases}$$

La solución x=−1 es desechada porque anula dos de los denominadores.

Por tanto, la solución de la ecuación es x=−5.

Piensa y practica

7.- Resuelve las siguientes ecuaciones racionales: Sol: a) Identidad; b) No sol; c) 2

a) $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-2}$ b) $\frac{x+3}{x-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{26}{35}$ c) $\frac{x-3}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+x}=\frac{2-3x}{x^2-1}$

4.05.- Ecuaciones Radicales

Las **ecuaciones con radicales** son aquellas en las que la incógnita aparece en alguno de los términos bajo el signo radical, y aunque no existe un único método para resolver este tipo de ecuaciones, es muy útil tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Si la ecuación contiene un único radical cuadrático, conviene aislarlo en un miembro y elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

$$3\sqrt{6x+1}-5=2x \quad\to\quad 3\sqrt{6x+1}=2x+5 \quad\to\quad \left(3\sqrt{6x+1}\right)^2=(2x+5)^2 \quad\to\quad 9(6x+1)=4x^2+20x+25$$

- Si la ecuación contiene más de un radical cuadrático, conviene aislar uno de ellos en un miembro (el más fácil) y elevar al cuadrado, después volveremos a aislarlo y otra vez elevar al cuadrado:

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6 \quad\to\quad \sqrt{x+4}=6-\sqrt{2x-1} \quad\to\quad \left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(6-\sqrt{2x-1}\right)^2 \quad\to\quad x+4=\left(6-\sqrt{2x-1}\right)^2$$

$$\to\quad x+4=36+2x-1-12\sqrt{2x-1} \quad\to\quad x+4=35+2x-12\sqrt{2x-1} \quad\to\quad 12\sqrt{2x-1}=x+31 \quad\to$$

$$\to\quad \left(12\sqrt{2x-1}\right)^2=(x+31)^2 \quad\to\quad 144(2x-1)=x^2+62x+961$$

Y con estas recomendaciones convertimos las ecuaciones con radicales en ecuaciones polinómicas.

Ojo, al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación, se pueden introducir soluciones falsas y es, por tanto, imprescindible comprobar la veracidad de las soluciones obtenidas (que no hagan radicandos negativos).

Ejemplo

9.- Resuelve la siguiente ecuación: $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1$

Lo primero será aislar una de los radicales:

$$\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1 \quad\to\quad \sqrt{3x+1}=\sqrt{4x+5}-1$$

Después elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación y operamos:

$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=\left(\sqrt{4x+5}-1\right)^2 \quad\to\quad 3x+1=4x+5+1-2\sqrt{4x+5}$$

Agrupamos y volvemos a aislar el radical, para volver a elevar al cuadrado:

$$3x+1=4x+5+1-2\sqrt{4x+5} \quad\to\quad 2\sqrt{4x+5}=x+5 \quad\to\quad \left(2\sqrt{4x+5}\right)^2=(x+5)^2$$

Operamos y agrupamos, y llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$\left(2\sqrt{4x+5}\right)^2=(x+5)^2 \quad\to\quad 4(4x+5)=x^2+10x+25 \quad\to\quad 16x+20=x^2+10x+25 \quad\to\quad x^2-6x+5=0$$

Cuya solución es:

$$x^2-6x+5=0 \quad\to\quad (x-5)\cdot(x-1)=0 \quad\to\quad \begin{cases} x-5=0 & \to\quad x=5 \\ x-1=0 & \to\quad x=1 \end{cases}$$

Comprobamos ambas ecuaciones:

- Si x=5 $\quad\to\quad \sqrt{4\cdot5+5}-\sqrt{3\cdot5+1}=1 \quad\to\quad \sqrt{25}-\sqrt{16}=5-4=1$
- Si x=1 $\quad\to\quad \sqrt{4\cdot1+5}-\sqrt{3\cdot1+1}=1 \quad\to\quad \sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1$ son x=5 y x=1

Piensa y practica

8.- Resuelve las siguientes ecuaciones radicales: Sol: a) 13/9; b) 2; c) 5; d) 15

$a)\ \sqrt{x+4}=3-\sqrt{x-1}$ $\qquad b)\ \sqrt{2x+5}+6=3x+3$ $\qquad c)\ 2\sqrt{2x-1}=\sqrt{6x-5}+\sqrt{2x-9}$ $\qquad d)\ 1+\sqrt{x+1}=\dfrac{x}{3}$

4.06.- Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

Como vimos en la Unidad 2, para resolver las ecuaciones logarítmicas y exponenciales, es necesario conocer bien tanto las propiedades de las potencias como las de los logaritmos.

4.6.1.- Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es una ecuación en la que la incógnita, la x normalmente, aparece en el exponente de una potencia. Como, por ejemplo:

$$2^{2x-4}=64$$

Resolver una **ecuación exponencial** es encontrar el valor o valores de **x** que verifican la igualdad

Las ecuaciones exponenciales podemos resolverlas de dos maneras diferentes, según sea el caso:

Caso 1: Exponencial igualada a un número:

Para resolverla, basta con realizar las operaciones necesarias para que en ambos miembros de la igualdad tengamos la misma base, y de esta forma, poder igualar los exponentes.

Ejemplo

10.- Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$2^{2x-4}=64 \quad \to \quad 2^{2x-4}=2^6 \quad \to \quad 2x-4=6 \quad \to \quad 2x=6+10 \quad \to \quad 2x=10 \quad \to \quad x=5$$

$$2\cdot 3^{2x-5}=54 \quad \to \quad 3^{2x-5}=27 \quad \to \quad 3^{2x-5}=3^3 \quad \to \quad 2x-5=3 \quad \to \quad 2x=8 \quad \to \quad x=4$$

En este tipo de ecuaciones es conveniente verificar si la solución o soluciones son correctas.

$$2^{2x-4}=64 \quad \to \quad 2^{2\cdot 5-4}=2^6=64 \qquad ó \qquad 2\cdot 3^{2x-5}=54 \quad \to \quad 2\cdot 3^{2\cdot 4-5}=2\cdot 3^3=54 \qquad c.q.d.$$

Caso 2: Transformación a una ecuación polinómica mediante un cambio de variable:

Un cambio de variable es una técnica empleada en matemáticas para resolver algunas ecuaciones o sistemas de ecuaciones de grado superior a uno, que de otra forma sería muy complicado de resolver.

Por ejemplo, la ecuación $x^6-5x^3+6=0$, que es muy difícil de resolver, se puede transformar en otra, mucho más fácil de resolver, $z^2-5z+6=0$, simplemente haciendo el cambio de variable: $z=x^3$

Cuando nos encontremos con una ecuación exponencial compleja podemos recurrir a un cambio de variable para transformarla en una ecuación polinómica, casi siempre de segundo grado, que es de fácil resolución. Posteriormente, y esto es muy importante, se deshace el cambio de variable y se obtiene el valor de la incógnita pedida. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

11.- Resuelve la siguiente ecuación exponencial $2^{2x+1}-3\cdot 2^x+1=0$

En primer lugar, aplicamos las propiedades de las potencias necesarias para quitar las sumas o restas de los exponentes:

$$2^{2x+1}-3\cdot 2^x+1=0 \quad \to \quad 2^1\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0 \quad \to \quad 2\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x+1=0$$

Si observamos la ecuación obtenida, vemos que se parece a una ecuación de segundo grado donde la "incógnita" sería 2^x, así que hacemos el cambio de variable $2^x=Z$ y reescribimos la ecuación:

$$2\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x+1=0 \quad \to \quad \text{Si } z=2^x \quad \to \quad 2\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x+1=0 \quad \to \quad 2\cdot(z)^2-3\cdot z+1=0$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado, cuya solución es:

$$2z^2-3z+1=0 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}=\begin{cases} z_1=\dfrac{1}{2} \\ z_2=1 \end{cases}$$

Ahora si deshacemos el cambio de variable para poder calcular x:

$$\text{Si } z=2^x \quad \to \quad \begin{cases} 2^x=\dfrac{1}{2} \quad \to \quad 2^x=2^{-1} \quad \to \quad x=-1 \\ 2^x=1 \quad \to \quad 2^x=2^0 \quad \to \quad x=0 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son $x_1=-1$ y $x_2=0$.

12.- Resuelve la siguiente ecuación exponencial $2-3^{-x}+3^{x+1}=0$

Si aplicamos las propiedades de las potencias y hacemos el cambio $t=3^x$, llegamos a una ecuación de 2° grado:

$$2-3^{-x}+3^{x+1}=0 \quad\rightarrow\quad 2-\frac{1}{3^x}+3\cdot 3^x=0 \quad\rightarrow\quad \left(\text{Si } 3^x=t\right) \quad\rightarrow\quad 2-\frac{1}{t}+3t=0 \quad\rightarrow\quad 3t^2+2t-1=0$$

Cuya solución es:

$$3t^2+2t-1=0 \quad\rightarrow\quad t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm 4}{6}=\begin{cases} t_1=-1 \\ t_2=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Y deshaciendo el cambio:

$$\text{Si } t=3^x \quad\rightarrow\quad \begin{cases} 3^x=-1 \quad\rightarrow\quad \text{Sin solución} \\ 3^x=\frac{1}{3} \quad\rightarrow\quad 3^x=3^{-1} \quad\rightarrow\quad x=-1\end{cases}$$

Por lo que su solución es $x=-1$

Piensa y practica

9.- Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales: Sol: a) −7; b) −8; c) 5/6; d) 1; e) 0 y 1

a) $\sqrt{3^{x+1}}=\frac{1}{27}$ b) $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{-x}}{81}=1$ c) $\frac{2^x\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}=2$ d) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$ e) $3^x+3^{1-x}=4$

4.6.2.- Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita aparece dentro de un logaritmo.

Ejemplo de este tipo de ecuaciones es:

$$\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\cdot\log\left(5-x\right)$$

Para resolverlas hemos de tener en cuenta:

- La definición de logaritmo: $\log_a P=x \quad\Leftrightarrow\quad a^x=P \quad \text{con } P>0 \text{ y } a\in\mathbb{R}^+-\{1\}$
- Las propiedades de los logaritmos:

1) $\log_a 1=0$
2) $\log_a a=1$
3) $\log_a a^Q=Q$
4) $a^{\log_a Q}=Q$
5) $\log_a\left(P\cdot Q\right)=\log_a P+\log_a Q$
6) $\log_a\left(\frac{P}{Q}\right)=\log_a P-\log_a Q$
7) $\log_a\left(P\right)^Q=Q\cdot\log_a P$
8) $\log_a\sqrt[Q]{P}=\frac{1}{Q}\cdot\log_a P$
9) $\log_a P=\log_a Q \quad\rightarrow\quad P=Q$
10) $\log_P Q=\frac{\log_x Q}{\log_x P}$

Propiedades de los Logaritmos

- La igualdad de logaritmos: $\log_a P=\log_a Q \quad\rightarrow\quad P=Q$
- Y además tendremos que comprobar las soluciones para verificar que no tengamos logaritmos nulos o negativos ni bases negativas o iguales a 1.

Como en toda ecuación, hemos de despejar la incógnita, y para ello podemos encontrarnos con diferentes casos:

Caso 1: Aplicando la definición de logaritmo:

Ejemplo

13.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_8\left[2\left(x^3+5\right)\right]=2$

Aplicando la definición de logaritmo, legamos a:

$$\log_a b=c \Leftrightarrow \quad a^c=b \quad \rightarrow \quad \log_8\left[2\left(x^3+5\right)\right]=2 \quad \Leftrightarrow \quad 8^2=2\left(x^3+5\right)$$

Y operando:

$$8^2=2\left(x^3+5\right) \quad \rightarrow \quad 64=2\left(x^3+5\right) \quad \rightarrow \quad 32=x^3+5 \quad \rightarrow \quad x^3=27 \quad \rightarrow \quad x^3=3^3$$

Queda claro que, si dos potencias son iguales y sus exponentes también lo son, entonces sus bases también tienen que ser iguales:

$$\text{Si } x^3=3^3 \quad \rightarrow \quad x=3$$

Verificamos para asegurarnos de no realizar logaritmos nulos o negativos y claramente si x es positivo, x^3 también lo es.

Por tanto, la solución es x=3.

b) $\log_{2x+3}(81)=2$

Aplicando la definición de logaritmo, legamos a:

$$\log_a b=c \Leftrightarrow \quad a^c=b \quad \rightarrow \quad \log_{2x+3}(81)=2 \quad \rightarrow \quad (2x+3)^2=81$$

Y operando:

$$(2x+3)^2=81 \quad \rightarrow \quad 4x^2+12x+9=81 \quad \rightarrow \quad 4x^2+12x-72=0 \quad \rightarrow \quad x^2+3x-18=0$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$x^2+3x-18=0 \quad \rightarrow \quad (x+6)\cdot(x-3)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=-6 \\ x=3 \end{cases}$$

Verificamos para asegurarnos de no realizar logaritmos nulos o negativos y que las bases sean positivas y distintas de 1. Es por eso que desechamos la solución x=-6.

Por tanto, la solución es x=3.

c) $\log(2x-4)=2$

Aplicando la definición de logaritmo y operando, legamos a:

$$\log_a b=c \Leftrightarrow \quad a^c=b \quad \rightarrow \quad \log(2x-4)=2 \quad \rightarrow \quad 10^2=2x-4 \quad \rightarrow \quad 104=2x \quad \rightarrow \quad x=52$$

Solución que es válida porque no hace negativo al argumento.

Caso 2: Aplicando las propiedades de los logaritmos y finalmente la igualdad de logaritmos

Ejemplo

14.- Resuelve la siguiente ecuación logarítmica $\dfrac{\log\left(16-x^2\right)}{\log(3x-4)}=2$

Si operamos un poco llegamos a:

$$\frac{\log\left(16-x^2\right)}{\log(3x-4)}=2 \quad \rightarrow \quad \log\left(16-x^2\right)=2\cdot\log(3x-4)$$

Aplicando la propiedad de la potencia de un logaritmo:

$$\log\left(16-x^2\right)=2\cdot\log(3x-4) \quad \rightarrow \quad \log\left(16-x^2\right)=\log(3x-4)^2$$

Y si dos logaritmos son iguales, sus argumentos también lo son:

$$\text{Si } \log\left(16-x^2\right)=\log(3x-4)^2 \quad \rightarrow \quad \left(16-x^2\right)=(3x-4)^2 \quad \rightarrow \quad 16-x^2=9x^2-24x+16$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$16-x^2=9x^2-24x+16 \quad \rightarrow \quad 10x^2-24x=0 \quad \rightarrow \quad x(5x-12)=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad y \quad x=\frac{12}{5}$$

Desechamos la solución x=0 porque el logaritmo del cociente sería negativo.

Por tanto, la solución es x=12/5

15.- Resuelve la siguiente ecuación logarítmica $\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\cdot\log(5-x)$

Aplicando las propiedades de los logaritmos llegamos a:

$$\underbrace{\log 2+\log\left(11-x^2\right)}_{\text{Propiedad 5}}=\underbrace{2\cdot\log(5-x)}_{\text{Propiedad 7}} \quad\rightarrow\quad \underbrace{\log\left[2\cdot\left(11-x^2\right)\right]=\log(5-x)^2}_{\text{Propiedad 9}} \quad\rightarrow\quad \left[2\cdot\left(11-x^2\right)\right]=(5-x)^2$$

Una ecuación de segundo grado, que resolviendo:

$$22-2x^2=25-10x+x^2 \quad \xrightarrow[\text{Agrupamos}]{} \quad 3x^2-10x+3=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=3 \\ x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

No podemos olvidar que siempre hay que verificar si la solución o soluciones son correctas:

Si sustituimos x=3:

$$\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\cdot\log(5-x) \quad\rightarrow\quad \log 2+\log(11-9)=2\cdot\log(5-3) \quad\rightarrow\quad \log 2+\log 2=2\cdot\log 2 \qquad c.q.d.$$

Si sustituimos x=1/3:

$$\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\cdot\log(5-x) \quad\rightarrow\quad \log 2+\log\left(11-\frac{1}{9}\right)=2\cdot\log\left(5-\frac{1}{3}\right) \quad\rightarrow\quad \log 2+\log\left(\frac{98}{9}\right)=2\cdot\log\left(\frac{14}{3}\right)$$

$$\rightarrow\quad \log\left(2\cdot\frac{98}{9}\right)=\log\left(\frac{14}{3}\right)^2 \quad\rightarrow\quad \frac{196}{9}=\frac{196}{9} \qquad c.q.d.$$

Vemos que ambas soluciones son correctas.

Piensa y practica

10.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas: Sol: a) 3; b) 5

$a)\ \log(x+1)+\log(x)=\log(x+9)$ $\qquad b)\ \log\sqrt{x-1}=\log(x+1)-\log\sqrt{x+4}$

11.- Determina el valor de x en las siguientes expresiones: Sol: a) 3; b) 3, c) 4/3 d) 10

$a)\ \log_{2x+3}81=2$ $\qquad b)\ x+2=10^{\log 5}$ $\qquad c)\ x=\dfrac{\log 625}{\log 125}$ $\qquad d)\ \dfrac{\log(x-7)}{\log(x-1)}=0{,}5$

4.07.- Inecuaciones con una incógnita

Como ya vimos al principio del tema, una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas entre las que se encuentra uno de estos signos ≠, <, >, ≤ y ≥. Ejemplos de inecuaciones son:

$$2x-3<5 \qquad x^2-x-6>0 \qquad x(x+1)+3x>5x+6$$

La solución de una inecuación va a estar formada por todos los valores que verifican la desigualdad. Para resolverla, hay que operar hasta obtener **inecuaciones equivalentes**, es decir, aquellas que tengan la misma solución, pero respetando las propiedades de las desigualdades.

En general, la solución de una inecuación se puede expresar mediante una representación gráfica o un intervalo.

Propiedades de las desigualdades

- Si a los dos miembros de una desigualdad le sumamos o restamos un mismo número, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido.

$$2x-3<5 \quad\rightarrow\quad 2x-3+8<5+8$$

(no cambia el sentido de la desigualdad)

- Si a los dos miembros de una desigualdad lo multiplicamos o lo dividimos por un número, puede pasar que:
  - Si el número es positivo obtendremos una desigualdad del mismo sentido.

$$2x-3<5 \quad \rightarrow \quad 3\cdot(2x-3)<3\cdot 5$$

(no cambia el sentido de la desigualdad)

  - Si el número es negativo obtendremos una desigualdad de sentido contrario.

$$2x-3<5 \quad \rightarrow \quad -3\cdot(2x-3)>-3\cdot 5 \qquad \text{Si } a<b \quad \rightarrow \quad -a>-b$$

(cambia el sentido de la desigualdad)

4.7.1.- Inecuaciones de primer grado

Una inecuación de primer grado es una desigualdad entre expresiones polinómicas de grado 1 que se resuelve despejando la incógnita como se hace en las ecuaciones de primer grado.

Ejemplo

16.- Resuelve la siguiente inecuación: 2(x–3) < x+3(x+4)

Si rompemos los paréntesis y operamos un poco llegamos a:

$$2(x+3)<x+3(x+4) \quad \rightarrow \quad 2x+6<x+3x+12 \quad \rightarrow \quad 2x+6<4x+12$$

Si pasamos las x a un miembro, los números a otro y agrupamos, llegamos a:

$$2x+6<4x+12 \quad \rightarrow \quad 2x-4x<12-6 \quad \rightarrow \quad -2x<6$$

Si despejamos la incógnita:

$-2x<6$ Si multiplicamos por –1, cambia la desigualdad: $2x>-6 \quad \rightarrow \quad x>-\dfrac{6}{2} \quad \rightarrow \quad x>-3$

Por tanto, la solución escrita en forma de intervalo es:

$$x>-3 \quad \rightarrow \quad (-3,+\infty)$$

Piensa y practica

12.- Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado: Sol: a) x > 4; b) x > 9/2; c) x ≥ –5/7; d) x ≤ 128/13

a) $20<8+4(x-1)$ b) $\dfrac{4x-3}{2}>x+3$ c) $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x+3}{2}\le 2(x+1)$ d) $\dfrac{2x+2}{3}-\dfrac{5(x-8)}{4}\ge\dfrac{x}{2}$

4.7.2.- Inecuaciones de segundo grado o superior

Una inecuación de segundo grado es una desigualdad entre expresiones polinómicas de grado 2 que se resuelve factorizando el polinomio y analizando el signo del producto de sus factores en los intervalos determinados por sus raíces.

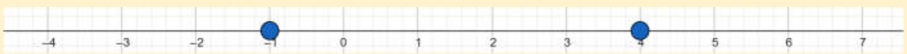
Ejemplo

17.- Resuelve la siguiente inecuación de segundo grado: $x^2 - 3x - 4 < 0$

Primero resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2-3x-4=0 \quad \rightarrow \quad (x-4)\cdot(x+1)=0 \quad \rightarrow \quad x_1=-1 \quad \text{y} \quad x_2=4$$

Después, representamos gráficamente los intervalos determinados por las soluciones en la recta real, que son (–∞,–1) (–1,4) (4,+∞)



Hecho esto, estudiaremos el signo en cada uno de ellos, para ver en cuál de ellos se verifica la desigualdad. Para ello escogeremos un valor sencillo, por ejemplo el 0, que pertenece al intervalo central (–1,4), y lo sustituimos en la desigualdad:

$$\text{Si } x=0 \quad \rightarrow \quad x^2-3x-4<0 \quad \rightarrow \quad 0^2-3\cdot 0-4<0 \quad \rightarrow \quad -4<0$$

Llegamos a –4 < 0 , que como podemos observar es cierta, por tanto, el intervalo donde está el 0 verifica la inecuación y los otros dos no.

Por tanto, la solución es el intervalo (–1,4)

En el ejemplo anterior, no es necesario comprobar los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(4,+\infty)$ porque si recordamos el funcionamiento de las funciones continuas, si en el intervalo $(-1,4)$ el dibujo está por debajo del eje, en los otros dos estará por encima y, por tanto, en ellos su valor será positivo y no verificarían la desigualdad. Lo veremos más claro con inecuaciones de grado mayor que dos.

4.7.3.- Inecuaciones de grado superior a 2.

Una inecuación de grado superior a 2 es una desigualdad entre expresiones polinómicas de grado mayor que 2 que se resuelve como en el caso anterior factorizando el polinomio y analizando el signo de los intervalos determinados por sus raíces.

Como hemos dicho ya, para resolver inecuaciones con una incógnita de grado superior a uno tenemos que:

a) Resolver la ecuación.
b) Representar gráficamente en la recta real los intervalos determinados por la solución
c) Estudiar el signo en cada una de las zonas. Para ello buscamos un número sencillo (por ejemplo, el 0) y lo sustituimos en la inecuación para ver si se verifica la igualdad en el intervalo donde esté ese número, y si es así, esa es la solución, en caso contrario, ese intervalo no será válido y serán los otros de forma alternativa (como si se deshojara una margarita... Si, no, si, no,...)

Ejemplo

18.- Resuelve la siguiente inecuación: $2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x > 0$

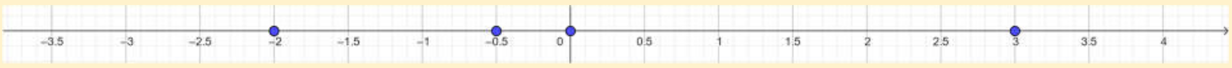
Primero resolvemos la ecuación: Sacamos factor común la x,

$$2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x = 0 \quad \to \quad x\left(2x^3 - x^2 - 13x - 6\right) = 0$$

Después mediante la regla de Ruffini factorizamos, descomponemos en producto de binomios y resolvemos:

$$x\left(2x^3 - x^2 - 13x - 6\right) = 0 \quad \to \quad x(x-3)(x+2)(2x+1) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = -1/2 \end{cases}$$

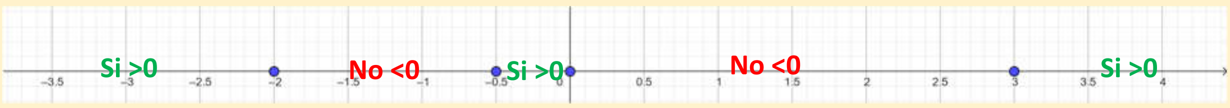
Representamos en la recta real los intervalos determinados por las soluciones: $(-\infty,-2)$, $(-2,-1/2)$, $(,-1/2\ ,\ 0)$, $(0,\ 3)$, $(3,+\infty)$



Hecho esto, estudiaremos el signo en cada uno de ellos, para ver en cuál de ellos se verifica la desigualdad. Para ello escogeremos un valor sencillo, por ejemplo el 1, (no cogemos el 0 porque es una raíz) que pertenece al intervalo (0,3), y lo sustituimos en la desigualdad:

$$\text{Si } x=1 \quad \to \quad 2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x > 0 \quad \to \quad 2\cdot1^4 - 1^3 - 13\cdot1^2 - 6\cdot1 > 0 \quad \to \quad -18 > 0$$

Llegamos a $-18 > 0$, que como podemos observar es falsa, por tanto, el intervalo donde está el 1 no verifica la inecuación y los otros serán si y no de forma alternada:



Por tanto, la solución de la inecuación es $(-\infty,-2) \cup (-1/2,0) \cup (3,+\infty)$

Piensa y practica

13.- Resuelve las siguientes inecuaciones: Sol: a) $(-\infty,3]\cup[7,+\infty)$; b) $(-3,-2)\cup(-1,0)$; c) $[-1,-1/3]\cup[1,+\infty)$; d) $[-7,2]$

a) $x^2 - 10x + 21 \geq 0$ b) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 < -6x$ c) $3x^3 + x^2 - 3x - 1 \geq 0$ d) $\dfrac{x^2-9}{5} - \dfrac{x^2-4}{15} \leq \dfrac{1-2x}{3}$

4.7.4.- Inecuaciones Racionales.

Las inecuaciones racionales (o inecuaciones con fracciones, o inecuaciones fraccionarias) son las que contienen fracciones algebraicas. Estas inecuaciones fraccionarias se pueden reducir a su forma estándar mediante transformaciones, dejando una fracción algebraica a la izquierda del signo de desigualdad y el 0 a su derecha, como, por ejemplo:

$$\frac{x-6}{x+2}<0 \qquad \frac{2x+5}{x-1}\geq 1 \;\rightarrow\; \frac{2x+5}{x-1}\geq\frac{x-1}{x-1} \;\rightarrow\; \frac{2x+5-x+1}{x-1}\geq 0 \;\rightarrow\; \frac{x+6}{x-1}\geq 0$$

Para resolver inecuaciones racionales se seguirán estos pasos:

a) Poner la inecuación fraccionaria en forma estándar (únicamente una fracción algebraica en el primer miembro y 0 en el segundo).
b) Ver qué valores del numerador lo hacen nulo.
c) La misma operación con el denominador. (Los valores que anulan el denominador nunca formarán parte del intervalo solución, porque el denominador no puede ser 0).
d) Vistos los puntos críticos, representar los resultados en un diagrama de signos.
e) Los intervalos en que se cumplan la desigualdad será la solución.

Aunque podríamos hacerlo de otra manera, y es estudiando el signo en conjunto, veamos un ejemplo:

Ejemplo

19.- Resuelve la siguiente inecuación: $\frac{x+3}{x-1}\geq 0$

Si el cociente de dos números es positivo es porque o ambos son positivos, o ambos son negativos, así que tenemos que estudiar ambas posibilidades.

$$\frac{x+3}{x-1}\geq 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x+3\geq 0 \\ x-1>0 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x+3\leq 0 \\ x-1<0 \end{cases}$$

Si el cociente es positivo o cero, es porque el numerador es mayor o igual que cero y el denominador tiene que ser positivo (nunca igual a 0, porque no se puede dividir por 0)

$$\frac{x+3}{x-1}\geq 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x+3\geq 0 & \rightarrow \quad x\geq -3 \\ x-1>0 & \rightarrow \quad x>1 \end{cases} \;\rightarrow\; x>1$$

Si el cociente es negativo o cero, es porque el numerador es menor o igual que cero y el denominador tiene que ser negativo (nunca igual a 0, porque no se puede dividir por 0)

$$\frac{x+3}{x-1}\geq 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x+3\leq 0 & \rightarrow \quad x\leq -3 \\ x-1<0 & \rightarrow \quad x<1 \end{cases} \;\rightarrow\; x\leq -3$$

Por tanto, la solución es: $(-\infty,-3] \cup (1,+\infty)$

Piensa y practica

14.- Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

Sol: a) $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$; b) $(2,3]$; c) $[0,2)$; d) $(-\infty,-2)$; e) $(-\infty,-3)\cup(-1,0]\cup[2,+\infty)$

a) $\frac{x-3}{x+1}>0$ b) $\frac{3-x}{x-2}\geq 0$ c) $\frac{x}{2-x}\geq 0$ d) $\frac{x+2}{x^2}<0$ e) $\frac{x(x-2)}{(x+1)\cdot(x+3)}\geq 0$

4.08.- Resolución de Problemas

Según **Polya** (1965), el profesor de matemáticas tiene en sus manos la llave del éxito ya que, si es capaz de estimular en los alumnos la curiosidad, podrá despertar en ellos el gusto por el pensamiento independiente; pero, si por el contrario dedica el tiempo a ejercitarles en operaciones de tipo rutinario, matará en ellos el interés.

Es necesario crear en clase un ambiente que favorezca la investigación, el descubrimiento, la búsqueda, la desinhibición – cuando se trate de plantear preguntas o dudas – , el respeto a los compañeros, las actitudes de colaboración... etc.

Más que enseñar a los alumnos a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones y, en este sentido, los propios problemas serán las "herramientas" que les llevarán a ello.

Es por ello que la resolución de problemas es considerada la parte más esencial del aprendizaje de matemáticas. Mediante la resolución de problemas, experimentareis la utilidad de las Matemáticas en el mundo que os rodea aplicando de forma práctica los conocimientos teóricos que habéis adquirido.

En general, a la hora de resolver problemas de ecuaciones o inecuaciones, seguiremos el siguiente esquema:

a) Lectura y comprensión del enunciado.
b) Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
c) Traducción del problema al lenguaje algebraico.
d) Planteamiento de la ecuación (o de la inecuación) en su caso.
e) Resolución de la ecuación (o inecuación) con precisión.
f) Evaluación e interpretación de los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución o soluciones son correctas?

1.- Un cajero hace dos pagos. En el primero da los 2/5 de lo que hay más 500 dh. En el segundo da la mitad de lo que queda más 250 dh. Al final queda en el cajero la quinta parte de lo que tenía al principio. Calcula lo que tenía el cajero al principio y los pagos que ha efectuado.

Si llamamos **x** al dinero que tenía el cajero al principio: Primer pago: $\frac{2}{5}x+500$

Quedan: $x-\left(\frac{2}{5}x+500\right)=\frac{3}{5}x-500$

Segundo pago: $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x-500\right)+250=\frac{3}{10}x-250+250=\frac{3}{10}x$

Entre los dos pagos, ha el cajero ha dado: $\frac{2}{5}x+500+\frac{3}{10}x=\frac{7}{10}x+500$

Por lo que quedan: $x-\left(\frac{7}{10}x+500\right)=\frac{3}{10}x-500$

Y esta cantidad se corresponde con la quinta parte de lo que había al principio, es decir, con $\frac{x}{5}$.

Así que, la ecuación será: $\frac{3}{10}x-500=\frac{x}{5}$, cuya solución es:

$$\frac{3x}{10}-500=\frac{x}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{3x}{10}-\frac{5000}{10}=\frac{2x}{10} \quad \rightarrow \quad 3x-5000=2x \quad \rightarrow x=5.000$$

Por tanto, en el cajero habían 5.000 dh

En el primer pago ha dado $\frac{2}{5}\cdot 5000+500=2.500$ y en el segundo $\frac{3}{10}\cdot 5000=1.500$

Así que el primer pago da 2.500 dh y en el segundo 1.500 dh.

De esta forma quedan 1.000 dh que se corresponde con la quinta parte de lo que había al principio.

2.- Un granjero, tiene en su granja, entre gallinas y conejos, 20 animales y 52 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos tiene?

Si llamamos x al número de gallinas, y $20-x$ al de conejos y vamos a plantear la ecuación con el número de patas en la granja:

$$\left.\begin{array}{l} Gallinas: x \\ Conejos: 20-x \end{array}\right\} \rightarrow 2x+4(20-x)=52 \rightarrow 2x+80-4x=52 \rightarrow 2x-4x=52-80 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2x=-28 \rightarrow x=\frac{-28}{-2} \rightarrow x=14$$

Por tanto, en la granja hay 14 gallinas y 20-14=6 conejos.

Si calculamos el total de patas, vemos que 14·2+6·4=28+24=52, coincide con el número dado en el enunciado.

4.8.1.- Problemas de Edades

En los problemas de edades se recomienda el uso de una tabla de tiempos para el planteamiento de la ecuación. En la mayoría de ellos tenemos que considerar tres tiempos: presente, pasado y futuro. Y aunque en general el establecimiento de la ecuación se hace en alguno de los tiempos, existen ejercicios un poco más complejos en los que en el planteamiento de la ecuación hemos de trabajar con varias líneas temporales.

Las relaciones entre los datos y las incógnitas se refieren siempre a éstos. Esquemáticamente:

Pasado	Presente	Futuro
Hace t años	Ahora	Dentro de t años
$x-t$	x	$x+t$
$y-t$	y	$y+t$
$z-t$	z	$z+t$

3.- La edad de mi hermana es hoy el cuadrado de la de su hija, pero dentro de nueve años solamente será el triple. ¿Qué edad tienen mi hermana y mi sobrina?

Se trata de un problema de ecuaciones, pero particularmente uno de edades, así que nos ayudaremos de una tabla en la que x será la edad de la hija.

Edades	Hoy	Dentro de 9 años
Hija	x	$x+9$
Madre	x^2	x^2+9

Ahora plantearemos la ecuación *dentro de 9 años:*

$$x^2+9=3(x+9) \rightarrow x^2+9=3x+27 \rightarrow x^2-3x-18=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-18 \end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-18)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{3\pm9}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{3+9}{2}=\frac{12}{2}=6 \\ x_2=\frac{3-9}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

Desechamos la segunda por ser negativa (las edades no pueden ser negativas) y nos quedamos con la primera.

Por tanto, la hija tiene 6 años y la madre 6^2= 36 años.

Si calculamos las edades de cada una dentro de 9 años, vemos que 6+9=15 y 36+9=45 que es el triple.

4.- La edad de una madre es actualmente el cuadrado de la de su hija, pero dentro de 24 años la edad de la madre será el doble que la de su hija ¿Cuántos años tienen ahora cada una de ellas?

Se trata de un problema de ecuaciones, pero particularmente uno de edades, así que nos ayudaremos de una tabla en la que x será la edad de la hija.

Edades	Hoy	Dentro de 24 años
Hija	x	$x+24$
Madre	x^2	x^2+24

Ahora plantearemos la ecuación *dentro de 24 años:*

$$x^2+24=2(x+24) \rightarrow x^2+24=2x+48 \rightarrow x^2-2x-24=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-24 \end{cases}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-24)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{2\pm10}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{2+10}{2}=\frac{12}{2}=6 \\ x_2=\frac{2-10}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \end{cases}$$

Desechamos la segunda por ser negativa (las edades no pueden ser negativas) y nos quedamos con la primera.

Por tanto, la hija tiene 6 años y la madre 6^2= 36 años.

Si calculamos las edades de cada una dentro de 24 años, vemos que 6+24=30 y 36+24=60 que es el doble.

5.- ¿Cuál es la edad de Mohamed, si al multiplicarla por 15 le faltan 100 años para completar su cuadrado?

Si llamamos x a la edad de Mohamed, cuando la multiplicamos por 15, será 15x, y si dice que le faltan 100 años para completar su cuadrado, esto quiere decir que si a 15x le sumo 100 tendré el cuadrado de la edad de Mohamed, por tanto, con todo esto ya puedo escribir la ecuación.

$$15x+100=x^2$$

Si transponemos todo al segundo miembro, ya tenemos la ecuación preparada para resolverla:

$$15x+100=x^2 \rightarrow x^2-15x-100=0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{15\pm\sqrt{15^2-4\cdot1\cdot(-100)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225+400}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{625}}{2\cdot1}=\frac{15\pm25}{2}$$

$$x_1=\frac{15+25}{2}=\frac{40}{2}=20 \qquad x_2=\frac{15-25}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

Desechamos la solución -5 porque las edades no pueden ser negativas.

La edad de Mohamed es de 20 años.

4.8.2.- Problemas de Mezclas

Existen algunos tipos de problemas que es conveniente estudiar a parte. Los problemas de mezclas son excelentes candidatos para ser resueltos con ecuaciones. Estos problemas se dan en muchas situaciones, como, por ejemplo, cuando mezclamos artículos de distintos precios y en distintas cantidades, y queremos averiguar cuál debería ser el precio de dicha mezcla.

O cuando se combinan disoluciones en un laboratorio de química o cuando se añaden ingredientes a una receta de cocina. Las mezclas (y problemas de mezclas) se forman cuando diferentes tipos de elementos se combinan para crear un tercer objeto "mezclado".

Para resolver este tipo de problemas es muy conveniente *ayudarse de una tabla* similar a la siguiente en la que aparecerán las cosas que se mezclan, la mezcla en sí y la cantidad y el precio de cada una.

	Cantidad	Precio	Total
Cosa 1			
Cosa 2			
Mezcla			

Vamos a escribir una ecuación en la que aparecerán en un término la suma de los totales da cada una de las cosas a mezclar y en el otro el total de la mezcla.

$$\boxed{Total_{\text{Cosa 1}} + Total_{\text{Cosa 2}} = Total_{mezcla}}$$

En ella cada uno de los totales se calculará multiplicando la cantidad por el precio.

6.- Un Químico tiene dos disoluciones de ácido clorhídrico, una con una concentración de 40% en volumen y la otra del 75%. ¿Cuántos cm^3 de cada una de ellas debe utilizar para preparar otra disolución de 60 cm^3 con una concentración del 50% en volumen?

Se trata de un problema de mezclas, así que nos ayudaremos de una tabla en la que x será el volumen de la 1ª disolución.

	Volumen (cm^3)	Concentración (%)	Total
Disolución 1	*x*	*40*	*40x*
Disolución 2	*60-x*	*75*	*75·(60-x)*
Disolución Mix	*60*	*50*	*3.000*

Una vez completa la tabla, planteamos la ecuación recordando que el total de la mezcla era igual a la suma de los totales de cada una de las partes por separado:

$$40x + 75\cdot(60 - x) = 3000 \quad \rightarrow \quad 40x + 4.500 - 75x = 3000 \quad \rightarrow \quad 40x - 75x = 3000 - 4500 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -35x = -1500 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-1500}{35} \quad \rightarrow \quad x = 42{,}86\ cm^3$$

Para preparar la disolución pedida, necesitamos 42,86 cm^3 de ácido al 40 % con 17,14 cm^3 del de 75%.

4,8.3.- Problemas de grifos

Otro caso interesante de problemas que es conveniente de estudiar a parte, es el del problema de grifos.

En el enunciado de este tipo de problemas se presentan siempre una serie de "sujetos" que realizan labores que se pueden acumular (grifos que llenan un depósito; máquinas que realizan un mismo trabajo; obreros que realizan una obra, etc ...).

Los datos e incógnitas siempre se refieren a los tiempos que cada uno por separado o todos juntos realizan dicha labor. El "truco" para plantear el problema radica en considerar la parte de la labor que realiza, en cada unidad de tiempo, cada "sujeto" y todos juntos; la parte que realizan todos juntos es la suma de la parte de labor que realiza cada uno de los sujetos.

Supongamos que tenemos dos grifos para llenar un depósito:

El grifo 1 tarda t_1 horas en llenarlo, en una hora habrá llenado: $1 / t_1$

El grifo 2 tarda t_2 horas en llenarlo, en una hora habrá llenado: $1 / t_2$

Si el depósito tiene un desagüe:

El desagüe tarda t_3 horas en vaciarlo, en una hora vaciará: $1 / t_3$

Si todos juntos tardan en llenarlo X horas, en una hora llenarán: 1/T

Para calcular alguna de las variables, procederemos de la siguiente forma:

$$\underbrace{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{x}}_{\text{Sin desagüe}} \qquad \underbrace{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3}=\frac{1}{x}}_{\text{Con desagüe}}$$

7.- Cuando dos bombas de agua actúan a la vez, tardan en vaciar un pozo 15 horas. Si actuara solo una, tardaría en vaciarlo 16 horas más que si actuara la otra. ¿Cuánto tardarían en vaciarlo cada una por separado?

Si llamamos x al tiempo (en horas) que tardaría una de las bombas, entonces la otra tardaría 16+x horas.

Para plantear la ecuación, nos fijamos en cuanto depósito se vacía en una hora con cada una de las bombas o con las dos:

$$\left.\begin{array}{l} Bomba\ 1: x \\ Bomba\ 2: x+16 \\ Las\ dos: 15 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{En 1 hora vaciaran:}} \left.\begin{array}{l} Bomba\ 1: \dfrac{1}{x} \\ Bomba\ 2: \dfrac{1}{x+16} \\ Las\ dos: \dfrac{1}{15} \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{\text{Será igual a la suma de lo que}\\ \text{haga cada una pors eparado}\\ \text{también en 1 hora}}]{\substack{\text{Lo que hagan las dos bombas}\\ \text{a la vez en 1 hora}}} \frac{1}{x}+\frac{1}{x+16}=\frac{1}{15} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{15(x+16)}{\cancel{x\cdot(x+16)\cdot 15}}+\frac{15x}{\cancel{x\cdot(x+16)\cdot 15}}=\frac{x(x+16)}{\cancel{x\cdot(x+16)\cdot 15}} \rightarrow 15x+240+15x=x^2+16x \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2+16x-30x-240=0 \rightarrow x^2-14x-240=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-14 \\ c=-240 \end{cases} \leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\rightarrow x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot(-240)}}{2\cdot 1}=\frac{14\pm\sqrt{196+960}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{1156}}{2}=\frac{14\pm 34}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{14+34}{2}=\dfrac{48}{2}=24 \\ x_2=\dfrac{14-34}{2}=\dfrac{-20}{2}=-10 \end{cases}$$

Desechamos la segunda por ser negativa (los tiempos no pueden ser negativos) y nos quedamos con la primera.

Por tanto, una bomba es capaz de vaciar el depósito en 24 horas y la otra en 24+16=40 horas.

8.- Se poseen dos cirios de igual altura que se encienden simultáneamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo la altura del primero será el doble del segundo, si se sabe que se consumen, el primero en 6 horas y el segundo en 4 horas?

Si llamamos x al tiempo que pasa hasta que la altura del primero sea el doble que la del segundo.

- Si el primero se consume en 6 horas, en 1 hora se consumirá: 1/6, y en x horas lo hará x/6.
- Si el segundo se consume en 4 horas, en 1 hora se consumirá: 1/4, y en x horas lo hará x/4.

Cuando pasen x horas, la altura del primero (1–x/6) será igual que el doble de la altura del segundo (1–x/4):

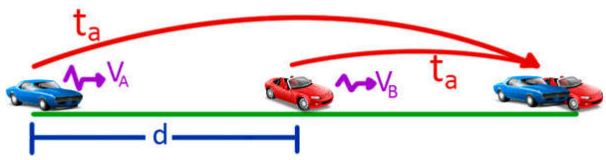
$$\left(1-\frac{x}{6}\right)=2\left(1-\frac{x}{4}\right) \rightarrow 1-\frac{x}{6}=2-\frac{x}{2} \rightarrow x=3$$

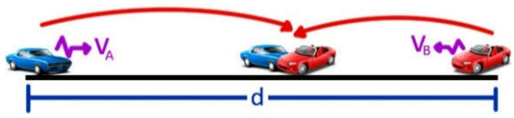
Por tanto, han de pasar 3 horas.

4.8.4.- Problemas de Móviles

Además de los problemas de mezclas, existen otro tipo de problemas que también es conveniente estudiar por separado, el de móviles o alcances. Se trata de problemas donde un móvil va en busca de otro y tenemos que calcular donde se encuentran.

Como ya sabrás por la asignatura de Física y Química, la velocidad, el espacio y el tiempo son tres magnitudes físicas relacionadas entre sí. Llamaremos v a la velocidad, s al espacio y t al tiempo.





Consideraremos que los móviles se mueven en línea recta y a velocidad constante en todo el trayecto que estén llevando a cabo (esto es lo que se llama movimiento rectilíneo y uniforme M.R.U.).

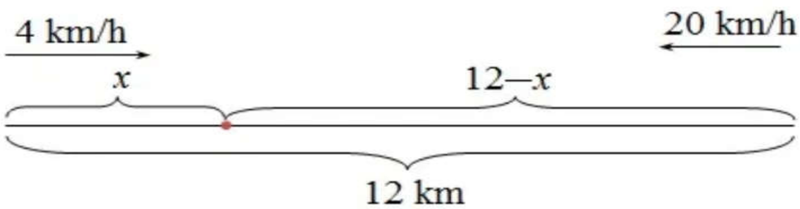
Velocidad	Tiempo	Espacio
La velocidad del móvil es la razón entre el espacio y el tiempo	*El tiempo empleado es la razón entre el espacio y la velocidad*	*El espacio recorrido es la velocidad multiplicada por el tiempo*
$v = \frac{s}{t}$	$t = \frac{s}{v}$	$s = v \cdot t$
Ejemplo:	**Ejemplo:**	**Ejemplo:**
Por ejemplo, si recorro 200 km. en 5 h. la velocidad es: $v = \frac{s}{t} = \frac{200\ km}{5\ h} = 40\ \frac{km}{h}$	Por ejemplo, si se recorren 360 km. a 90 km/h., el tiempo empleado es: $t = \frac{s}{v} = \frac{360km}{90\ km/h} = 4\ h$	Por ejemplo, si durante dos horas y media (2,5 h.), un móvil va a una velocidad de 80 km/h., el espacio recorrido es: $s = v \cdot t = 80\ \frac{km}{h} \cdot 2{,}5h = 200\ km$

Observa que:

- El espacio s y la velocidad v son magnitudes directamente proporcionales (a más velocidad, más espacio recorrido).
- El tiempo t y la velocidad v son magnitudes inversamente proporcionales (a más velocidad, menos tiempo se tarda en recorrer un determinado espacio).
- El espacio s y el tiempo t son magnitudes directamente proporcionales (a más espacio, más tiempo tardaremos en recorrerlo).

9.- Un caminante y un ciclista marchan por la misma vía. El caminante lleva una velocidad de 4 km/h. y el ciclista de 20 km/h. Si parten al mismo tiempo, desde puntos opuestos que distan entre sí 12 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse? ¿Qué espacio habrá recorrido cada uno?

Si hacemos un pequeño croquis con los datos del problema:



Donde hemos llamado x a la distancia recorrida por el caminante desde el punto de partida al punto de encuentro (marcado con un punto rojo). Entonces la distancia recorrida por el ciclista hasta el punto de encuentro será 12–x, pues la distancia original que separa a ambos era de 12 km. Además, ha pasado el mismo tiempo t cuando llegan al punto de encuentro pues ambos partieron al mismo tiempo. Entonces, como t=s/v, podemos establecer una proporción entre el espacio recorrido y la velocidad tanto del caminante como del ciclista:

$$\frac{x}{4}=\frac{12-x}{20} \quad\rightarrow\quad 20x=4(12-x) \quad\rightarrow\quad 20x=48-4x \quad\rightarrow\quad 20x+4x=48 \quad\rightarrow\quad 24x=48$$

$$x=\frac{48}{24} \quad\rightarrow\quad x=2$$

Esto quiere decir que el caminante habrá recorrido x=2 km., y el ciclista *12–x=12–2=10* km.

El tiempo empleado es $t=\frac{s}{v}=\frac{2km}{4\frac{km}{h}}=0,5\ horas$ (media hora).

Donde hemos empleado en la fórmula el espacio y velocidad del caminante, pero si se emplea la del ciclista:

$t=\frac{s}{v}=\frac{10km}{20\frac{km}{h}}=0,5\ horas$, podemos ver que el resultado es el mismo:

Por tanto, tardarían 1/2 hora en encontrarse, el ciclista recorre 10 km y el caminante 2.

4.8.5.- Problemas de Inecuaciones

Este tipo de problemas se resuelven prácticamente igual que los de ecuaciones, aunque en este caso la solución no será un solo número, sino que será un conjunto de números que expresaremos mediante intervalos.

10.– ¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su cuadrado en 10 o más unidades?

Si llamamos x al número, ya podemos escribir la inecuación: $3x-x^2\geq 10$, cuya solución pasa por escribirla con todos los miembros a un lado:

$$3x-x^2\geq 10 \quad\rightarrow\quad 3x-x^2-10\geq 0 \quad\rightarrow\quad x^2-3x+10\leq 0$$

Y después resolvemos la ecuación para encontrar los puntos que representaremos en la recta real y originará los intervalos:

$$x^2-3x+10=0 \quad\rightarrow\quad \Delta=b^2-4ac=9-4\cdot 1\cdot 10=9-40=-31<0 \quad\rightarrow\quad \text{No tiene solución}$$

Por tanto, no existe ningún número que exceda en 10 o más a su cuadrado.

11.– La suma de la mitad y de la cuarta parte de un número es más pequeña o igual que el triple del resultado de ese número menos seis unidades. Encuentra dicho o dichos números.

Si llamamos x al número, su mitad será $\frac{x}{2}$, su cuarta parte $\frac{x}{4}$ y su triple 3x. Con todo esto podemos escribir la inecuación: $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\leq 3(x-6)$ cuya solución es:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\leq 3(x-6) \quad\rightarrow\quad \frac{2x+x}{\cancel{4}}\leq\frac{12(x-6)}{\cancel{4}} \quad\rightarrow\quad 3x\leq 12(x-6) \quad\rightarrow\quad 3x\leq 12x-72 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad 3x-12x\leq -72 \quad\rightarrow\quad -9x\leq -72 \quad\rightarrow\quad 9x\geq 72 \quad\rightarrow\quad x\geq\frac{72}{9} \quad\rightarrow\quad x\geq 8$$

Por lo que dichos números son los números mayores o iguales que 8. $[8,+\infty)$

12.- Un club de tenis cobra a sus socios una cuota mensual de 36 euros, la cual les da derecho a disfrutar de las instalaciones y jugar al tenis tantas horas al mes como deseen. Un jugador que no sea socio tiene que pagar 4,50 €/h por utilizar las instalaciones. ¿Cuántas horas mensuales tendrá que jugar una persona para que le salga más rentable hacerse socia del club?

Si llamamos x al número de horas mensuales que hay que jugar, 4,5 x será el dinero que pagaremos mensualmente. Y como queremos que esta cantidad sea mayor que los 36 € que se pagan por abonarse, podemos plantear la siguiente inecuación:

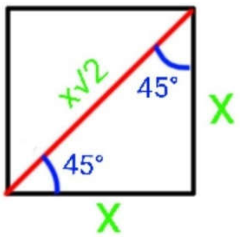
$$4{,}5x \geq 36$$

Cuya solución es:

$$4{,}5x \geq 36 \quad \rightarrow \quad x \geq \frac{36}{4{,}5} \quad \rightarrow \quad x \geq 8 \text{ horas}$$

Por tanto, para que sea más rentable hacerse socio hay que jugar al tenis como mínimo 8 horas cada mes.

13.- Si el área de un cuadrado es menor o igual que 64 centímetros cuadrados, calcula los posibles valores de su diagonal.



En un cuadrado de lado x, el área viene dada por la expresión $A=x^2$, y su diagonal se puede calcular mediante el Teorema de Pitágoras:

$$x^2+x^2=d^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2=d^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2x^2}=\sqrt{d^2} \quad \rightarrow \quad x\sqrt{2}=d$$

Pues bien, si su área es menor o igual que 64, podemos plantear la inecuación:

$$A \leq 64 \quad \rightarrow \quad x^2 \leq 64$$

Inecuación cuya solución es:

$$x^2 \leq 64 \quad \rightarrow \quad x \leq 8 \quad \rightarrow$$ Por tanto, el lado del cuadrado será menor que 8,

Y su diagonal: $d = x\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad d \leq 8\sqrt{2} \quad \rightarrow$ Su diagonal será menor que $8\sqrt{2}$

Luego si la longitud de su lado pertenece al intervalo (0,8], su diagonal estará en el $\left(0, 8\sqrt{2}\right]$

14.- En una clase hay en total 40 alumnos. En un examen de Matemáticas resulta que el triple de aprobados es mayor que el doble de suspensos. ¿Cuál es el menor número de aprobados posible?

Si llamamos **x** al número de aprobados, **40 – x** será el número de suspensos. Si el triple de aprobados es mayor que el doble de suspensos, con esto ya podemos plantear la siguiente inecuación:

$$3x > 2(40-x)$$

Cuya solución es:

$$3x > 2(40-x) \quad \rightarrow \quad 3x > 80-2x \quad \rightarrow \quad 3x+2x > 80 \quad \rightarrow \quad 5x > 80 \quad \rightarrow \quad x > \frac{80}{5} \qquad x > 16$$

Por tanto, el menor número de aprobados posible es de 17.

4.09.- Autoevaluación

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{x-1}{6}-\dfrac{x}{4}$

b) $\dfrac{x^2-2x+1}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{3}{2x}$

c) $\dfrac{1}{2}\left[1-(x+2)^2\right]=-x-\dfrac{x^2-1}{2}$

d) $(x+4)^3-(x-3)^3=343$

e) $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(2x-1)^2}{16}=\dfrac{35}{16}$

f) $\dfrac{x^2\cdot(x^2-9)}{20}+1=x^2-4$

g) $x^6+55x^3-576=0$

h) $x^4-11x^3-+41x^2-61x+30=0$

i) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-2}$

j) $\dfrac{3}{x+\dfrac{1}{2+\dfrac{x+1}{x-2}}}=\dfrac{1}{x}$

k) $3\sqrt{6x+1}-5=2x$

l) $\sqrt{3x+10}=1+\sqrt{3x+3}$

m) $\log x+\log(x+1)=\log 6$

n) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0$

ñ) $32x^{10}-31x^5-1=0$

2.- Los lados de un triángulo miden 18, 16 y 9 cm. Si restamos la misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo. ¿Qué cantidad es esa?

3.- En una papelería, el precio de una copia en color es 0,75 € y el de una en blanco y negro es 0,20 €. En una semana, el número de copias en color fue la décima parte que en blanco y negro y se recaudaron 110 €. Calcula cuántas copias se hicieron de cada tipo.

4.- Se mezclan 8 litros de aceite de 4 €/l con otro más barato para obtener 20 l a 2,50 €/l. ¿Cuál es el precio del aceite barato?

5.- Tres albañiles construyen un muro: el primero puede construir 8 metros cúbicos en 5 días; el segundo, 9 metros cúbicos en 4 días, y el tercero, 10 metros cúbicos en 6 días. ¿Cuánto tiempo necesitarán, en estas condiciones, para construir 1.324 metros cúbicos, trabajando todos juntos?

6.- Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos a la vez, tardan 8 horas. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en llenarlo?

7.- Una moto hace un recorrido de A a B en 2h 40m; y al volver de B a A, aumenta la velocidad en 20 km/h y tarda 2 horas. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

8.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{3x-1}{6}\leq x+\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{x+2}{3}$

b) $3(x-5)^2-12\geq 0$

c) $\dfrac{x^2-9}{5}-\dfrac{x^2-4}{15}\leq\dfrac{1-2x}{3}$

d) $(2x+4)^3>0$

e) $\dfrac{3-x}{x-2}\geq 0$ f) $\dfrac{x(x-2)}{(x+1)\cdot(x+3)}\geq 0$

g) $-10x^3+52x^2-70x+12\geq 0$

h) $\log_3\left(3^x+8\right)>2$

9.- Halla la condición que tienen que verificar los coeficientes de la ecuación $8x^2-(m-1)x+m-7=0$ para que tenga raíces reales.

10.- Una editorial ofrece a un comercial dos tipos de contrato anuales: **a)** 25.000 € fijos más un 10 % por cada libro; o **b)** El 30 % de cada libro vendido. Si cada libro cuesta 35 €, ¿Cuántos libros ha de vender como mínimo para que la opción B sea más beneficiosa?

11.- Para comprar un regalo, Emilia ha ido reuniendo monedas de 1 euro y de 2 euros, juntando en total 20 monedas. Si el precio del regalo es menor que 36 euros, ¿cuántas monedas de 2 € puede tener como máximo?

12.- La suma de la mitad y de la cuarta parte de un número es más pequeña o igual que el triple del resultado de este número menos seis unidades. Encuentra la solución de esta inecuación.