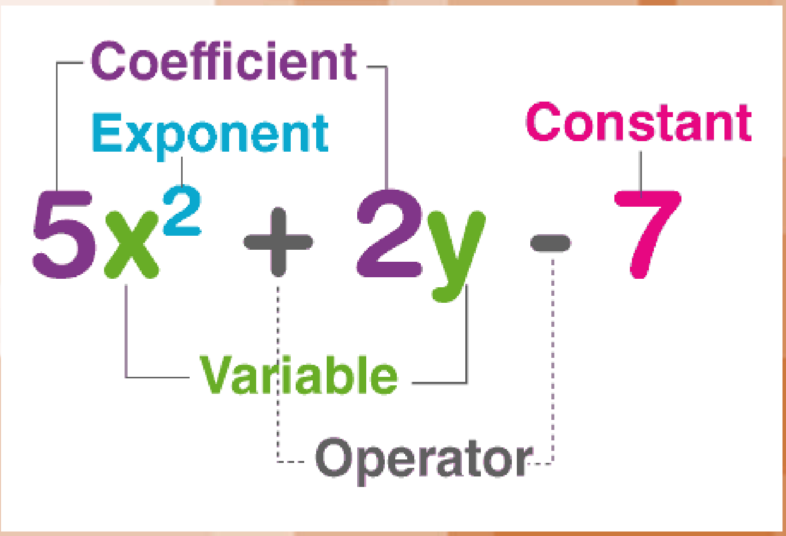
Unidad Didáctica 3

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

4º ESO



En esta unidad vas a:

1. **Manipular expresiones algebraicas, reconocer sus elementos, y calcular el valor numérico.**
2. **Expresar situaciones problemáticas a través del lenguaje algebraico.**
3. **Operar y simplificar monomios, polinomios y fracciones algebraicas.**
4. **Sacar factor común en expresiones algebraicas.**
5. **Manejar con soltura las identidades notables.**
6. **Utilizar la regla de Ruffini para simplificar determinados cocientes.**
7. **Identificar las raíces de un polinomio y factorizarlo en factores irreducibles.**
8. **Conocer y comprender el teorema del resto y del teorema del factor.**
9. **Aplicar los teoremas a la determinación de raíces y factorización de polinomios.**

Generalizar, demostrar y resolver problemas utilizando monomios, polinomios y fracciones algebraicas.

SUMARIO

3.00.- Lectura Comprensiva

Un hombre de principios

Días negros y noches largas, estas últimas semanas habían sido especialmente difíciles para Paolo Ruffini. Mientras caminaba en dirección a su casa, pensaba en lo duro que había sido tomar la decisión de no jurar fidelidad a la bandera de los invasores franceses. Un golpecito en el hombro y la voz amiga de Luigi lo devolvieron a la realidad:

–¡Paolo! ¿Qué has hecho? En la universidad no se comenta otra cosa. El responsable político ha asegurado que nunca volverás a sentarte en tu cátedra y que has marcado tu destino; se le veía terriblemente enfadado.

–Lo pensé durante mucho tiempo y cuando comuniqué mi decisión me he sentido aliviado –argumentó Ruffini, plenamente convencido.

–Pero ¿no has pensado en tu familia o en tu posición? –Luigi mostró la preocupación que parecía haber abandonado a Ruffini.

–Luigi, ¿cuánto darías por un puesto de funcionario? –Estaban llegando al mercado y Ruffini se paró en seco–. Yo no estoy dispuesto a pagar tanto por la cátedra; si hiciera el juramento, habría traicionado mis principios y mutilado mi alma, mantendría mi cátedra pero el Paolo Ruffini que conoces habría muerto.

-Me niego a jurar lealtad a Napoleón Bonaparte- Dijo muy enfadado

Ruffini se dedicó por entero a su oficio de médico en los años en que estuvo alejado de la docencia, puesto que 11 años después fue readmitido en la Universidad de Módena donde en 1914 fue nombrado Rector.

<u>Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:</u>

1.- ¿De qué trata el texto?

2.- ¿Qué te parece la historia?

3.- ¿Qué hubieras hecho tú en su lugar?

3.01.- Introducción

Al Khwarizmi (siglo IX d.C.), considerado uno de los «padres del álgebra»

Álgebra, del árabe: الجبر *al-ŷabr,* es el nombre que identifica a una rama de la Matemática que emplea números, letras y signos para poder hacer referencia a múltiples operaciones aritméticas.

La palabra álgebra proviene del título de un libro *Al-jabr w'al-muqabalah,* escrito en Bagdad alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo *Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi,* que muestra en sus trabajos la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

El álgebra comienza en realidad cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las "operaciones" que se pueden hacer con cualquier cifra, más que por los mismos números.

Según Aristóteles, las matemáticas se originaron hacia el año 2000 a.C. porque la clase sacerdotal de Egipto tenía mucho tiempo para dedicarse al estudio. Esta afirmación pudo comprobarse casi 2000 años más tarde cuando fue descubierto un papiro que actualmente se conserva en la colección Rhind del Museo Británico. Este documento, escrito por el sacerdote Ahmes, se titula: **"Orientaciones para conocer todas las cosas oscuras"** y contiene una colección de problemas de aritmética, álgebra y geometría.

Los problemas algebraicos contenidos en el Papiro de Rhind no se refieren a objetos concretos y específicos como pan y cerveza, si tampoco piden el resultado de operaciones con números conocidos, sino que piden lo equivalente a resolver ecuaciones lineales de la forma $x+ax=b$ ó $x+ax+bx=c$, donde a, b y c son números conocidos y x es desconocido; a este número desconocido o incógnita se le llamaba "aha" o montón.

Desde entonces hasta finales de la edad media, el álgebra se caracterizó por la invención de símbolos y la resolución de ecuaciones sencillas. Hubo que esperar a la Edad Moderna para que los franceses *Vieta* (siglo XVI) y *Descartes* (siglo XVII) dotaran al álgebra de un lenguaje definitivamente simbólico, prácticamente igual al que usamos en la actualidad

Gracias a ellos, hoy entendemos como ***álgebra*** al área matemática que se centra en las relaciones, estructuras y cantidades. La disciplina que se conoce como álgebra elemental, en este marco, sirve para llevar a cabo operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) pero que, a diferencia de la aritmética, se vale de símbolos (a, x, y) en lugar de utilizar números. Esto permite formular leyes generales y hacer referencia a números desconocidos (incógnitas), lo que posibilita el desarrollo de ecuaciones y el análisis correspondiente a su resolución.

El álgebra abstracta se desarrolló en el siglo XIX, inicialmente centrada en lo que hoy se conoce como **teoría de Galois** y en temas de la constructibilidad. Los trabajos de Gauss generalizaron numerosas estructuras algebraicas. La búsqueda de una fundamentación matemática rigurosa y una clasificación de los diferentes tipos de construcciones matemáticas llevó a crear áreas del álgebra abstracta durante el siglo XIX absolutamente independientes de nociones aritméticas o geométricas (algo que no había sucedido con el álgebra de los siglos anteriores).

3.02.- Expresiones algebraicas. El Lenguaje Algebráico

Toda expresión en la que aparecen números y letras relacionados entre sí con operaciones aritméticas recibe la denominación de expresión algebraica, y al conjunto de éstas, junto con las reglas de uso de sus elementos, es a lo que se conoce como lenguaje algebraico. Según el contexto, las letras de una expresión algebraica pueden recibir, entre otros, los nombres de variables, indeterminadas, parámetros e incógnitas.

Aunque no lo creas, estamos rodeados de expresiones algebraicas, como, por ejemplo:

Área de un círculo	Molaridad de una disolución	El volumen de una esfera
$A = \pi \cdot R^2$	$M = \frac{n}{V}$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

El lenguaje algebraico es una forma de traducir a símbolos y números lo que normalmente tomamos como expresiones particulares. De esta forma, se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir, lo que permite simplificar teoremas, formular ecuaciones e inecuaciones e incluso estudiar su resolución.

Este lenguaje nos ayuda a plantear y resolver problemas matemáticos de forma general.

Las expresiones algebraicas surgen al traducir a lenguaje matemático situaciones o enunciados de la vida cotidiana, en los que aparecen datos indeterminados o desconocidos que representamos mediante letras, como por ejemplo los de la tabla siguiente:

Enunciado	Expresión algebraica
La suma de dos números	a + b
La diferencia de dos números	x–y
El cociente de dos números	x/y

Enunciado	Expresión algebraica
El doble de un número	2x
El doble de la suma de dos números	2(a+b)
La mitad del siguiente de un número	(x+1)/2

Piensa y practica

1.- Si representamos la edad de María con x, escribe en lenguaje algebraico:

Enunciado	Expresión Algebraica
La edad que tendrá María dentro de tres años	
La edad que tendrá María dentro de quince años	
La edad que tenía María hace siete años	
El doble de la edad de María	
La mitad de su edad aumentada en treinta años	
La suma de las edades de María y la de su madre, que es el triple de la suya	
La suma de las edades de María y de su hermano, que es la mitad de la de María	

3.03.- Expresiones algebraicas: Monomios y Polinomios

- Un monomio es el producto de un número por una o varias letras, donde el número (incluido su signo) es a lo que llamamos coeficiente y a las letras parte literal.

$$\text{coeficiente} \rightarrow 4x^2tz^3 \leftarrow \text{parte literal}$$

Llamamos grado de un monomio al número de factores que forman la parte literal, o lo que es lo mimo, al número de letras de la parte literal.

$$\text{parte literal} \rightarrow x^2tz^3 = \underbrace{x \cdot x \cdot t \cdot z \cdot z \cdot z}_{\text{dos x, una t y tres z son 6 letras}} \rightarrow \text{grado}=6$$

Decimos que dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal, es decir, si tienen las mismas letras aunque estas estén desordenadas.

$$4x^2z^3 \qquad -3x^2z^3 \qquad x^2z^3 \qquad 5xz^3x \qquad 7z^3x^2 \qquad 8zxzxz$$

Todos estos monomios son semejantes porque tienen 2 equis y 3 zetas.

Un polinomio es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios no semejantes:

$$3x^2+2x^2=5x^2 \quad \rightarrow \quad Monomio \qquad\qquad 3x^2+2x=3x^2+2x \quad \rightarrow \quad Polinomio$$

Para denominar polinomios utilizaremos las letras mayúsculas P, Q, R, S… e indicaremos entre paréntesis las variables algebraicas de las que depende, como por ejemplo:

$$P(x)=3x^2+2x+5 \qquad\qquad Q(x,y)=3x^3+2y^2-3x^2y$$

A cada uno de los monomios que forman un polinomio se les llama **términos**, y si no tienen parte literal, se les llama **término independiente.**

$$P(x)=\underbrace{4x^3}_{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 3}}}+\underbrace{3x^2}_{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 2}}}-\underbrace{2x}_{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 1}}}+\underbrace{5}_{\substack{\text{Término}\\ \text{independiente}}}$$

- Un polinomio formado por dos términos recibe el nombre de **binomio.** $B(x)=3x^2+5$
- Un polinomio formado por tres términos recibe el nombre de **trinomio.** $B(x)=2x^2+3x-7$

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. En el polinomio siguiente, el grado será 3, porque está formado por 4 monomios y el de mayor grado es el de grado 3.

$$P(x)=\underset{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 3}}}{4x^3}+\underset{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 2}}}{3x^2}-\underset{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 1}}}{2x}+\underset{\substack{\text{Término}\\ \text{independiente}}}{5} \quad \rightarrow \quad \text{grado}(P)=3$$

El coeficiente principal de un polinomio, es el coeficiente del monomio de mayor grado, 4 en el ejemplo anterior.

Decimos que un polinomio es completo si contiene todos los grados consecutivos, desde el mayor hasta el menor, en caso contrario sería incompleto.

$$P(x)=\underbrace{8x^4+3x^2+2x+5}_{\text{Incompleto, falta término de grado 3}} \qquad\qquad Q(x)=\underbrace{3x^3+2x^2-4x+5}_{\text{Completo}}$$

Llamamos valor numérico de un polinomio P(x) para x=a, P(a), al número que se obtiene al cambiar **x** por el número a, y realizar las operaciones indicadas.

$$P(x)=3x^2+2x+5 \begin{cases} P(-1)=3(-1)^2+2(-1)+5=3\cdot1-2+5=3-2+5=6 \\ P(2)=3(2)^2+2(2)+5=3\cdot4+4+5=12+4+5=21 \end{cases}$$

Cuando para un determinado x=a, obtenemos como valor numérico de un polonomio P(x) el valor 0, decimos que a es una raíz del polinomio P(x).

$$P(x)=x^2-4 \begin{cases} P(-2)=(-2)^2-4=4-4=0 \quad \rightarrow \quad -2 \text{ es raíz de } P(x) \\ P(2)=(2)^2-4=4-4=0 \quad \rightarrow \quad 2 \text{ es raíz de } P(x) \end{cases}$$

Un número cualquiera x=a es raíz de un polinomio P(x), cero de un polinomio, cuando el valor numérico de dicho polinomio para x=a es nulo.

x=a es raíz de P(x) si y solo si P(a)=0

3.04.- Operaciones con Polinomios

Las operaciones con polinomios, se realizan monomio a monomio, respetando la jerarquía y las propiedades de las operaciones con números reales, así como las propiedades de las potencias.

3.4.1.- Suma y resta de polinomios

Para sumar (o restar) polinomios, sumaremos (o restaremos) los monomios semejantes que los componen y daremos el resultado en orden decreciente en grado.

Podemos poner uno encima de otro como vemos a la derecha, pero es preferible hacerlo en línea.

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & +0 & -3x^2 & +x & +1 \\ + & & x^3 & -x^2 & +5x & -2 \\ \hline & x^4 & x^3 & -4x^2 & +6x & -1 \end{array}$$

$$\left(x^4-3x^2+x+1\right)+\left(x^3-x^2+5x-2\right)=x^4-3x^2+x+1+x^3-x^2+5x-2=x^4+x^3-4x^2+6x-1$$

Para restar dos polinomios, se suma el primero con el opuesto del segundo. Es decir, se le cambia el signo al segundo y se suman. $P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]$

$$\left(x^4-3x^2+x+1\right)\underbrace{-\left(x^3-x^2+5x-2\right)}_{\text{para restar dos polinomios}}=x^4-3x^2+x+1\underbrace{-x^3+x^2-5x+2}_{\text{cambiamos el signo de todos los miembros del segundo}}=x^4-x^3-2x^2-4x+3$$

Ejemplo

1.- Dados los polinomios $P(x)=5x^4-3x^3+7x^2-5x+4$ y $Q(x)=x^3+3x^2-2x$, calcula: a) $P(x)+3Q(x)$; b) $2P(x)-Q(x)$

Para sumar polinomios, sumamos los monomios semejantes que los componen:

$$a)\ P(x)+3\cdot Q(x)=\left(5x^4-3x^3+7x^2-5x+4\right)+3\cdot\left(x^3+3x^2-2x\right)=5x^4-3x^3+7x^2-5x+4+3x^3+9x^2-6x=$$
$$=5x^4+16x^2-11x+4$$
$$b)\ 2\cdot P(x)-Q(x)=2\cdot\left(5x^4-3x^3+7x^2-5x+4\right)\underset{(*)}{-}\left(x^3+3x^2-2x\right)=10x^4-6x^3+14x^2-10x+8-x^3-3x^2+2x=$$
$$=10x^4-7x^3+11x^2-8x+8$$

(*) Recuerda que un signo menos delante de un paréntesis, cambia todos los signos que hay dentro.

3.4.2.- Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, multiplicaremos todos los monomios del primero por todos los monomios del segundo y después agruparemos los monomios semejantes dando el resultado en orden decreciente en grado.

Podemos hacerlo poniendo uno encima de otro y colocando los monomios semejantes unos debajo de los otros para poder sumarlos con facilidad, aunque es preferible hacerlo en línea:

$$(3x+5)\cdot(4x-2)=(3x\cdot 4x)+(3x\cdot(-2))+(5\cdot 4x)+(5\cdot(-2))=12x^2-6x+20x-10=12x^2-14x-10$$

Recuerda que, para agrupar, sumaremos cada monomio con sus semejantes.

Ejemplo

2.- Dados los polinomios $P(x)=3x^3+7x^2-5x+4$ y $Q(x)=x^2-2x+4$, calcula su producto:

Para multiplicar polinomios, multiplicamos todos los monomios del primero, por todos los del segundo y después sumaremos:

$$P(x)\cdot Q(x)=\left(3x^3+7x^2-5x+4\right)\cdot\left(x^2-2x+4\right)=3x^3\cdot\left(x^2-2x+4\right)+7x^2\cdot\left(x^2-2x+4\right)-5x\left(x^2-2x+4\right)+$$
$$+4\left(x^2-2x+4\right)=\left(3x^5-6x^4+12x^3\right)+\left(7x^4-14x^3+28x^2\right)-\left(5x^3-10x^2+20x\right)+\left(4x^2-8x+16\right)=$$
$$=3x^5-6x^4+12x^3+7x^4-14x^3+28x^2-5x^3+10x^2-20x+4x^2-8x+16=$$
$$=3x^5+x^4-7x^3+42x^2-28x+16$$

Piensa y practica

2.- Dados los polinomios: $P(x)=3x^4-6x^3+4x-2$ $\quad Q(x)=x^3-2x^2-3x+1$ $\quad R(x)=x^2+1$, Calcula:

a) $P(x)+Q(x)$ **b)** $2\cdot P(x)-3Q(x)+4\cdot R(x)$ **c)** $\left[P(x)\right]^2$ **d)** $P(x)\cdot R(x)-2Q(x)$

3.4.3.- División de polinomios

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), al dividirlos obtenemos otros dos polinomios C(x) y R(x) que cumplirán que el grado de P(x) sea mayor que el de Q(x) y que además deberán verificar la regla de la división **"Dividendo es igual a cociente por divisor más resto"**

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & C(x) \\ R(x) & \end{array} \qquad \rightarrow \qquad P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$$

Si R(x)=0, división exacta, diremos que el polinomio P(x) es divisible por el polinomio Q(x).

La manera más sencilla de explicar la división de polinomios es mediante un ejemplo, así que vamos a realizar paso a paso la división del polinomio **$P(x)=4x^3-2x^2+8x-11$** entre el polinomio **$Q(x)=2x-3$.**

- 1° PASO: Disponemos los polinomios de igual forma que si se tratase de una división de números. En el caso de que el polinomio del dividendo no esté completo dejaremos huecos para los términos que faltan.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-2x^2+8x-11 & 2x-3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

- 2° PASO: Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el de mayor grado del divisor, es decir, $4x^3 : 2x$, dando como resultado $2x^2$.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-2x^2+8x-11 & 2x-3 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

- 3° PASO: Multiplicamos cada uno de los términos del divisor $2x-3$ por el resultado obtenido en el paso 2, $2x^2$, y colocamos los opuestos de estos términos debajo de los términos semejantes del dividendo. A continuación, sumamos obteniendo otro polinomio que será el nuevo dividendo.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-2x^2+8x-11 & 2x-3 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l|l} 4x^3-2x^2+8x-11 & 2x-3 \\ \cline{2-2} -4x^3+6x^2 \quad \downarrow & 2x^2 \\ \cline{1-1} 0x^3+4x^2+8x & \end{array}$$

- 4° PASO: Repetimos el 3° PASO hasta que el grado del nuevo polinomio dividendo sea inferior al del polinomio divisor. Cuando esto ocurra, dicho polinomio será el resto de la división. En nuestro ejemplo el 3° PASO se ha repetido tres veces.

$$\begin{array}{cccc|l} 4x^3 & -2x^2 & +8x & -11 & 2x-3 \\ \cline{5-5} \underline{-4x^3} & \underline{+6x^2} & \downarrow & & 2x^2+2x \\ 0 & 4x^2 & +8x & \downarrow & \\ & \underline{-4x^2} & \underline{+6x} & \_ & \\ & 0 & 14x & -11 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|l} 4x^3 & -2x^2 & +8x & -11 & 2x-3 \\ \cline{5-5} \underline{-4x^3} & \underline{+6x^2} & \downarrow & & 2x^2+2x+7 \\ 0 & 4x^2 & +8x & \downarrow & \text{Cociente} \\ & \underline{-4x^2} & \underline{+6x} & \_ & \\ & 0 & 14x & -11 & \\ & & \underline{-14x} & \underline{+21} & \\ & & 0 & \underbrace{+10}_{\text{Resto}} & \end{array}$$

$$C(x)=2x^2+2x+7 \quad y \quad R(x)=10$$

Observa cómo se hace:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -2x^2 & +8x & -11 & 2x-3 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & +6x^2 & & & 2x^2+2x+7 \\ \hline
 & 4x^2 & +8x & -11 & \\
 & -4x^2 & +6x & & \\ \cline{2-4}
 & & 14x & -11 & \\
 & & -14x & +21 & \\ \cline{3-4}
 & & & 10 &
\end{array}
$$

Cálculo de los términos del cociente.

$4x^3 : 2x = 2x^2$

$4x^2 : 2x = 2x$

$14x : 2x = 7$

Cociente $= 2x^2 + 2x + 7$

Resto $= 10$

Ejemplo

3.- Calcula paso a paso la división $P(x)=x^5+2x^3-x-8$ entre el polinomio $Q(x)=x^2-2x+1$:

Pues repitiendo los pasos del 1 al 4 como hemos visto antes y poniendo 0 en los huecos que faltan:

$$
\begin{array}{lrrrrrr|l}
 & x^5+ & 0x^4+ & 2x^3+ & 0x^2- & x- & 8 & x^2-2x+1 \\ \cline{8-8}
2.^\circ\rightarrow & -x^5+ & 2x^4- & x^3 & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\ \cline{2-4}
3.^\circ\rightarrow & & 2x^4+ & x^3+ & 0x^2- & x- & 8 & 1.^\circ\uparrow\ \ 4.^\circ\uparrow\ \ 7.^\circ\uparrow\ \ 10.^\circ\uparrow \\
5.^\circ\rightarrow & & -2x^4+ & 4x^3- & 2x^2 & & & \\ \cline{3-5}
6.^\circ\rightarrow & & & 5x^3- & 2x^2- & x- & 8 & \\
8.^\circ\rightarrow & & & -5x^3+ & 10x^2- & 5x & & \\ \cline{4-6}
9.^\circ\rightarrow & & & & 8x^2- & 6x- & 8 & \\
11.^\circ\rightarrow & & & & 8x^2+ & 16x+ & 8 & \\ \cline{5-7}
12.^\circ\rightarrow & & & & & 10x- & 16 &
\end{array}
$$

1.º $x^5 : x^2 = x^3$

2.º $x^3\cdot(x^2-2x+1)=x^5-2x^4+x^3$

3.º $(x^5+2x^3-x-8)+(-x^5+2x^4-x^3)=2x^4+x^3-x-8$

4.º $2x^4 : x^2 = 2x^2$ / **5.º** $2x^2\cdot(x^2-2x+1)=2x^4-4x^3+2x^2$

6.º $(2x^4+x^3-x-8)+(-2x^4+4x^3-2x^2)=5x^3-2x^2-x-8$

7.º $5x^3 : x^2 = 5x$ / **8.º** $5x\cdot(x^2-2x+1)=5x^3-10x^2+5x$

9.º $(5x^3-2x^2-x-8)+(-5x^3+10x^2-5x)=8x^2-6x-8$

10.º $8x^2 : x^2 = 8$ / **11.º** $8\cdot(x^2-2x+1)=8x^2-16x-8$

12.º $(8x^2-6x-8)+(-8x^2+16x+8)=10x-16$

Llegamos a que el cociente es $C(x)=x^3-2x^2+5x+8$ y el resto: $R(x)=10x-16$

Piensa y practica

3.- Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $x^3-4x^2-6x+12 \quad \lvert\, \underline{x-5}$	**b)** $9x^4+15x^3-6x^2-5x+1 \quad \lvert\, \underline{3x^2-1}$
c) $4x^4 \quad \lvert\, \underline{2x^2-1}$	**d)** $2x^5+3x^2-6 \quad \lvert\, \underline{x+3}$

4.- Al dividir un polinomio entre x^2+2x+3 se ha obtenido $3x-2$ de cociente y $5x+2$ de resto. ¿cuál es ese polinomio?

5.- Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 1, 2 y 3. ¿Cuántas soluciones pueden darse?

Ejemplo

4.- Dados los polinomios $\begin{cases} p(x)=4x^5+3x^3-2x^2+5 \\ q(x)=-5x^3-2x^2+3x \\ r(x)=2x^2-x+3 \end{cases}$ calcula: $\begin{cases} a)\ 2p(x)-3q(x)+r(x)= \\ b)\ [q(x)]^2= \\ c)\ p(x):r(x)= \end{cases}$

a) $2p(x)-3q(x)+r(x)=2(4x^5+3x^3-2x^2+5)-3(-5x^3-2x^2+3x)+2x^2-x+3=8x^5+6x^3-4x^2$
$+10+15x^3+6x^2-9x+2x^2-x+3=8x^5+21x^3+4x^2-10x+13$

b) $[q(x)]^2=(q(x))\cdot(q(x))=(-5x^3-2x^2+3x)\cdot(-5x^3-2x^2+3x)=25x^6+10x^5-15x^4+10x^5+4x^4$
$-6x^3-15x^4-6x^3+9x^2=25x^6+20x^5-26x^4-12x^3+9x^2$

c) $p(x):r(x)=$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & +0x & +3x^3 & -2x^2 & +0x & +5 & 2x^2-x+3 \\ \cline{7-7}
\underline{-4x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-6x^3} & \downarrow & & & 2x^3+x^2-x-3 \\
0 & +2x^4 & -3x^3 & -2x^2 & & & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+x^3} & \underline{-3x^2} & \downarrow & & \text{Cociente} \\
 & 0 & -2x^3 & -5x^2 & +0x & \downarrow & C(x)=2x^3+x^2-x-3 \\
 & & \underline{+2x^3} & \underline{-x^2} & \underline{+3x} & 5 & \\
 & & 0 & -6x^2 & +3x & +5 & \text{Resto} \\
 & & & \underline{6x^2} & \underline{-3x} & \underline{+9} & R(x)=14 \\
 & & & & & +14 &
\end{array}
$$

Piensa y practica

6.- Dados los polinomios $\begin{cases} p(x)=2x^5-x^3+2x^2-3x-3 \\ q(x)=4x^3-3x^2+2x-1 \\ r(x)=2x^2-3 \end{cases}$ calcula: $\begin{cases} a)\ p(x)-2q(x)+3r(x)= \\ b)\ p(x)\cdot r(x)= \\ c)\ p(x):r(x)= \end{cases}$

a) $2x^5-9x^3+14x^2-7x-10$
b) $4x^7-8x^5+4x^4-3x^3-12x^2+9x+9$
c) Exacta de $C(x)=x^3+x+1$

3.4.4.- Regla de Ruffini

Cuando el divisor es un binomio de la forma **x – a**, la división puede realizarse de un modo más sencillo, empleando un algoritmo conocido como Regla de Ruffini.

Veamos cómo se realiza este proceso mediante un ejemplo.

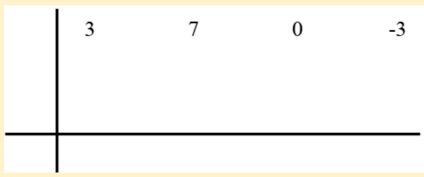
Ejemplo

4.- Dado el polinomio $P(x)=3x^3+7x^2-3$ y el polinomio $Q(x)=x+3$, calcula el cociente $P(x):Q(x)$

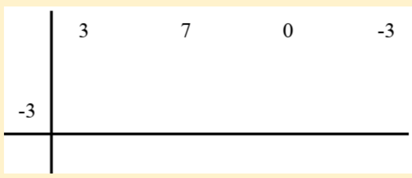
Para realizar esta regla, utilizaremos una especie de cuadro formado por dos rectas perpendiculares, de la forma:

En la parte de la derecha superior colocaremos los coeficientes de todos los términos del polinomio en cuestión, que debe estar completo, así que pondremos 0 si faltara alguno de sus términos, como ocurre en nuestro caso que falta el término en x.

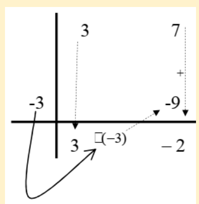
$$P(x)=3x^3+7x^2+0x-3$$



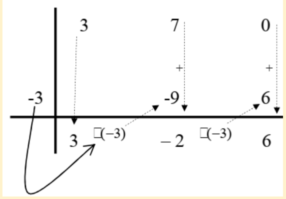
En la parte izquierda, justo encima de la línea horizontal de separación colocaremos el término independiente del divisor (binomio $x-a$), en nuestro caso es **x+3 = x – (–3)**, por tanto, colocamos el –3.



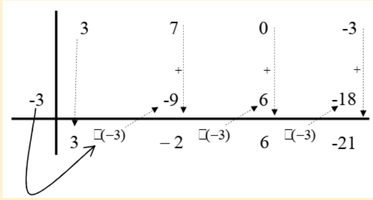
El proceso empieza bajando el coeficiente del término de mayor grado (3) y poniéndolo debajo de la línea horizontal. Después multiplicaremos el –3 por dicho número (3) y colocaremos el resultado por encima de la línea horizontal debajo del siguiente término para después sumarlos:



Repetimos el proceso volviendo a multiplicar el –3 por el nuevo resultado (–2) y colocándolo debajo del siguiente término para volver a sumarlos:



Reiteramos el proceso multiplicando otra vez (–3) por el nuevo resultado y colocándolo debajo del término independiente:



El último número que figura debajo de la línea horizontal es el resto R = –21.

Los números anteriores son los coeficientes del polinomio cociente C(x) = $3x^2$–2x+6, de grado una unidad menor que el grado del polinomio dividendo P(x).

En este caso el grado del resto es igual a cero y cómo podemos comprobar la división no es exacta.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+7x^2-3 & x+3 \\ \cline{2-2} 21 & 3x^2-2x+6 \end{array} \rightarrow \begin{cases} C(x)=3x^2-2x+6 \\ R(x)=21 \end{cases}$$

Piensa y practica

7.– Realiza las siguientes divisiones de polinomios mediante la regla de Ruffini: a) C(x)=x^2–2x+1; R(x)=–6; b) C(x)=x^2–6x+2

a) $x^3-4x^2+5x-8 \quad \underline{|x-2}$ b) $x^4-7x^3+8x^2-2 \quad \underline{|x-1}$

8.– Al dividir B(x)=$4x^5$–$3mx^3$+$4x^2$–x+6 entre x+2, el resto es igual a 16. Calcula el valor de m. m=5

9.– Calcula los valores de m y n para que el polinomio x^3+mx^2+nx+10 sea divisible por los binomios x–1 y x–2. m=2; n=–13

3.4.5.- Sacar Factor Común

Cuando hablamos de extraer factor común nos referimos a una transformación a la que se pueden someter ciertas sumas y restas y que resulta muy útil en el cálculo algebraico.

Observa la siguiente expresión: $a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d$ $\begin{cases} \text{Es una suma cuyos sumandos son productos.} \\ \text{Todos los productos tienen un mismo factor, la letra a.} \end{cases}$

Entonces, podemos transformar la suma en un producto sacando el factor que se repite (sacar factor común) y colocando un paréntesis.

$$a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a \cdot (b + c - d)$$

Piensa y practica

10.– Extrae factor común en las siguientes expresiones algebraicas:

a)	$18x^4+32x^2$	b)	$6x^2+12x-24$	c)	$9a+6a^2+3a^3$
d)	$2x-6xy-4zx$	e)	a^2+2a	f)	$10b-30ab$
g)	$18mxy^2-54m^2x^2y^2+36my^2$	h)	$5x^2+10x-20$	i)	$60x^4+18x^3-24x^2$

Podemos encontrarnos expresiones algebraicas en las que se puede sacar factor común dos veces, lo que se conoce con el nombre de factorización por extracción doble. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

5.- Transforma en producto la expresión algebraica definida por: P(x,y) = xy – 2x – 3y + 6

Vamos a hacer diferentes transformaciones hasta poder sacar factor común:

$$P(x,y)=xy-2x-3y+6 \underset{\text{Separamos en dos partes}}{=} (xy-2x)+(-3y+6)=(xy-2x)-(3y-6) \underset{\text{Observamos lo que se repite}}{=} (xy-2x)-(3y-3\cdot 2)=$$

$$\underset{\text{Y lo sacamos factor común}}{=} x(y-2)+3(y-2) \underset{\text{Vemos que otra vez se repite un factor}}{=} x(y-2)+3(y-2) \underset{\text{Volvemos a sacar factor común}}{=} (x+3)\cdot(y-2)$$

Piensa y practica

11.- Extrae doble factor común en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4x^3-4x^2+x-1=$ b) $4x^2a+3y+12ax+yx=$ c) $4a-7x^2a+ya+4z-7x^2z+yz=$

d) $a^2x^2-3bx^2+a^2y^2-3by^2$ e) $c^2d^2+e^2d^2-c^2f^2-e^2f^2$

3.05.- Potencia de polinomios

Para algunos productos particulares, conocemos fórmulas que permiten simplificar los cálculos; se trata de las identidades notables.

IDENTIDADES NOTABLES	
Cuadrado de una suma:	$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$
Cuadrado de una diferencia:	$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$
Suma por diferencia:	$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Las dos primeras son potencias de polinomios, bueno, mas bien potencias de un binomio. La potencia de un polinomio, al igual que la de un número, es la forma abreviada de escribir el producto de un polinomio por sí mismo varias veces.

$$[P(x)]^n=\underbrace{P(x)\cdot P(x)\cdot P(x)\cdot \ldots\ldots\ldots P(x)\cdot P(x)\cdot P(x)}_{\text{n veces}}$$

Si interesantes son las potencias de un polinomio, más lo son las potencias de binomios de la forma a+b.

Vamos a calcular algunas de ellas e intentar encontrar patrones o regularidades que nos permitan simplificar los cálculos como hacemos con las identidades notables.

Las tres primeras son evidentes, $(a+b)^0=1$ $(a+b)^1=a+b$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Pero veamos las siguientes potencias:

- $(a+b)^3$

$$(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$

Agrupando:

$$a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad \rightarrow \quad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

- $(a+b)^4$

$$(a+b)^4=(a+b)^3\cdot(a+b)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)=a^4+a^3b+3a^3b+3a^2b^2+3a^2b^2+3ab^3+$$

$$+b^3a+b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \quad \rightarrow \quad (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Vamos a colocarlas una encima de la otra a ver si somos capaces de encontrar algún patrón:

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

¿No?, vamos a fijarnos en los coeficientes:

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=1a+1b$$
$$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$$
$$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$
$$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$
.....

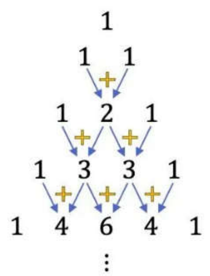
$$\rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \ldots & & & & \end{array}$$

Como puedes ver, al desarrollar cualquier binomio los exponentes del primer término (a) van disminuyendo mientras que los exponentes del segundo término (b) van aumentando. Todos los términos tienen el mismo grado, el exponente de la potencia, y los exponentes de las variables varían de uno en uno desde $a^n b^0$ hasta $a^0 b^n$

Vemos que se forma un triángulo infinito, al que llamamos **Triángulo de Pascal** en honor al filósofo y matemático francés Blaise Pascal, que fue quien introdujo esta expresión triangular en 1654.

Se trata de un triángulo de números enteros, infinito y simétrico que empieza con un 1 en la primera fila, y cuyos bordes todos son todos 1. Cada número del interior es la suma de los dos números que tiene justo encima.



Pues con todo esto ya podemos calcular cualquier potencia del binomio (a+b), y a esto lo llamamos **Binomio de Newton.**

Si queremos calcular $(a+b)^5$, simplemente debemos continuar el triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 4 & & 1 \\ & & & & & \ldots & & & & & \end{array}$$

$$\rightarrow$$

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=1a+1b$$
$$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$$
$$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$
$$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$
$$(a+b)^5=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$$
.....

Por tanto: $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

En el caso de que el binomio fuera de la forma $(a-b)^n$, los signos irían alternándose, empezando por el positivo:

$$(+-+-+-+-+-+-+-+-+\ldots.)$$

Existe una fórmula matemática del binomio de Newton que estudiaremos con más profundidad en el tema de Combinatoria.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots\dots\dots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n$$

Así que, con todo lo visto hasta ahora, ya podemos ampliar las identidades notables que debemos conocer a 5:

IDENTIDADES NOTABLES	
Cuadrado de una suma:	$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$
Cuadrado de una diferencia:	$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$
Suma por diferencia:	$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$
Cubo de una suma:	$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3b^2a+b^3$
Cubo de una diferencia:	$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3b^2a-b^3$

Piensa y practica

12.- Calcula $(x^2-2x)^3$

13.- Completa el triángulo de Tartaglia hasta la décima fila. ¿Serías capaz de calcular $(a-b)^7$?

14.- Rebeca asegura que, si añade un metro a la arista de un cubo, el volumen aumentará un metro cúbico. ¿Tiene razón? ¿Por qué? Haz un dibujo de la situación.

3.06.- Teoremas del Resto y del Factor.

Si dividimos el polinomio $P(x)=3x^3-2x^2-8$ entre el polinomio $Q(x)=x-2$, lo podemos hacer mediante la regla de Ruffini y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & 0 & -8\\ 2 & & 6 & 8 & 16\\ \hline & 3 & 4 & 8 & \boxed{8}\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}C(x)=3x^2+4x+8\\ R(x)=8\end{cases}$$

Si además calculamos el valor numérico del polinomio $P(x)$ para x=2, es decir, $P(2)$, obtenemos:

$$Si\quad P(x)=3x^3-2x^2-8\quad\rightarrow\quad P(2)=3(2)^3-2(2)^2-8=3\cdot8-8-8=24-16=8\quad\rightarrow\quad P(2)=8$$

Y si nos fijamos, ocurre que el resto de la división, coincide con el valor numérico:

$$3x^3-2x^2-8\ \underline{|x-2}$$

$$\begin{array}{l|l}3x^3-2x^2+0x-8 & x-2\\ \hline & 3x^2+4x+8\\ \underbrace{8}_{\text{Resto}} & \end{array}\rightarrow\begin{cases}\text{Resto: } R(x)=8\\ P(2)=8\end{cases}$$

Para demostrar que este resultado se cumple siempre que dividimos un polinomio cualquiera, P(x), por el binomio (x–a), aplicamos la prueba de la división:

$$\text{Sea } P(x)=(x-a)\cdot C(x)+R\quad\rightarrow\quad\text{Si } x=a\quad\rightarrow\quad P(a)=(a-a)\cdot C(a)+R=0+R=R$$

Teorema del Resto:

El valor numérico de un polinomio, P(x), para x=a, coincide con el resto de la división del polinomio P(x) por el binomio (x – a), es decir:

$$R = P(a)$$

¿Y qué pasaría si el resto fuera 0?

Si el resto de dividir el polinomio P(x) por x–a es cero, entonces el valor numérico del polinomio para x=a sería 0, es decir, P(a)=0 y entonces, el polinomio P (x) se podrá expresar como producto de dos factores, (x – a), y el cociente C(x).

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x)$$

En ese caso, decimos que **a** es una raíz del polinomio.

Si el valor numérico de P(x) para x=a es igual a cero, es decir, si P (a)=0, se dice que a es una raíz del polinomio.

Teorema del Factor:

Si x = a es una raíz del polinomio P(x), dicho polinomio es divisible por x – a, es decir, x – a es un factor de P(x).

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x)$$

Ejemplo

6.- Determina si el polinomio P(x) = $2x^2 - 7x + 6$ es divisible por x + 2.

Para saber si el polinomio P(x) es divisible por x + 2, calcularemos el resto de la división, es decir, determinaremos el valor numérico de P(x) para x = −2, P(−2):

$$P(-2) = 2\cdot(-2)^2 - 7\cdot(-2) + 6 = 8 + 14 + 6 = 28 \neq 0$$

que es claramente distinto de cero, por tanto, el polinomio P no es divisible por x–2.

Piensa y practica

15.- Indica cuáles de los siguientes números son raíces del polinomio: $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 22x + 24$

$$1 \qquad 3 \qquad -1 \qquad -2 \qquad -\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2}$$

16.- Decide de forma razonada si x – 3 es divisor de alguno de estos polinomios.

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 17x^2 - 27x - 9 \qquad Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 \qquad R(x) = 5x^3 - 15x^2 + 2x - 6$$

17.- Halla el valor de m para que 3 sea raíz de: $P(x) = 3x^3 - x^2 + mx - 15$

18.- Determina el valor de m para que el resto de $(-2x^4 + mx^3 - 11x^2 - 5) : (x - 3)$ sea 13.

3.07.- Factorización de Polinomios

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado, y si estos son binomios pues mucho mejor.

El proceso de factorización comienza sacando factor común siempre que sea posible, después usando las identidades notables y por último, buscando divisores de la forma x – a, tales que, a sea divisor del término independiente del polinomio. Las posibles raíces no nulas de un polinomio, P(x), deben ser divisores del término independiente.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo

7.- Descompón en factores el polinomio $P(x) = 6x^5 + 15x^4 + 15x^3 + 9x^2 + 3x$

Lo primero es fijarse en si algo se repite en sus términos, para poder sacarlo como factor común:

En nuestro caso se repite el 3 y la x, así que sacamos factor común 3x:

$$6x^5+15x^4+15x^3+9x^2+3x=3x\left(2x^4+5x^3+5x^2+3x+1\right)$$

Lo segundo es identificar alguna identidad notable, que como podemos observar, no es el caso.

Y tercero, factorizamos mediante Ruffini probando con los divisores de 1: ± 1

En nuestro caso solo probaremos con –1 porque todos los términos son positivos:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 5 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & & -2 & -3 & -2 & -1 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(2x^4+5x^3+5x^2+3x+1\right)=(x+1)\cdot\left(2x^3+3x^2+2x+1\right)$$

Reiteramos el proceso probando otra vez con –1:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & & -2 & -1 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(2x^3+3x^2+2x+1\right)=(x+1)\left(2x^2+x+1\right)$$

Intentamos otra vez:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 1 & 1 \\ -1 & & -2 & 1 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{2} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(2x^2+x+1\right) \text{ es irreducible}$$

Por tanto, la factorización del polinomio P(x) es: $P(x)=6x^5+15x^4+15x^3+9x^2+3x=3x(x+1)^2\cdot\left(2x^2+x+1\right)$

Son polinomios irreducibles los de primer grado y aquellos de grado par que no tengan raíces reales.

Piensa y practica

19.- Factoriza los siguientes polinomios:

a)	x^3+8x^2+15x	d)	$36x^6-49x^4$	g)	$x^6+2x^5-3x^4-4x^3+4x^2$
b)	$x^3-7x^2+16x-12$	e)	$3x^4+6x^3+6x^2+6x+3$	h)	$2x^4+12x^3+26x^2+24x+8$
c)	x^3-5x^2+8x-4	f)	x^3+2x^2-4x-8	i)	$7x^4-28x^3+21x^2+28x-28$

20.- Halla un polinomio de tercer grado tal que:

- Sea divisible por $x + 1$.
- Una de sus raíces sea $x = 3$.
- Su término independiente sea 0

21.- Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $P(x) = x^3 - 3x + 2$ y $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

3.08.- Fracciones algebraicas

Llamamos **fracción algebraica** a la división no exacta de dos polinomios P(x) y Q(x) expresada en forma de fracción y donde el denominador Q(x) es un polinomio no nulo de grado mayor que 0.

Ejemplo de fracciones algebraicas son:

$$\frac{1}{x-1} \qquad \frac{x-3}{x+2} \qquad \frac{x^3-3x^2+3x-7}{x^2+4x+4} \qquad \text{en general} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}$$

3.8.1.- Fracciones algebraicas equivalentes

De forma análoga a las fracciones de números enteros, decimos que dos fracciones algebraicas son equivalentes, si se cumple que los productos cruzados son iguales, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{S(x)} \quad \text{Si se cumple que:} \quad P(x)\cdot S(x)=Q(x)\cdot R(x)$$

Ejemplo

8.- Determina si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes: $\frac{x^2+x}{2x}$ y $\frac{x^2-1}{2x-2}$

Para saber si dos fracciones algebraicas son equivalentes, hemos de calcular primero los productos cruzados de los polinomios que las componen. Y si son iguales, entonces las fracciones son equivalentes:

$$\frac{x^2+x}{2x}=\frac{x^2-1}{2x-2} \quad \rightarrow \quad (x^2+x)\cdot(2x-2)=2x\cdot(x^2-1) \quad \rightarrow \quad 2x^3\cancel{+2x^2}\cancel{-2x^2}-2x=2x^3-2x$$

$$2x^3-2x=2x^3-2x$$

Por tanto, las dos fracciones son equivalentes.

3.8.2.- M.C.D. y m.c.m. de polinomios

Conocer el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios polinomios nos será útil para operar con las fracciones algebraicas.

- El máximo común divisor (M.C.D.) de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado que es divisor de todos ellos.
- El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es múltiplo de todos ellos.

En la práctica, primero descompondremos en factores los distintos polinomios y:

- En el M.C.D., tomamos los factores comunes elevados al menor exponente.
- En el m.c.m., los comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

3.8.3.- Operaciones con fracciones algebraicas

Al operar con fracciones algebraicas, al igual que sucedía con las fracciones numéricas, siempre es conveniente simplificar las fracciones.

Para simplificar una fracción algebraica, factorizaremos los polinomios del numerador y del denominador y dividiremos ambos por los factores que tengan en común, es decir, por el M.C.D. de ambos. De este modo, obtenemos una fracción que no es posible simplificar más, la conocidísima por todos **fracción irreducible.**

Ejemplo

9.- Simplifica la siguiente fracción algebraica: $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x}$

Para simplificar fracciones utilizaremos las identidades notables, sacaremos factor común o haremos Ruffini cuando sea necesario, aunque en este caso no es necesario porque el numerador es una de las nuevas identidades notables $(a+b)^3$:

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{(x+1)^3}{x(x^2+2x+1)}=\frac{(x+1)^3}{x(x+1)^2}=\frac{x+1}{x}$$

Piensa y practica

21.- Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de los polinomios $P(x) = x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 12x$ y $Q(x) = x^3 + 8x^2 + 21x + 18$.

22.- Simplifica las fracciones algebraicas: $\dfrac{x^4+x^3-8x^2-12x}{x^4-3x^2-10x}$ y $\dfrac{x^4-1}{x^4-x^3-x^2-x-2}$

Con las fracciones algebraicas podemos efectuar las mismas operaciones que con las fracciones numéricas: suma, resta, multiplicación y división.

SUMA: Para sumar o restar fracciones algebraicas, se suman los numeradores siempre y cuando los denominadores sean iguales. Si no es así, se reducen todas ellas a común denominador con la ayuda del m.c.m. para calcular después las fracciones equivalentes correspondientes y por último sumar los numeradores. Recuerda que el resultado siempre tiene que darse mediante la fracción irreducible.

Ejemplo

10.- Realiza la siguiente operación: $\dfrac{x+10}{x^2-4}-\dfrac{x+4}{x^2+4x+4}$

Para restar estas fracciones, lo primero es reducirlas a común denominador calculando el m.c.m. de ambos denominadores con la ayuda de la factorización:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-4=(x+2)\cdot(x-2) \\ x^2+4x+4=(x+2)^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad m.c.m.=(x-2)\cdot(x+2)^2 \quad \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+10}{x^2-4}=\dfrac{(x+10)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)^2}=\dfrac{x^2+12x+20}{(x-2)\cdot(x+2)^2} \\ \dfrac{x+4}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)^2}=\dfrac{x^2+2x-8}{(x-2)\cdot(x+2)^2} \end{array}\right.$$

Una vez conseguidas las fracciones equivalentes con igual denominador, procederemos a la resta de ellas:

$$\frac{x+10}{x^2-4}-\frac{x+4}{x^2+4x+4}=\frac{x^2+12x+20}{(x-2)\cdot(x+2)^2}-\frac{x^2+2x-8}{(x-2)\cdot(x+2)^2}=\frac{10x+28}{(x-2)\cdot(x+2)^2}$$

Fracción que no se puede simplificar.

PRODUCTO: El producto de fracciones algebraicas es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}$$

Ejemplo

11.- Realiza el siguiente producto: $\dfrac{x+1}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x+6}{x-2}$

Para multiplicar estas fracciones, multiplicamos por un lado los numeradores y por el otro los denominadores, aunque mejor factorizar por si se pudiera simplificar algo y así nos ahorramos hacerlo al final:

$$\frac{x+1}{x^2-9}\cdot\frac{2x+6}{x-2}=\frac{(x+1)\cdot(2x+6)}{(x^2-9)\cdot(x-2)}=\frac{(x+1)\cdot 2\cdot\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\cdot(x-3)\cdot(x-2)}=\frac{(x+1)\cdot 2}{(x-3)\cdot(x-2)}=\frac{2x+2}{x^2-5x+6}$$

DIVISIÓN: Para dividir dos fracciones algebraicas, se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda. En la práctica, el cociente de fracciones algebraicas es otra fracción que tiene por numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y por denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot S(x)}{Q(x)\cdot R(x)}$$

Ejemplo

12.- Realiza el siguiente cociente de fracciones algebraicas: $\frac{x}{x^2-1}:\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$

Para dividir estas fracciones algebraicas multiplicaremos en cruz y luego si se puede simplificaremos el resultado, para ello, antes descompondremos los polinomios en factores mediante Ruffini.

$$\frac{x}{x^2-1}:\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}=\frac{x\cdot(x^2-x-2)}{(x^2-1)\cdot(x^2-2x)}=\frac{x\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

Piensa y practica

23.- Calcula y simplifica si es posible:

a) $\frac{x-9}{x^2-4x+3}+\frac{2x+3}{x^2-3x}-\frac{x-2}{x^2-x}=$

b) $\frac{3x^4}{5(x-1)}:\frac{x^2}{5(x+2)^2}\cdot\frac{x-1}{9x^3\cdot(x+2)}=$

c) $\frac{x-2}{x-1}-\frac{x}{x-1}:\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=$

3.9.- Resolución de Problemas

Según **Polya** (1965), el profesor de matemáticas tiene en sus manos la llave del éxito ya que, si es capaz de estimular en los alumnos la curiosidad, podrá despertar en ellos el gusto por el pensamiento independiente; pero, si por el contrario dedica el tiempo a ejercitarles en operaciones de tipo rutinario, matará en ellos el interés.

Es necesario crear en clase un ambiente que favorezca la investigación, el descubrimiento, la búsqueda, la desinhibición – cuando se trate de plantear preguntas o dudas – , el respeto a los compañeros, las actitudes de colaboración... etc.

Más que enseñar a los alumnos a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones y, en este sentido, los propios problemas serán las "herramientas" que les llevarán a ello.

Es por ello que la resolución de problemas es considerada la parte más esencial del aprendizaje de matemáticas. Mediante la resolución de problemas, experimentareis la utilidad de las Matemáticas en el mundo que os rodea aplicando de forma práctica los conocimientos teóricos que habéis adquirido.

En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

a) Lectura y comprensión del enunciado.
b) Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
c) Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
d) Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
e) Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

Veamos algunos ejemplos:

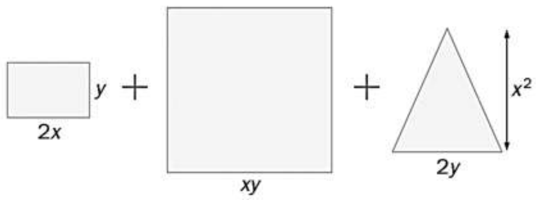
1.– El valor numérico del polinomio $4/3\pi x^3$ expresa el volumen de una esfera de radio x, y el valor numérico del polinomio $4\pi x^2$ expresa la superficie de una esfera del mismo radio. ¿Existe alguna esfera cuyo volumen expresado en m^3 coincida con su superficie expresada en m^2? Si tu respuesta es afirmativa, calcula el radio de dicha esfera.

Empezaremos igualando ambas expresiones para después despejar el radio R.

$$\left.\begin{array}{l} V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi R^3 \\ S_{esfera}=4\pi R^2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^2 \rightarrow \frac{R^3}{R^2}=\frac{3\cdot 4\pi}{4\pi} \rightarrow R=3$$

Por tanto, el radio ha de valer 3 metros.

2.- Expresa en forma de producto la suma de las áreas de estas 3 figuras:



Calculamos el área de cada una de las figuras por separado:

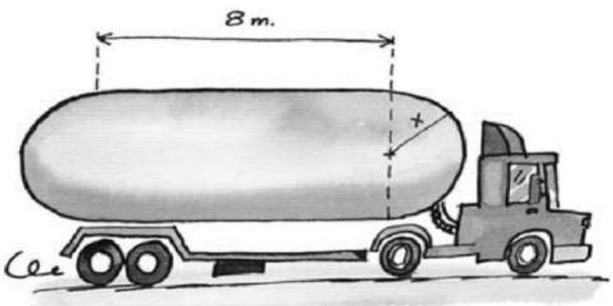
Rectángulo: $A=2x\cdot y=2xy$ Cuadrado: $A=(xy)^2=x^2\cdot y^2$ Triángulo: $A=\frac{2y\cdot x^2}{2}=y\cdot x^2$

El área total, será la suma de todas ellas y para expresarlo en forma de producto simplemente sacamos factor común lo que se repita en cada una de ellas:

$$A_{Total}=2\cdot x\cdot y+x^2\cdot y^2+y\cdot x^2=x\cdot y\cdot(2+xy+x)$$

Por tanto, el área en forma de producto es: x·y·(2+xy+x)

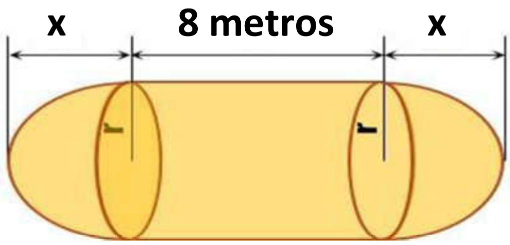
3.- El depósito de un camión destinado a transportar leche tiene la forma:



a) Determina, mediante dos expresiones polinómicas S(x) y V(x), la superficie y el volumen del depósito.

b) Calcula la superficie y el volumen si x=2 metros.

Como podemos observar, el remolque del camión no es más que la unión de un cilindro y de una esfera, bueno, más bien de dos semiesferas, y todos ellos de radio x:



Para la expresión de la superficie, tendremos que sumar la superficie lateral de un cilindro con la superficie de una esfera:

$$\left.\begin{array}{l} S_{esfera}=4\pi R^2 \\ S_{cilindro}=2\pi Rh \end{array}\right\} S(R)=S_{esfera}+S_{cilindro}=4\pi R^2+2\pi Rh=4\cdot\pi\cdot R^2+2\cdot\pi\cdot R\cdot 8=4\cdot\pi\cdot R^2+16\cdot\pi\cdot R=4\pi R(R+4) \rightarrow S(x)=4\pi x(x+4)$$

Y de forma similar, para la expresión del volumen, tendremos que sumar el volumen de un cilindro con el volumen de una esfera:

$$\left.\begin{array}{l} V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi R^3 \\ V_{cilindro}=\pi R^2 h \end{array}\right\} V(R)=V_{esfera}+V_{cilindro}=\frac{4}{3}\pi R^3+\pi R^2 h=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3+8\cdot\pi\cdot x^2=4\cdot\pi\cdot R^2\left(\frac{R}{3}+2\right) \quad\rightarrow\quad V(x)=4\pi x^2\left(\frac{x}{3}+2\right)$$

Por tanto, las expresiones algebraicas para la superficie y el volumen del camión de leche son:

Superficie	Volumen
$S(x)=4\pi x(x+4)$	$V(x)=4\pi x^2\left(\frac{x}{3}+2\right)$
Para x=2	
$S(2)=4\pi 2(2+4)=48\pi\ m^2$	$V(2)=4\pi 2^2\left(\frac{2}{3}+2\right)=16\pi\frac{8}{3}=\frac{128}{3}\pi\ m^3$

Por tanto la superficie es: $\begin{cases} S(x)=4\pi x(x+4) \\ S(2)=48\pi\ m^2 \end{cases}$ y el volumen: $\begin{cases} V(x)=4\pi x^2\left(\frac{x}{3}+2\right) \\ V(2)=\frac{128}{3}\pi\ m^3 \end{cases}$

3.10.- Autoevaluación

1.- Opera y simplifica:

$$\frac{(x-2)\cdot(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)\cdot(2x+3)}{12}=$$

2.- Halla el cociente y el resto de la división:

$$3x^4-5x^3+4x^2-1 \quad \underline{|x^2+2}$$

3.- Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4-12x^3+36x^2$ b) $2x^4+5x^2-4x-3$

4.- Calcula el valor del parámetro **m** para que el polinomio $P(x)=7x^3-mx^2+3x-2$, sea divisible por $x+1$.

5.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

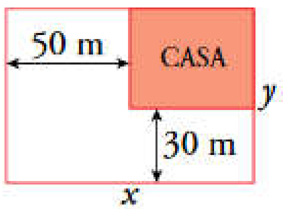
a) $\frac{x^3-4x}{x^3+x^2-2x}$ b) $\frac{x^2+2x-3}{x^3+6x^2+5x-12}$

6.- Efectúa y simplifica cuando sea posible:

a) $\frac{2x^2}{x-3}:\frac{8}{x^3-3x^2}$ b) $\frac{x^2-6}{(x-2)^2}-\frac{x-3}{x-2}$

7.- En un triángulo rectángulo, un cateto mide 14 cm. Escribe el perímetro y el área del triángulo en función de su hipotenusa x.

8.- En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en la figura.



Expresa en función de x e y el área de la zona no edificada.