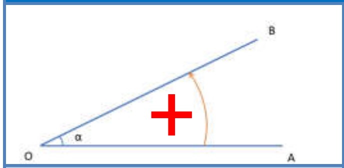
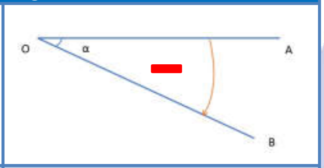
Ángulos

Se le llama **ángulo** a la región del plano entre dos semirrectas que tienen un punto en común llamado vértice.

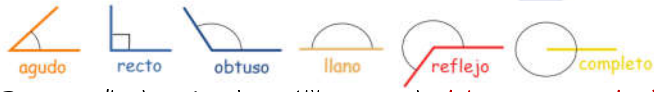
Criterio de Signos





Ángulo Positivo	Ángulo Negativo
Si la rotación es en sentido levógiro, (anti horario).	Si la rotación es en sentido dextrógiro (horario).

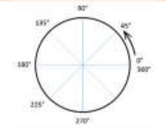
Según la amplitud del ángulo, los podemos clasificar en:



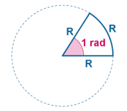
Para medir los ángulos utilizamos el sistema sexagesimal (DEG), el de gramos, minutos y segundos, y también el sistema radial (RAD), cuya unidad es el radián (rad).

MEDIDA DE ÁNGULOS

en Grados (DEG):	en Radianes: (RAD):
El **grado** es el ángulo plano que teniendo vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de ese círculo un arco de longitud l.	El **radián** es el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de ese círculo un arco de longitud igual al radio.



$$l=\frac{2\pi R}{360^\circ}$$



Se simboliza por °	Se simboliza por rad

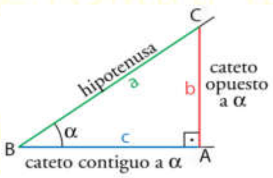
Para cambiar de una unidad a otra realizaremos una regla de tres, sabiendo que 180° se corresponden con π radianes.

Tabla de equivalencia entre grados sexagesimales y radianes

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6	2π

Razones trigonométricas de ángulos agudos

Cuando hablamos de razón nos estamos refiriendo a un cociente. Las razones trigonométricas relacionan lados y ángulos a través de cocientes.



Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo de la derecha y fijándonos en el ángulo α, es posible obtener una serie de razones que reciben el nombre de razones trigonométricas conocidas como seno, coseno y tangente.

$$\text{sen}(\alpha)=\frac{\text{Cateto Opuesto (b)}}{\text{Hipotenusa (a)}}=\frac{b}{a}\qquad \cos(\alpha)=\frac{\text{Cateto Contiguo (c)}}{\text{Hipotenusa (a)}}=\frac{c}{a}$$

$$\text{tg}(\alpha)=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{\text{Cateto Opuesto (b)}}{\text{Hipotenusa (a)}}}{\frac{\text{Cateto Contiguo (c)}}{\text{Hipotenusa (a)}}}=\frac{\text{Cateto Opuesto (b)}}{\text{Cateto Contiguo (c)}}=\frac{b}{c}$$

El seno, el coseno y la tangente son las **razones** trigonométricas **principales**. El resto, como vamos a ver, se pueden obtener simplemente haciendo el valor inverso de estas, de ahí que se llamen usualmente **razones inversas.**

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS O RECÍPROCAS

Secante de α	Cosecante de α	Cotangente de α
Es la inversa del coseno	Es la inversa del seno	Es la inversa de la tangente
$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\frac{a}{c}$	$\csc(\alpha)=\frac{1}{\text{sen}(\alpha)}=\frac{a}{b}$	$\text{cotg}(\alpha)=\frac{1}{\text{tg}(\alpha)}=\frac{c}{b}$

Si cos α=0,63, calcula las otras dos razones trigonométricas:

Usando la identidad fundamental de la trigonometría, $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, podemos despejar el seno:

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad\rightarrow\quad \text{sen}^2\alpha=1-\cos^2\alpha \quad\rightarrow$$

$$\text{sen}\ \alpha=+\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}63^2}=0{,}78$$

Y con el seno y el coseno, ya podemos calcular la tangente:

$$\text{tg}(\alpha)=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad\rightarrow\quad \text{tg}(\alpha)=\frac{0{,}78}{0{,}63}=1{,}24$$

Por tanto, sen α =0,78 y tg α=1,24

Sabiendo que tg α=2, calcula las otras dos razones trigonométricas, sen α y cos α.

Si llamamos s al sen α y c al cos α, con la ecuación fundamental de la trigo y la definición de tangente, podemos plantear un sistema de ecuaciones no lineales:

$$\text{tg}(\alpha)=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad\rightarrow\quad 2=\frac{s}{c} \quad\rightarrow\quad s=2c \qquad s^2+c^2=1$$

$$\begin{cases} s=2c \\ s^2+c^2=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sustituyendo}} (2c)^2+c^2=1 \quad\rightarrow\quad 4c^2+c^2=1$$

$$\rightarrow\quad 5c^2=1 \quad\rightarrow\quad c^2=\frac{1}{5} \quad\rightarrow\quad c=+\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Como}\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}\ \text{y}\ \text{sen}\alpha=2\cos\alpha \quad\rightarrow\quad \text{sen}\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por tanto, $\cos\alpha=0{,}45$ y $\text{sen}\ \alpha=0{,}89$

Relaciones entre razones trigonométricas

Los valores de sen, cos y tg de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionados, de tal modo que conociendo uno de ellos, podemos calcular los otros dos. La expresión que los relaciona se llama identidad fundamental de la trigonometría y viene dada por:

$$\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$

Si jugamos con esta expresión, podemos llegar a que las relaciones entre las razones trigonométricas son:

$$\boxed{\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \qquad \text{tg}(\alpha)=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \text{tg}^2(\alpha)+1=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}}$$

Además de para calcular las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo conocida una de ellas, también las podemos utilizar para verificar o demostrar otras.

Demuestra la expresión trigonométrica: $\frac{1-sen\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+sen\alpha}$

Si multiplicamos en cruz:

$$\frac{1-sen\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+sen\alpha} \quad\rightarrow\quad (1-sen\alpha)\cdot(1+sen\alpha)=\cos^2\alpha \quad\rightarrow$$

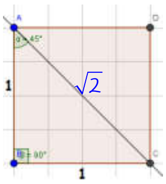
$$\rightarrow\quad 1-sen^2\alpha=\cos^2\alpha \quad\rightarrow\quad 1=sen^2\alpha+\cos^2\alpha \quad\rightarrow\quad 1=1$$

Llegamos a la identidad fundamental de la trigonometría, por tanto, quedaría demostrado, ya que 1 es igual a 1.

Razones de 30, 45 y 60

Los razones de 30°, 45° y 60° aparecerán con mucha frecuencia, por lo que resultan especialmente interesantes en geometría.

ANGULO de 45°



En un cuadrado de lado unidad, la diagonal, **d**, la calculamos mediante el Teorema de Pitágoras y su valor es: $d=\sqrt{2}$. Con esto, y utilizando lo visto anteriormente, llegamos a:

$$\begin{cases} \text{sen}45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Cos}\ 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \ \text{y de donde} \quad\rightarrow\quad \tan 45^\circ=\frac{\text{sen}\ 45}{\cos\ 45}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

ÁNGULO de 30°

Con un triángulo equilátero de lado l, en el que calculamos su altura en función de dicho lado utilizando otra vez el teorema de Pitágoras:

$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3l^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}l$$

De aquí, tenemos que:

$$\begin{cases}\operatorname{sen} 30^\circ=\dfrac{l/2}{l}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \cos 30^\circ=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\quad \text{de donde} \quad \rightarrow \quad \tan 30^\circ=\frac{\operatorname{Sen} 30}{\cos 30^\circ}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ÁNGULO de 60°

De forma similar, y usando el mismo triángulo, llegamos a:

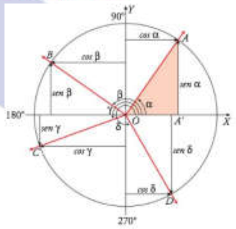
$$\begin{cases}\operatorname{sen} 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\frac{l}{2}}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2mm] \cos 60^\circ=\dfrac{l/2}{l}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad \rightarrow \quad \tan 60^\circ=\frac{\operatorname{Sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$$

Por tanto, tenemos que: $\operatorname{sen} 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y

$\operatorname{sen} 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

De donde deducimos que si α y β son dos ángulos complementarios, ocurre que: $\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta$ y $\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta$

Razones de un ángulo cualquiera



En una circunferencia de centro (0,0) y radio 1, cada ángulo α queda determinado por un punto A de coordenadas (x, y), sobre la dicha circunferencia, y se cumple además que:

$$A=(x,y)=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$$

Como la hipotenusa del triángulo mide 1, tendremos que: $\operatorname{sen}\alpha=y$ y que $\cos\alpha=x$ CY con esto:

ÁNGULO de 0°

$$\begin{cases}\operatorname{Sen} 0^\circ=\dfrac{\text{cat.opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\dfrac{0}{1}=0\\[2mm] \operatorname{Cos} 0^\circ=\dfrac{\text{cat.contiguo}}{\text{hipotenusa}}=\dfrac{1}{1}=1\end{cases}\quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} 0^\circ=\frac{\operatorname{sen}0^\circ}{\cos 0^\circ}=\frac{0}{1}=0$$

ÁNGULO de 90°

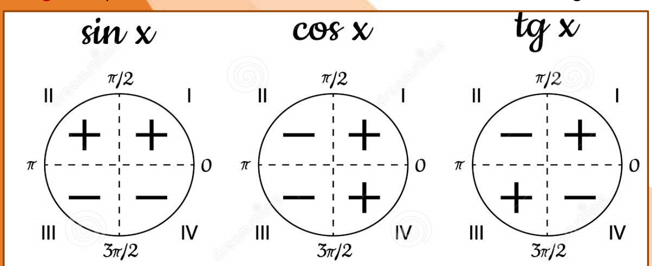
$$\begin{cases}\operatorname{Sen} 90^\circ=\dfrac{\text{cat.opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\dfrac{1}{1}=1\\[2mm] \operatorname{Cos} 90^\circ=\dfrac{\text{cat.contiguo}}{\text{hipotenusa}}=\dfrac{0}{1}=0\end{cases}\quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} 90^\circ=\frac{\operatorname{sen}0^\circ}{\cos 0^\circ}=\frac{1}{0}=+\infty$$

ÁNGULO de 180° o ángulo Llano

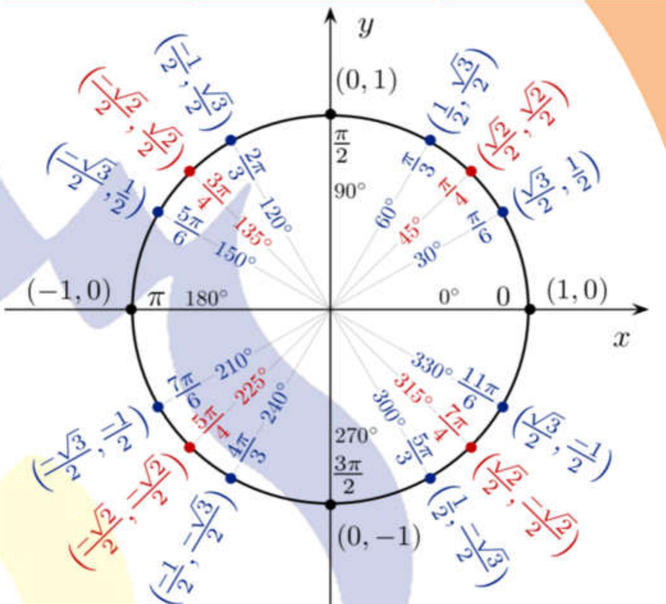
$$\begin{cases}\operatorname{Sen} 180^\circ=\dfrac{\text{cat.opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\dfrac{0}{1}=0\\[2mm] \operatorname{Cos} 180^\circ=\dfrac{\text{cat.contiguo}}{\text{hipotenusa}}=\dfrac{-1}{1}=-1\end{cases}\quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} 180^\circ=\frac{\operatorname{sen}180^\circ}{\cos 180^\circ}=\frac{0}{-1}=0$$

Signo de las razones trigonométricas

El signo depende del cuadrante donde se encuentre dicho ángulo.



Senos y Cosenos más importantes



Como podemos ver en la circunferencia goniométrica los valores tanto del seno como del coseno de cualquier ángulo están acotados:

$$-1\le \operatorname{sen}(\alpha)\le 1 \qquad -1\le \cos(\alpha)\le 1$$

Relaciones trigonométricas

Dos ángulos, α y β, son complementarios cuando $\alpha+\beta=90^\circ$.

$\operatorname{Sen}(90-\alpha)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{Cos}(90-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$

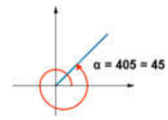
Dos ángulos, α y β, son suplementarios cuando $\alpha+\beta=180^\circ$.

$\operatorname{Sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{Sen}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{Cos}(\pi-\alpha)=-\operatorname{Cos}\alpha$

Dos ángulos, α y β, son opuestos cuando $\alpha+\beta=360^\circ$.

$\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$

Ángulos mayores de 360°: Para calcular sus razones trigonométricas, haremos la división entera de dicho ángulo entre 360, y calcularemos las razones del resto de la división.



$\operatorname{sen}(\alpha+2k\pi)=\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$

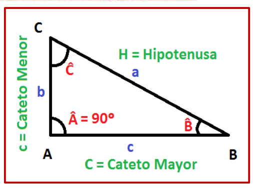
Calcula el seno del ángulo 405°.

Como 405 = 360 + 45, el seno de 405 es igual que el de 45, por tanto:

$$sen(405^\circ)=sen(45^\circ)=\sqrt{2}/2$$

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es hallar las medidas de todos sus lados y todos sus ángulos a partir de otros datos conocidos, para lo que nos ayudaremos del Teorema de Pitágoras, de los ángulos complementarios y de las razones trigonométricas principales. Sen, Cos y Tg.



Resuelve el triángulo rectángulo del que sabemos que su hipotenusa es de 15 cm y el ángulo B es de 30°.

Lo primero es calcular el ángulo C = 90− 30 = 60°

Para determinar el cateto b, usaremos el seno de B;

$$\operatorname{sen}B=\frac{b}{a}\quad\rightarrow\quad \operatorname{sen}30=\frac{b}{15}\quad\rightarrow\quad b=15\cdot\operatorname{sen}30=15\cdot\frac{1}{2}=7{,}5\text{ cm}$$

Para calcular el cateto c, lo podemos hacer mediante el teorema de Pitágoras, o mediante el coseno de 30°.

Mediante Pitágoras: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{15^2-7{,}5^2}=12{,}99\text{ cm}$

Y como: $\cos 30=\frac{c}{15}\quad\Rightarrow\quad c=15\cdot\cos 30=15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12{,}99\text{ cm}$

Por tanto: A=90°, B=30°, C=60°, a=15 cm, b=7,5 cm y c=12,99 cm.