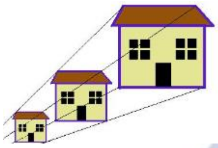
Semejanza y Teoremas

Figuras Semejantes

Dos figuras distintas son **semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado razón de semejanza, **k**.



- Si la razón de semejanza de dos figuras es **k**, entonces la razón de sus áreas es k^2.
- Si la razón de semejanza de dos cuerpos es **k**, entonces la razón de sus volúmenes es k^3.

Escala en mapas, planos y figuras

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en las mismas unidades.

Escala Numérica	Unidad por unidad	Escala Gráfica
1 : 500	1 cm : 5 km	
Expresa la relación entre el valor de la representación y el valor real.	Expresa la igualdad de una longitud en la representación y en la realidad.	Muestra la relación entre la longitud de la representación y la de la realidad.

En un mapa de Andalucía, la distancia entre Sevilla y Granada es de 6 cm, si la escala es 1:4.000.000, ¿a qué distancia real están ambas ciudades?

$$6 \cdot 4.000.000 = 24.000.000\ cm = 240\ km$$

La distancia entre Granada y Sevilla es de 240 Km.

Para obtener la escala dividiremos la distancia en el plano entre la distancia real, sin olvidarnos de ponerlas en las mismas unidades (no podemos dividir centímetros entre kilómetros).

$$Escala = \frac{Medida\ en\ plano\ (cm)}{Medida\ real\ (cm)}$$

Un avión viaja, en línea recta, entre la isla del Hierro y la isla de Ibiza. Si en un plano la distancia entre ambas islas es de 20 cm, ¿Cuál sería la escala de dicho plano si la distancia real es de 2.200 km?

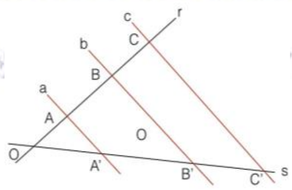
Calcularemos la escala dividiendo la distancia en el plano, entre la real:

$$\frac{Medida\ en\ plano\ (cm)}{Medida\ real\ (cm)} = \frac{20\ cm}{2200\ \cancel{km} \cdot \frac{1000\ \cancel{m}}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{10cm}{1\ \cancel{m}}} = \frac{20\ \cancel{cm}}{22.000.000\ \cancel{cm}} = \frac{1}{1.100.000}$$

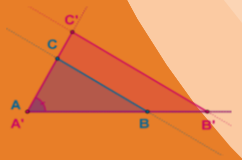
Luego la escala es: 1:1.100.000

Teorema de Thales

Cuando dos rectas (r y s) son cortadas por una serie de rectas paralelas (a, b, c,....), los segmentos que determinan en una de las rectas son proporcionales a los que determinan en la otra. Matemáticamente:



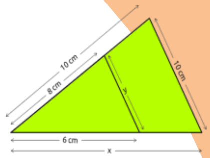
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$



Decimos que dos **triángulos** están **en posición Tales** cuando dos de sus lados están sobre las mismas rectas y los otros dos lados son paralelos. Por tanto, aquí también podemos aplicar Thales:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'} \quad y \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

Calcula el valor de x e y en la siguiente figura:



Tenemos dos triángulos en posición Tales, por tanto, sus lados son proporcionales y para calcular x haremos lo siguiente:

$$\frac{8}{10} = \frac{6}{x} \rightarrow 8x = 6 \cdot 10 \rightarrow x = \frac{60}{8} = 7{,}5\ cm$$

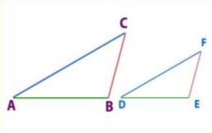
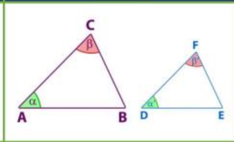
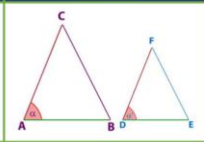
Para calcular y haremos:

$$\frac{8}{y} = \frac{10}{10} \rightarrow 10y = 8 \cdot 10 \rightarrow y = \frac{80}{10} = 8\ cm$$

Por tanto, x=7,5 cm e y=8 cm.

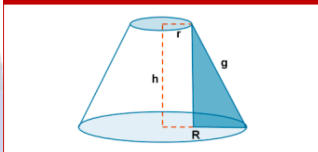
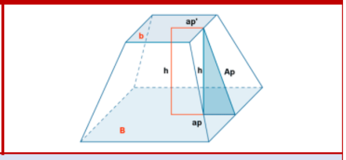
CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Decimos que **dos triángulos son semejantes** entre sí:

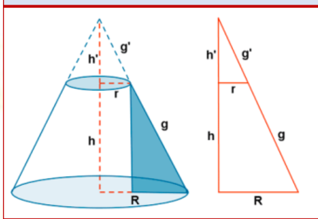
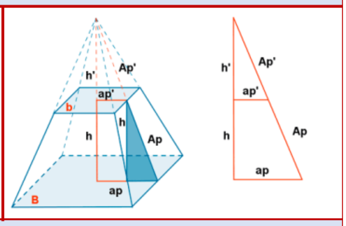
Si tienen los tres lados proporcionales.	Si tienen dos ángulos iguales	Si tienen dos lados proporcionales y un mismo ángulo
Criterio I	**Criterio II**	**Criterio III**
		
Si, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$ Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	Si, $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\alpha'$ y, $\measuredangle\beta \cong \measuredangle\beta'$ Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	Si, $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$ y, $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\alpha'$ Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Aplicaciones de la semejanza de Triángulos

Para calcular el volumen tanto de un tronco de cono como de un tronco de pirámide, lo primero será ampliarlos continuando las líneas hasta obtener las dos figuras completas: un cono o una pirámide.

TRONCO DE CONO	TRONCO DE PIRÁMIDE
	

Para calcular el volumen tanto de un tronco de cono como de un tronco de pirámide, lo primero será ampliarlos continuando las líneas hasta obtener las dos figuras completas: un cono o una pirámide

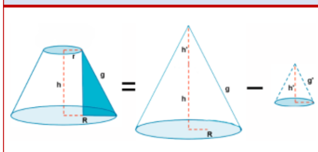
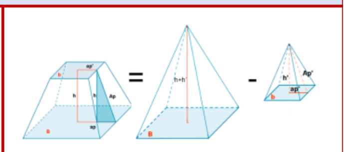
	

Si llamamos **h'** a la altura añadida, podemos utilizar la semejanza de triángulos para calcularla con la ayuda de los datos del problema.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{r}{R} = \frac{h'}{h+h'} \\ \frac{r}{R} = \frac{g'}{g+g'} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h'}{h+h'} = \frac{g'}{g+g'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ap'}{ap} = \frac{Ap'}{Ap'+Ap} \\ \frac{ap'}{ap} = \frac{h'}{h'+h} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{ap'}{ap} = \frac{Ap'}{Ap'+Ap} = \frac{h'}{h'+h}$$

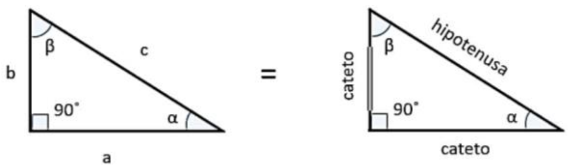
Una vez calculada **h'**, ya tendremos la altura total tanto del cono como de la pirámide, ambos completos y calcularemos los volúmenes de los troncos, restando al volumen del cono completo (o de la pirámide) el volumen del cono añadido (o de la pirámide).

	
$V_{Tronco\ de\ Cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (h+h') - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h'$	$V_{Tronco\ de\ Pirámide} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot (h+h') - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h'$

Teorema de Pitágoras

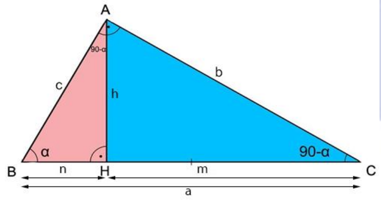
En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, y matemáticamente se expresa:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



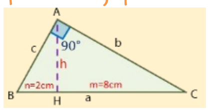
Teorema del Cateto

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de cualquier cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre ella.



$$c^2 = a \cdot n \qquad b^2 = a \cdot m$$

Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo del que se conoce la medida de los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa, que son m=8 y n=2 cm.



Si observamos el dibujo, vemos que la atura divide el triángulo ABC en otros dos HAC y HAB, y que los tres son semejantes, así que, si aplicamos dos veces el teorema del cateto:

$$b^2 = a \cdot m \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{a \cdot m} = \sqrt{10 \cdot 8} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\ cm$$

$$c^2 = a \cdot n \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a \cdot n} = \sqrt{10 \cdot 2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ cm$$

Podemos calcular el valor de ambos, y con ellos y el valor de la hipotenusa. Y con todos ellos, el perímetro del triángulo:

$$P = 10 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 10 + 6\sqrt{5} = 23{,}416\ cm$$

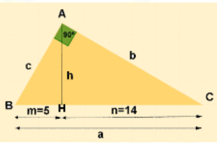
Por tanto, el perímetro es de aproximadamente 23,42 cm.

Teorema de la altura

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura (h) sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (n y m).

$$h^2 = m \cdot n$$

En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de longitudes 5 y 14 cm. Halla el área de dicho triángulo.



Si observamos el dibujo, vemos que la atura divide el triángulo ABC en otros dos HAC y HAB, y ambos son semejantes, así que, si aplicamos el teorema de la altura:

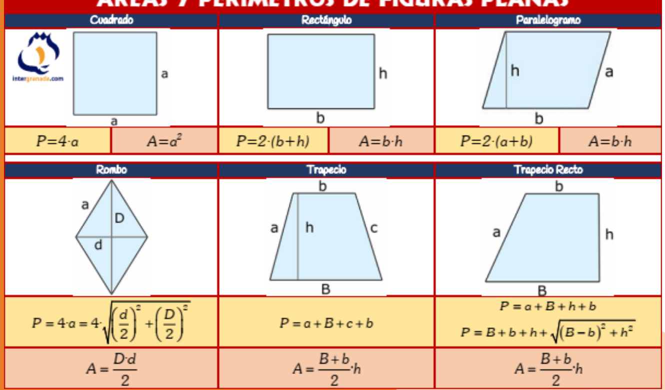
$$h^2 = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{5 \cdot 14} = \sqrt{70} = 8{,}37\ cm$$

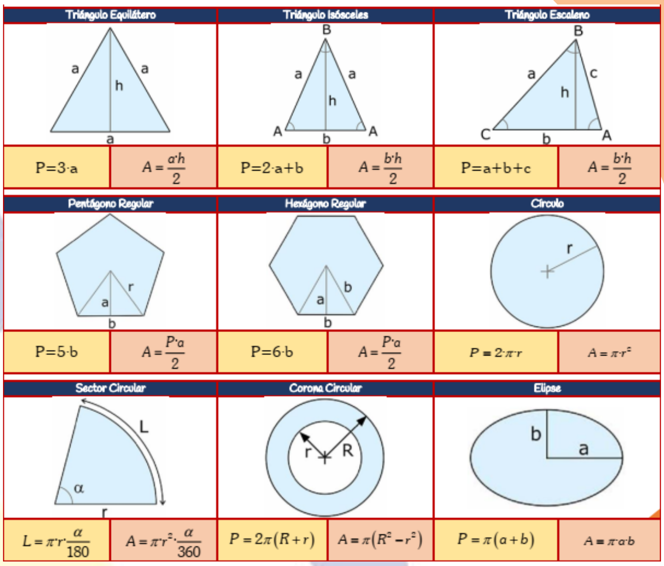
Conocida la altura, ya podemos calcular su área:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(5+14)\cdot\sqrt{70}}{2} = 79{,}48\ cm^2$$

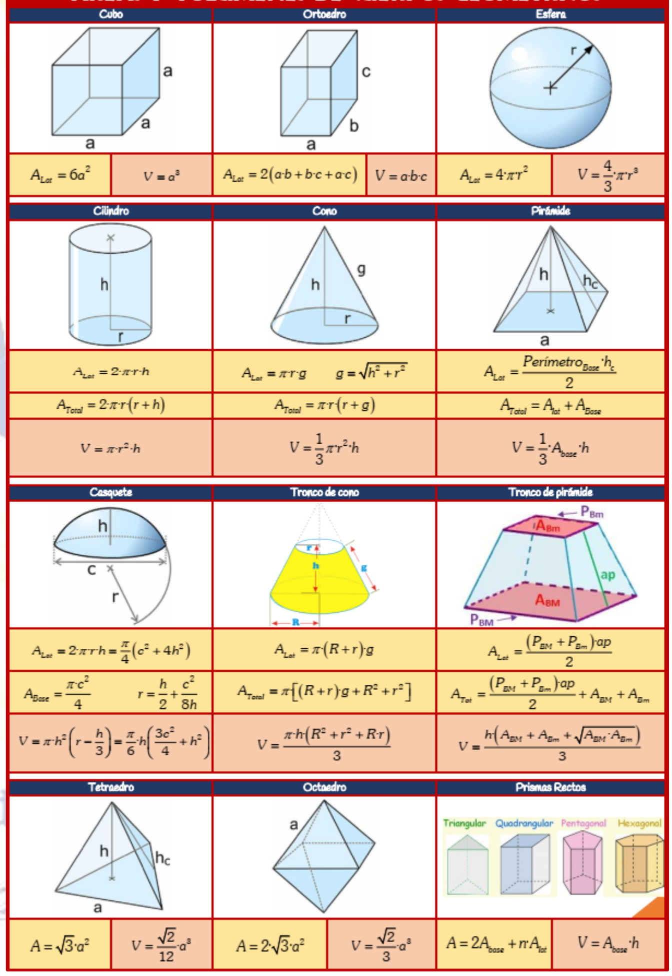
Por tanto, el área es de aproximadamente 79,5 cm².

ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS

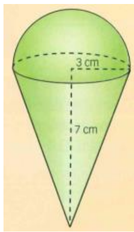




ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS



Calcula el área de la siguiente figura:



La figura está formada por un cono y una semi esfera, así que para calcular su área, calcularemos el área lateral del cono, y el área de una semiesfera:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{Lateral de lcono}} = \pi \cdot r \cdot g = 3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3^2+7^2} = 3\pi\sqrt{58}\ cm^2 \\ A_{\text{Semi Esfera}} = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 3^3 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 27 = 18\pi\ cm^2 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \quad A_{Total} = 3\pi\sqrt{58} + 18\pi = 128{,}33\ cm^2$$

Por tanto, el área de la figura es de casi 130 cm².