Potencias, Raíces y Logaritmos

Las potencias y sus propiedades

Una **potencia** es una multiplicación de factores iguales en la que la **base** es el número que se repite y el **exponente** el número de veces que se repite.

Exponente — Potencia — 3 veces

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

Base — Se lee 4 elevado a la 3

Propiedades de las potencias

Producto	Cociente
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$	$a^b : a^c = a^{b-c}$
$a^c \cdot b^c = (a\cdot b)^c$	$a^c : b^c = (a:b)^c$

Potencia	Exponente Negativo
$a^0 = 1 \quad a^1 = a$	$a^{-b} = \dfrac{1}{a^b} \quad a^{-\frac{b}{c}} = \dfrac{1}{\sqrt[c]{a^b}}$
$(a^b)^c = a^{b\cdot c}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{c}$
$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$	

Radicales y sus propiedades

Llamamos **radical** a cualquier expresión matemática que contenga una raíz de cualquier índice en la que no se puedan extraer factores del **radicando**. Por ejemplo $\sqrt{3}$ es un radical, pero $\sqrt{4}$ no, porque se pueden sacar factores de la raíz.

Propiedades de los Radicales

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n.
- Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe si n es impar.

Producto	Cociente
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \quad si\ b \neq 0$

Potencia	Raíz de Raíz
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

Decimos que dos **radicales** son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Operaciones con Radicales

Reducción a índice común: Para operar radicales de distinto índice es necesario reducirlos a otros equivalentes cuyo índice sea el mínimo común múltiplo de los índices.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^5} \qquad \sqrt[3]{16} : \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^8} : \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^5}$$

Introducción de factores: Para introducir factores dentro de un radical, el factor que está fuera se escribe dentro elevado al índice de la raíz.

$$-5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(-5)^3\cdot 4} = \sqrt[3]{-500} = -\sqrt[3]{500}$$

Simplificación: Para simplificar radicales, se factoriza el radicando y se extraen todos los posibles factores del radical. Después, si es posible, con la ley de exponentes fraccionarios se reduce su índice.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{729}b^5\cdot c^7\cdot m^{14}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^6}b^5\cdot c^7\cdot m^{14}} = \frac{2}{3^2}\cdot b\cdot c^2\cdot m^4\cdot\sqrt[3]{b^2\cdot c\cdot m^2}$$

Suma y Resta: Para sumar o restar radicales, se extrae factor común y se operan los coeficientes siempre y cuando sean semejantes, si no lo son, no se pueden sumar.

$$\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = (1+5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Existen casos en los que de primeras no parecen semejantes, pero una vez simplificados sí lo son.

$$3\sqrt{27} - 2\sqrt{243} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} = 3\cdot\sqrt{3^3} - 2\sqrt{3^5} + \sqrt{3\cdot 5^2} - 2\cdot\sqrt{3\cdot 2^4} =$$
$$= 3\cdot 3\sqrt{3} - 2\cdot 3^2\cdot\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\cdot 2^2\cdot\sqrt{3} = 9\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} =$$
$$= (9-18+5-8)\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$$

Es importante remarcar que la suma algebraica de dos radicales no es igual a la raíz de la suma algebraica de los radicandos. $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$

Racionalización de Radicales

Llamamos **racionalización** al proceso mediante el cual quitamos los radicales de un denominador. Según sea, tenemos:

Caso 1: El denominador es una raíz cuadrada

Si el denominador contiene un solo término formado por una raíz cuadrada, se racionaliza multiplicando numerador y denominador por dicha raíz cuadrada.

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}$$

Caso 2: El denominador es un radical de índice cualquiera

Si el denominador contiene un solo término formado por una raíz de índice cualquiera, se racionaliza multiplicando el numerador y el denominador por el radical del mismo orden necesario para completar la raíz.

$$\frac{12}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{12}{\sqrt[5]{7^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{12\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{12\cdot\sqrt[5]{7^3}}{7}$$

Caso 3: El denominador es un binomio con raíces cuadradas

Si el denominador contiene la suma de dos términos, y en uno de los ellos (o en los dos) hay una raíz cuadrada, se racionaliza utilizando la tercera identidad notable. Es decir, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$, donde (a+b) y (a−b) son **binomios conjugados.**

$$\frac{7}{1+\sqrt{2}} = \frac{7}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{7\cdot(1-\sqrt{2})}{\underbrace{(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})}_{\text{SUMA X DIFERENCIA}}} = \frac{7-7\sqrt{2}}{\underbrace{1-(\sqrt{2})^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}} =$$
$$= \frac{7-7\sqrt{2}}{1-\sqrt{2^2}} = \frac{7-7\sqrt{2}}{1-\sqrt{4}} = \frac{7-7\sqrt{2}}{1-2} = \frac{7-7\sqrt{2}}{-1} = 7\sqrt{2}-7$$

Logaritmos y sus propiedades

Se llama **logaritmo en base b** de un número a, con a>0, al exponente al que hay que elevar el número b para obtener a.

Argumento o antilogaritmo — exponente

$$\log_b a = c \iff b^c = a$$

base del logaritmo — logaritmo — base — potencia

Si la base es 10, se llaman **logaritmos decimales** y se representan: $\log P = x \iff 10^x = P$

Si la base es el número **e**, se llaman **logaritmos neperianos** o naturales y se expresan por ln: $\ln P = x \iff e^x = P$

$$\log_2 32 = x \to 2^x = 32 \to 2^x = 2^5 \to x = 5 \to \log_2 32 = 5$$
$$\log_5 \frac{1}{5} = x \to 5^x = \frac{1}{5} = 5^{-1} \to 5^x = 5^{-1} \to x = -1 \to \log_5 \frac{1}{5} = -1$$

El Logaritmo y la exponencial son operaciones inversas como pasa con la potencia y la raíz.

Propiedades de los Logaritmos

- $\log_a 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a^0 = 1$
- $\log_a a = 1 \quad \rightarrow \quad a^1 = a$
- $\log_a a^Q = Q \quad \rightarrow \quad a^Q = a^Q$

Producto	Cociente
$\log_a(P\cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$	$\log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$
Potencia	**Raíz**
$\log_a (P)^Q = Q\cdot\log_a P$	$\log_a \sqrt[Q]{P} = \frac{1}{Q}\cdot\log_a P$
Exponencial	**Igualdad**
$a^{\log_a x} = \cancel{a}^{\cancel{\log_a} x} = x$	$\log_a P = \log_a Q \rightarrow P = Q$

Cambio de Base

La mayoría de las calculadoras científicas sólo permiten calcular o logaritmos decimales o logaritmos neperianos, así que si necesitamos calcular el logaritmo en cualquier otra base tendremos que hacer lo que se conoce como cambio de base.

El logaritmo de un número N en la base a, es el cociente del logaritmo en la base x (la que queramos) del número N entre el logaritmo en dicha base x, de la base antigua a.

$$\log_P Q = \frac{\log_x Q}{\log_x P} = \frac{\log Q}{\log P} = \frac{\ln Q}{\ln P}$$

Ejemplo: Calcula el valor de $\log_3 7$:

Si utilizamos la fórmula del cambio de base: $\log_3 7 = \frac{\log(7)}{\log(3)} = 1{,}77$

Así que $\log_3 7 = 1{,}77$

Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Una ecuación exponencial es una ecuación en la que la incógnita, la x normalmente, aparece en el exponente de una potencia. Como por ejemplo:

$$2^{2x-4} = 64$$

Para resolverla basta con conseguir en ambos miembros la misma base, y así, podremos igualar los exponentes.

$$2^{2x-4} = 64 \rightarrow 2^{2x-4} = 2^6 \rightarrow 2x - 4 = 6$$
$$\rightarrow 2x = 6 + 10 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$$

En este tipo de ecuaciones siempre hay que verificar si la solución o soluciones son correctas.

$$2^{2x-4} = 64 \rightarrow 2^{2\cdot 5-4} = 2^6 = 64 \qquad c.q.d.$$

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita aparece dentro de un logaritmo. Para resolverlas hemos de tener en cuenta las propiedades de los logaritmos vistas con anterioridad. Ejemplo de este tipo de ecuaciones es:

$$\log 2 + \log(11-x^2) = 2\cdot\log(5-x)$$

Para resolverla usamos las propiedades de los logaritmos para conseguir en ambos miembros dos logaritmos de argumentos iguales.

$$\underbrace{\log 2 + \log(11-x^2)}_{\text{Propiedad 5}} = \underbrace{2\cdot\log(5-x)}_{\text{Propiedad 7}} \rightarrow \underbrace{\log\left[2\cdot(11-x^2)\right] = \log(5-x)^2}_{\text{Propiedad 9}}$$
$$\rightarrow \left[2\cdot(11-x^2)\right] = (5-x)^2 \xrightarrow[\text{Operamos}]{} 22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2$$
$$\xrightarrow[\text{Agrupamos}]{} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \rightarrow x = 3 \quad y \quad x = \frac{1}{3}$$

En este tipo de ecuaciones siempre hay que verificar si la solución o soluciones son correctas:

Si sustituimos x=3:

$$\log 2 + \log(11-x^2) = 2\cdot\log(5-x)$$
$$\log 2 + \log(11-9) = 2\cdot\log(5-3)$$
$$\log 2 + \log 2 = 2\cdot\log 2 \qquad c.q.d.$$

Si sustituimos x=1/3:

$$\log 2 + \log(11-x^2) = 2\cdot\log(5-x)$$
$$\log 2 + \log\left(11-\frac{1}{9}\right) = 2\cdot\log\left(5-\frac{1}{3}\right)$$
$$\log 2 + \log\left(\frac{98}{9}\right) = 2\cdot\log\left(\frac{14}{3}\right)$$
$$\log\left(2\cdot\frac{98}{9}\right) = \log\left(\frac{14}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{196}{9} = \frac{196}{9} \qquad c.q.d.$$

Por tanto, las soluciones son 3 y 1/3 son correctas.

Notación Científica

La notación científica nos permite escribir números muy grandes o muy pequeños de forma abreviada. En ella, un número (de 1 a 9) es multiplicado por una potencia de base 10.

$a \times 10^n$ — $1 \le a < 10$ — n: número entero

$0{,}00547 \rightarrow 5{,}47\cdot 10^{-3}$ $\qquad 5.700.000 \rightarrow 5{,}7\cdot 10^6$

Siempre el exponente es igual al número de cifras decimales que debe correrse la coma para convertir un número escrito en notación científica en el mismo escrito en notación decimal. Se desplazará la coma a la derecha si el exponente es positivo y hacia la izquierda si es negativo.

Resolución de Problemas

En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

a) Lectura y comprensión del enunciado.
b) Análisis de los datos del enunciado. (Ayudarse con un dibujo)
c) Plantear las operaciones y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
d) Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
e) Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo que nos piden? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

Ejemplo

Una empresa recibe un crédito al 8% anual, con la condición de devolver en un solo pago la cantidad prestada más los intereses. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la deuda?

Se trata de un problema de interés compuesto en el que si el crédito concedido (capital inicial) se duplica, quiere esto decir que, los intereses son iguales al crédito concedido (capital inicial):

$$C_f = C_o\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow 2\cancel{C_o} = \cancel{C_o}\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow$$

Si aplicamos logaritmos a ambos miembros de la igualdad, podemos despejar t:

$$2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \xrightarrow[\text{Aplicamos Logaritmos}]{} \ln(2) = t\cdot\ln\left(1+\frac{r}{100}\right) \xrightarrow[\text{Despejamos t}]{}$$
$$t = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{8}{100}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}08)} = 9 \text{ años}$$

Por tanto, La deuda se duplicará en 9 años.