Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

11

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 220

a) $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$

b) $\log_4 16 = 2$ porque $4^2 = 16$

c) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{8}$

d) $\log_5 1 = 0$ porque $5^0 = 1$

2. Página 220

a) $sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $sen\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $sen\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $sen\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

VIDA COTIDIANA

LA INCUBADORA. Página 221

$3^5 = 243$ bacterias al cabo de 5 horas.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 226

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$f(x) = \log_a(-x)$

ACTIVIDADES

1. Página 222

Las gráficas I) y II) son decrecientes entonces $a < 1$. La gráfica II) es más cerrada por tanto:

Gráfica I): $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ y gráfica II): $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

Las gráficas III) y IV) son crecientes entonces $a > 1$. La gráfica III) es más cerrada por tanto:

Gráfica III): $y = 9^x$ y gráfica IV): $y = 6^x$

2. Página 222

a) $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$, la función es decreciente ya que $a<1$.

b) $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x$, la función es decreciente ya que $a<1$ y la gráfica es más cerrada que la anterior ya que a es menor.

c) $f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x$, la función es creciente ya que $a>1$.

3. Página 222

Son la misma función.

$$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{\frac{5}{3}}\right)^x=\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-x}=g(x)$$

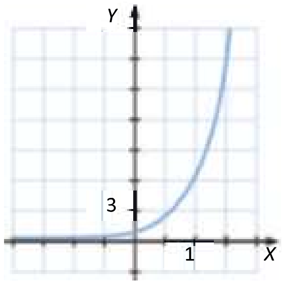
4. Página 223

a) $y=7^x$ es creciente ya que $7>1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=7$, luego pasa por (1, 7).

Construimos una tabla de valores:

x	–1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
7^x	$\frac{1}{7}$	1	7	$\sqrt{343}$	49

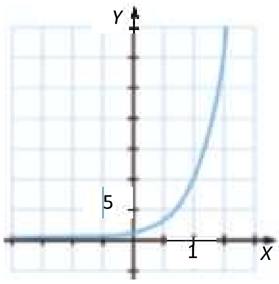


b) $y=10^x$ es creciente ya que $10>1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=10$, luego pasa por (1, 10).

Construimos una tabla de valores:

x	–1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
10^x	$\frac{1}{10}$	1	10	$\sqrt{1000}$	100

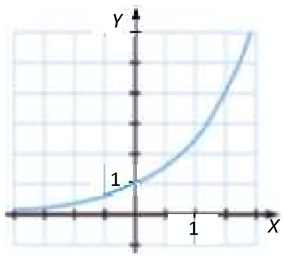


c) $y=2{,}5^x$ es creciente ya que $2{,}5>1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=2{,}5$, luego pasa por (1; 2,5).

Construimos una tabla de valores:

x	–1	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$2{,}5^x$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{5}{2}$	$\sqrt{\frac{125}{8}}$	$\frac{25}{4}$



5. Página 223

La gráfica I) corresponde a la función $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ por ser la más cerrada de las tres ya que tiene el *a* mayor.

Por otro lado 1,3 < $\frac{4}{3}$ = 1,33333… Luego la gráfica II) se corresponde con $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ y la gráfica III) con la función $y=1{,}3^x$.

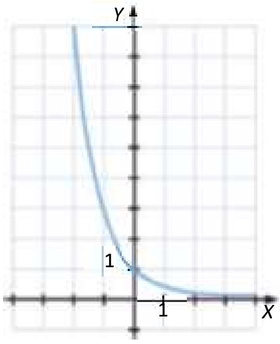
6. Página 223

a) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ es decreciente ya que $\frac{1}{3}<1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=\frac{1}{3}$, luego pasa por $\left(1,\frac{1}{3}\right)$.

Construimos una tabla de valores:

x	−2	−1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

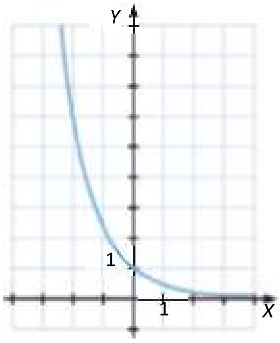


b) $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ es decreciente ya que $\frac{2}{5}<1$.

Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=\frac{2}{5}$, luego pasa por $\left(1,\frac{2}{5}\right)$.

Construimos una tabla de valores:

x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{25}{4}$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$

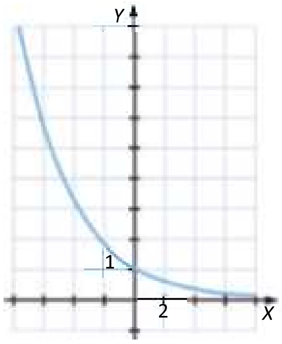


c) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ es decreciente ya que $\frac{3}{4}<1$.

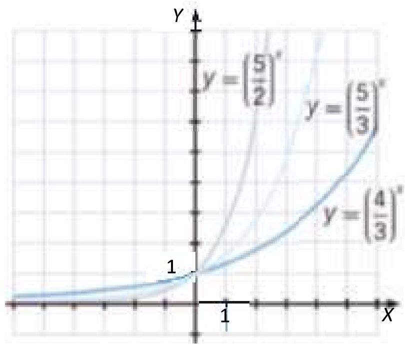
Como es una función exponencial pasa por el punto (0, 1) y en este caso $a=\frac{3}{4}$, luego pasa por $\left(1,\frac{3}{4}\right)$.

Construimos una tabla de valores:

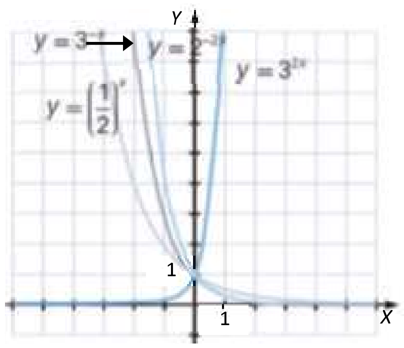
x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$



7. Página 223



8. Página 223



9. Página 224

La gráfica verde corresponde con la función $f(x)=2^x$ ya que corta en el punto (0,1). La azul con la función $g(x)=2^{x+2}$ ya que se traslada la gráfica de $f(x)=2^x$ 2 unidades hacia a la izquierda. Por último la roja corresponde con la gráfica de $h(x)=2^x+2$ ya que se traslada la gráfica $f(x)=2^x$ 2 unidades hacia arriba.

10. Página 224

A partir de $g(x)=3^x$ se obtendría $f(x)=3^{x-1}+3$, trasladándola 3 unidades hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

11. Página 224

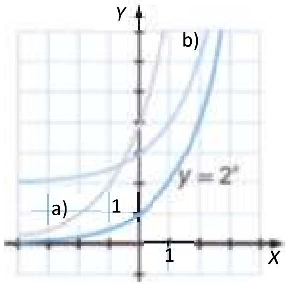
La función $f(x)$ pasa por (0, 1) y (–1, 2), a partir de esos puntos vemos como se traslada la función representada.

$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}-2$ ya que traslada $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ en 2 unidades hacia abajo y 3 hacia la izquierda.

12. Página 225

Representamos $f(x)$ y a partir de ella trasladamos la función, en el caso de $g(x)$ la trasladamos 2 unidades a la izquierda y en el caso de $h(x)$ la trasladamos 2 unidades hacia arriba.

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



13. Página 225

Representamos $f(x)$ y a partir de ella trasladamos la función

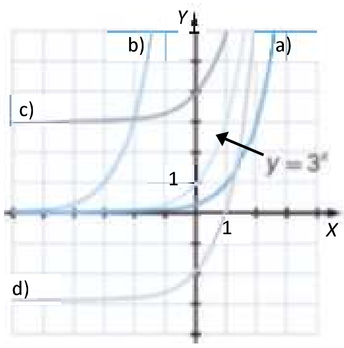
x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

a) Se traslada 1 unidad a la derecha.

b) Se traslada 3 unidades a la izquierda.

c) Se traslada 3 unidades hacia arriba.

d) Se traslada 3 unidades hacia abajo.



14. Página 225

Todas estas funciones son traslaciones de la función $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, como $\frac{1}{2}<1$ todas son decrecientes. La representamos y trasladamos según corresponda.

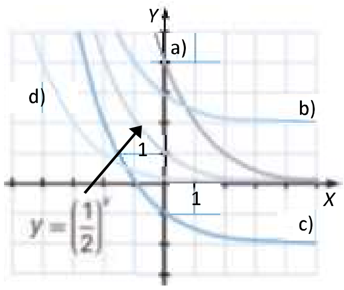
x	−2	−1	0	1	2
f(*x*)	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

a) Se traslada 2 unidades a la derecha.

b) Se traslada 2 unidades hacia arriba.

c) Se traslada 2 unidades hacia abajo.

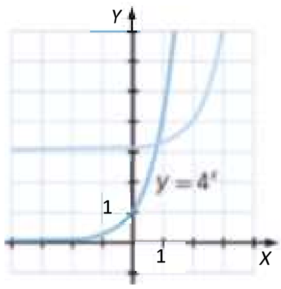
d) Se traslada 2 unidades a la izquierda.



15. Página 225

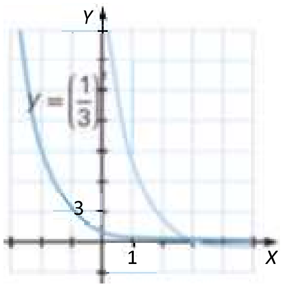
a) $f(x)=4^{x-2}+3$ es traslación de la función 4^x, moviéndola 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba.

x	−1	0	1	2
f(*x*)	$\frac{1}{4}$	1	4	16



b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}-1$ es traslación de la función $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, moviéndola 3 unidades a la derecha y una hacia abajo.

x	−2	−1	0	1
f(*x*)	9	3	1	$\frac{1}{3}$



16. Página 226

Las gráficas III) y IV) son decrecientes entonces $a < 1$. La gráfica III) pasa por el punto (5, –1).

Gráfica III): $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ y gráfica IV): $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Las gráficas I) y II) son crecientes entonces $a > 1$. La gráfica II) es más cerrada, por tanto:

Gráfica I): $y = \log_2 x$ y gráfica II): $y = \log_5 x$.

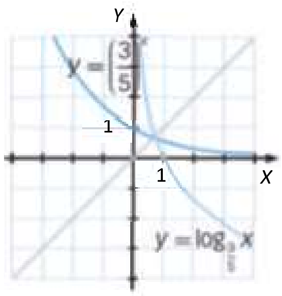
17. Página 226

Las tres pasan por el punto (1, 0).

La a) y c) son crecientes y b) es decreciente. Además, a) es más cerrada que c) porque $2 > 5/3$.

La gráfica a) pasa por el punto (2, 1), la b) por el (2/3, 1) y la c) por la (5/3, 1).

18. Página 226



Son simétricas respecto de la recta $y = x$. La composición de las dos es la identidad (son funciones inversas).

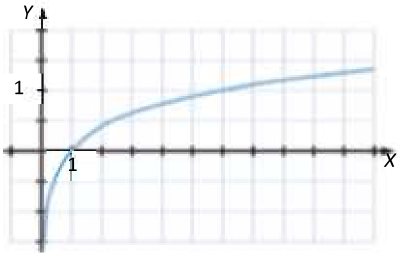
$$\left.\begin{array}{l} g(f(x)) = g\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x\right) = \log_{\frac{3}{5}}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x\right) = x \\ f(g(x)) = f\left(\log_{\frac{3}{5}} x\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{\frac{3}{5}} x} = x \end{array}\right\}$$

19. Página 227

a) $y = \log_6 x$ es una función creciente ya que $6 > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y (6, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

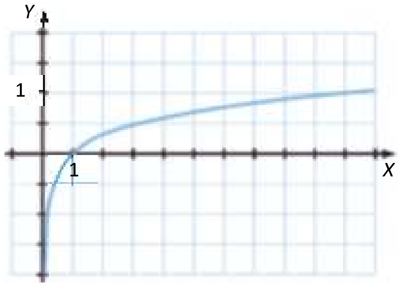
x	$\frac{1}{6}$	1	6	36
$f(x)$	–1	0	1	2



b) $y = \log x$ es una función creciente ya que 10 > 1. Pasa por los puntos (1, 0) y (10, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

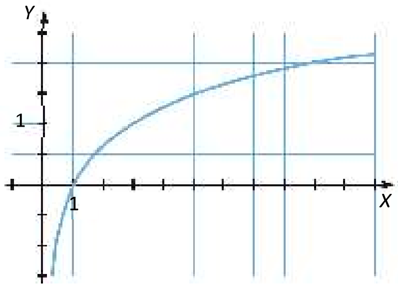
x	$\frac{1}{10}$	1	$\sqrt{10}$	10
$f(x)$	−1	0	$\frac{1}{2}$	1



c) $y = \log_3 x$ es una función creciente ya que 3 > 1. Pasa por los puntos (1, 0) y (3, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

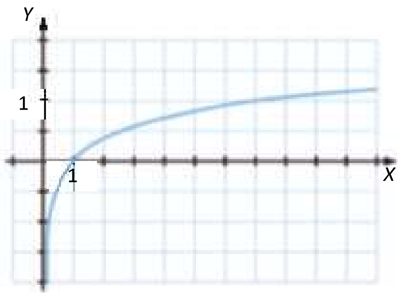
x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x)$	−1	0	1	2



d) $y = \log_7 x$ es una función creciente ya que 7 > 1. Pasa por los puntos (1, 0) y (7, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{1}{7}$	1	$\sqrt{7}$	7
$f(x)$	−1	0	$\frac{1}{2}$	1



20. Página 227

La gráfica verde corresponde con la función $y = \log_2 x$ porque pasa por el punto (2, 1).

La gráfica azul pasa por el punto (7, 1), luego se corresponde con $y = \log_7 x$.

La gráfica roja es la más cerrada, además pasa por (8, 1) por lo que se corresponde con $y = \log_8 x$.

Finalmente, la gráfica morada se corresponde con la función $y = \log_5 x$.

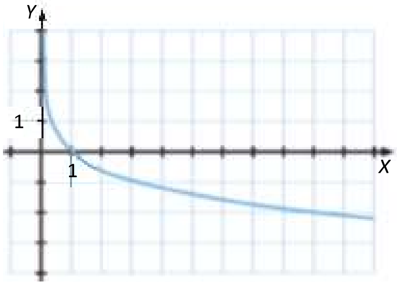
21. Página 227

a) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ es una función decreciente $\frac{1}{3} < 1$.

Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
***f*(*x*)**	1	0	−1	−2

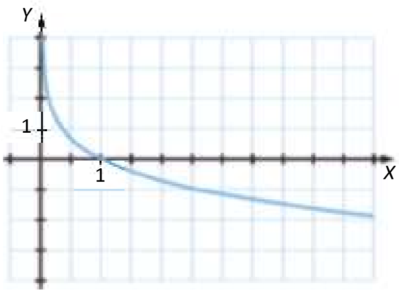


b) $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ es una función decreciente $\frac{2}{5} < 1$.

Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{2}{5}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$
***f*(*x*)**	1	0	−1	−2

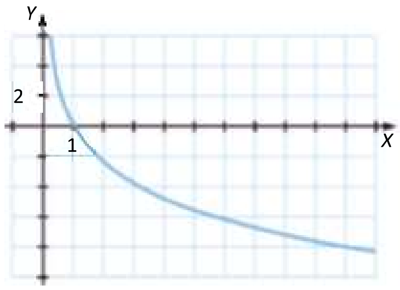


c) $y = \log_{\frac{3}{4}} x$ es una función decreciente $\frac{3}{4} < 1$.

Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$
***f*(*x*)**	1	0	–1	–2

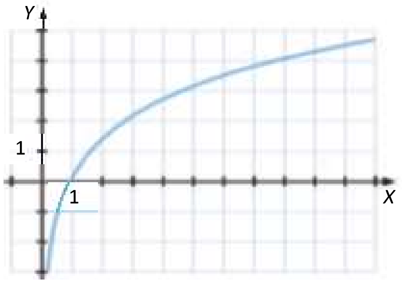


22. Página 227

a) $y = \log_{\frac{5}{3}} x$ es una función creciente $\frac{5}{3} > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

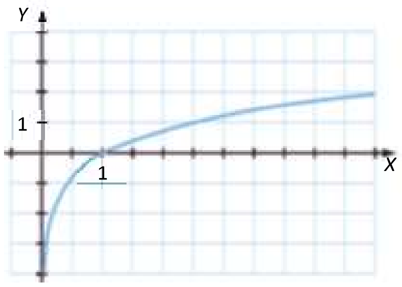
x	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{25}{9}$
***f*(*x*)**	–1	0	1	2



b) $y = \log_{\frac{5}{2}} x$ es una función creciente $\frac{5}{2} > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

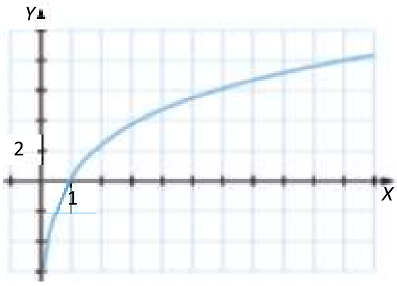
x	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$
***f*(*x*)**	–1	0	1	2



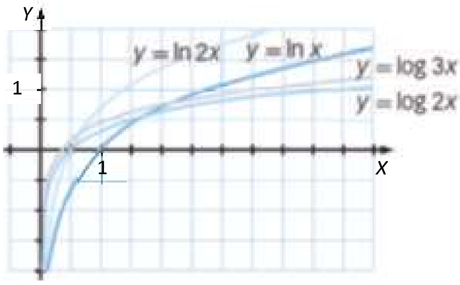
c) $y = \log_{\frac{4}{3}} x$ es una función creciente $\frac{4}{3} > 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$.

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$
***f*(x)**	–1	0	1	2



23. Página 227



24. Página 228

La gráfica roja corresponde a la función $f(x) = \log x$ ya que pasa (1, 0).

Las otras dos son traslaciones de la roja.

La azul corresponde a la función $h(x) = \log(x+2)$ ya que la traslada 2 unidades a la izquierda a *f*(*x*) y la verde a $g(x) = \log(x-2)$ porque la traslada 2 unidades hacia la derecha.

25. Página 228

Se determinaría trasladándola 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.

26. Página 228

Como pasa por el (4, 2) y su asíntota es *x* = 3, es una traslación de $y = \log x$ que va 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. Entonces $f(x) = \log(x-3) + 2$.

27. Página 229

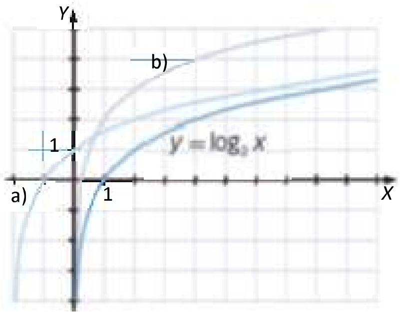
$y = \log_2 x$ es una función creciente 2 > 1.

Pasa por los puntos (1, 0) y (2, 1).

Hacemos una tabla con algunos de sus valores:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	–1	0	1	2

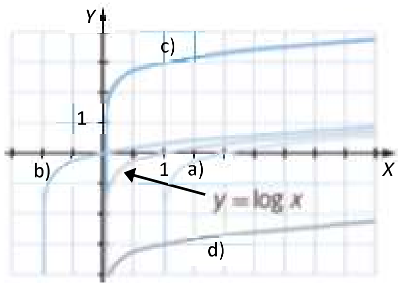
$g(x) = \log_2(x+2)$ 2 unidades a la izquierda y $h(x) = \log_2 x + 2$ 2 unidades hacia arriba.



28. Página 229

$y = \log x$ es una función creciente 10 > 1. Pasa por los puntos (1, 0) y (10, 1).

x	$\frac{1}{10}$	1	$\sqrt{10}$	10
$f(x)$	–1	0	$\frac{1}{2}$	2



a) Se traslada $f(x)$ 1 unidad a la derecha.

b) Se traslada $f(x)$ 1 unidad a la izquierda.

c) Se traslada $f(x)$ 3 unidades hacia arriba.

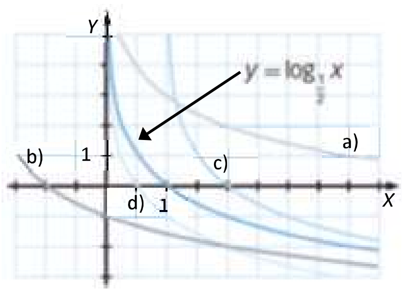
d) Se traslada $f(x)$ 3 unidades hacia abajo.

29. Página 229

Se usa la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ como referente y los diferentes apartados son traslaciones de esta.

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es una función decreciente $\frac{1}{2} < 1$. Pasa por los puntos (1, 0) y $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	2	1	0	–1



a) Se traslada $f(x)$ 3 unidades hacia arriba.

b) Se traslada $f(x)$ 2 unidades a la izquierda.

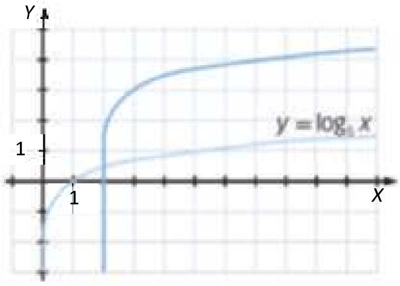
c) Se traslada $f(x)$ 1 unidad a la derecha.

d) Se traslada $f(x)$ 1 unidad hacia abajo.

30. Página 229

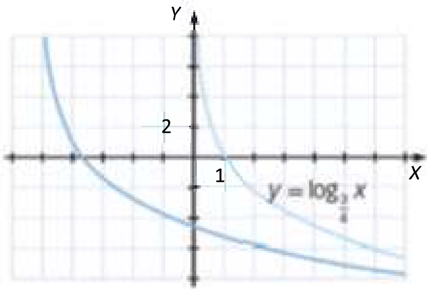
a) $f(x)=\log_5(x-2)+3$ es la traslación de la función $g(x)=\log_5 x$, 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba.

x	$\frac{1}{5}$	1	$\sqrt{5}$	5
***f*(*x*)**	–1	0	$\frac{1}{2}$	1



b) $f(x)=\log_{\frac{3}{4}}(x+5)+1$ es la traslación de la función $g(x)=\log_{\frac{3}{4}} x$, 5 unidades a la izquierda y 1 unidad hacia arriba.

x	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$
***f*(*x*)**	2	1	0	–1



31. Página 230

La función $y = sen\ x$ está definida en cualquier valor, dominio $\mathbb{R}$, y como $-1 \leq sen\ x \leq 1$, recorrido $[-1,1]$, y es una función periódica de período 2π : $sen\ x = sen\ (x+2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

El dominio en todas las funciones de los apartados siguientes seguirá siendo $\mathbb{R}$.

a) $y = 2sen\ x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \leq 2sen\ x \leq 2$.

b) $y = sen\ (2x)$, el factor solo cambia el período: $2(x+T)-2x = 2\pi \rightarrow T = \pi$

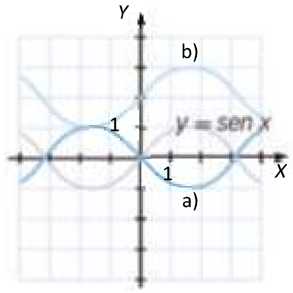
c) $y = -2sen\ x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \leq -2sen\ x \leq 2$. Los valores de *sen x* se verán multiplicados por 2 y cambiados de signo.

d) $y = sen\ (-2x)$, el factor solo cambia el período: $-2(x+T)+2x = 2\pi \rightarrow T = \pi$.

32. Página 230

a) Se traslada la función *sen x* en π unidades a la izquierda.

b) Se traslada la función 2 unidades hacia arriba.



33. Página 230

$y = sen(x) \rightarrow \begin{cases} \text{Eje } X \rightarrow (\pi k, 0), k \in \mathbb{Z} \\ \text{Eje } Y \rightarrow (0,1) \end{cases}$. Tiene infinitos puntos de corte.

Los máximos y mínimos son $x = \pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ tiene infinitos.

34. Página 231

La función $y = cos\ x$ está definida en cualquier valor, dominio $\mathbb{R}$, y como $-1 \leq cos\ x \leq 1$, recorrido $[-1,1]$, y es una función periódica de período 2π : $cos\ x = cos\ (x + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

El dominio en todas las funciones de los apartados siguientes seguirá siendo $\mathbb{R}$.

a) $y = 2cos\ x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \leq 2cos\ x \leq 2$.

b) $y = cos\ (2x)$, el factor solo cambia el período: $2(x+T) - 2x = 2\pi \rightarrow T = \pi$

c) $y = -2cos\ x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \leq -2cos\ x \leq 2$.

d) $y = cos\ (-2x)$, el factor solo cambia el período: $-2(x+T) + 2x = 2\pi \rightarrow T = \pi$

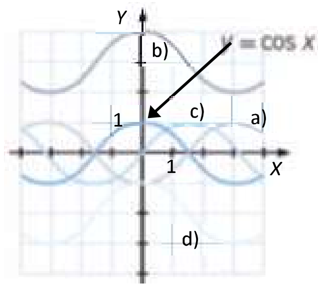
35. Página 231

a) Se traslada la función *cos x* en π unidades a la izquierda.

b) Se traslada la función 3 unidades hacia arriba.

c) Se traslada la función $\frac{\pi}{2}$ unidades a la derecha.

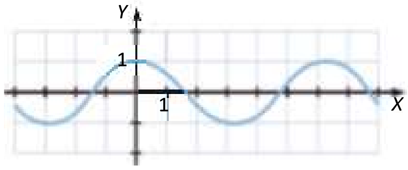
d) Se traslada la función 2 unidades hacia abajo.



36. Página 231

Coinciden ambas funciones.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	0	1	0	–1	0
$\cos x$	0	1	0	–1	0



ACTIVIDADES FINALES

37. Página 232

Las gráficas verde y azul son crecientes, la azul es más cerrada que la verde; por tanto, la gráfica azul corresponde a la función $y=3^x$ y la gráfica verde corresponde a la función $y=1{,}2^x$.

Las gráficas roja y morada son decrecientes, la roja es más cerrada que la azul; por tanto, la gráfica roja corresponde a la función $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y la gráfica azul corresponde a la función $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$.

38. Página 232

a) $f(x)=2^{2x}$

x	–1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	1	4

b) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$

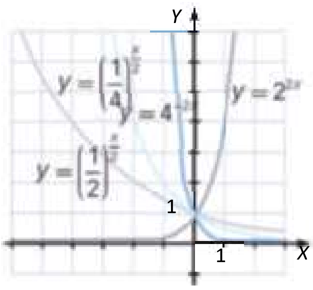
x	–1	0	1
$f(x)$	2	1	$\frac{1}{2}$

c) $f(x)=4^{-2x}$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	4	1	$\frac{1}{4}$

d) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$

x	–2	0	2
$f(x)$	2	1	$\frac{1}{2}$



40. Página 232

a) La gráfica pasa por el punto (1, 3) $\rightarrow y=a^x \xrightarrow{x=1,y=3} 3=a \rightarrow y=3^x$

b) La gráfica pasa por el punto (–1, 5) $\rightarrow y=a^x \xrightarrow{x=-1,y=5} 5=a^{-1} \rightarrow a=\frac{1}{5} \rightarrow y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

c) La gráfica pasa por el punto (1, 4) $\rightarrow y=a^x \xrightarrow{x=1,y=4} 4=a \rightarrow y=4^x$

d) La gráfica pasa por el punto (–1, 4) $\rightarrow y=a^x \xrightarrow{x=-1,y=4} 4=a^{-1} \rightarrow a=\frac{1}{4} \rightarrow y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

41. Página 232

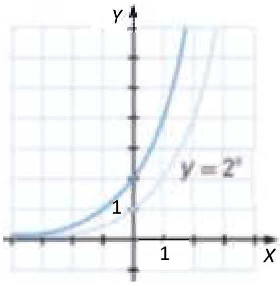
a) Es la gráfica de la función $y = 3^x$ trasladada una unidad hacia arriba; por tanto, es la función: $y = 3^x + 1$.

b) Es la gráfica de la función $y = 3^x$ trasladada una unidad hacia la derecha; por tanto, es la función $y = 3^{x-1}$.

42. Página 232

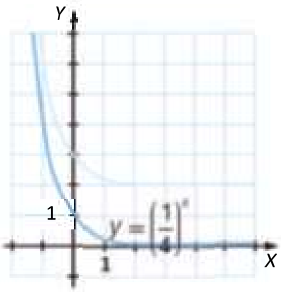
a) $y = 2^{x+1}$ es una traslación de la función $f(x) = 2^x$ 1 unidad a la izquierda.

x	−1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{2}$	1	2	4



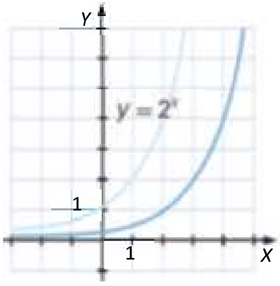
b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 2$ es una traslación de la función $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 2 unidades hacia arriba.

x	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
f(x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$



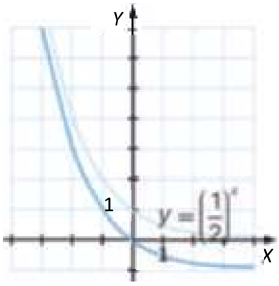
c) $y = 2^{x-2}$ es una traslación de la función $y = 2^x$ 2 unidades a la derecha.

x	−1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{2}$	1	2	4



d) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1$ es una traslación de la función $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 1 unidad hacia abajo.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	4	2	1	$\dfrac{1}{2}$



43. Página 232

a) Es la traslación de $y = 2^x$ una unidad hacia arriba y dos unidades a la derecha: $f(x) = 2^{x-2} + 1$.

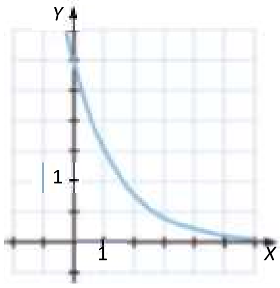
b) Es la traslación de $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ dos unidades hacia abajo y una unidad a la izquierda: $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}-2$.

c) Es la traslación de $y = 3^x$ dos unidades hacia abajo y una unidad a la derecha: $f(x) = 3^{x-1} - 2$.

d) Es la traslación de $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ una unidad hacia arriba y dos unidades a la izquierda: $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2}+1$.

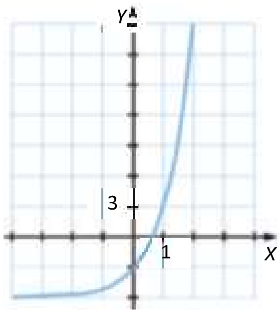
45. Página 233

Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería $y=3\cdot 2^{-x}$.



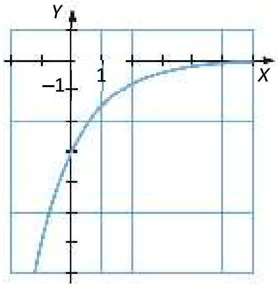
46. Página 233

Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería $y=3^{x+1}-6$.



47. Página 233

Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería $y = -3 \cdot 2^{-x}$.



48. Página 233

Pasa por los puntos (1, 1) y (2, 5).

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a^{1+b} \\ 5 = a^{2+b} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 1 = a \cdot a^b \\ 5 = a^2 \cdot a^b \end{array}\right\} \xrightarrow{a \neq 0} \left.\begin{array}{l} a^b = \dfrac{1}{a} \\ a^b = \dfrac{5}{a^2} \end{array}\right\} \to \frac{1}{a} = \frac{5}{a^2} \to a = \frac{5}{1} = 5$$

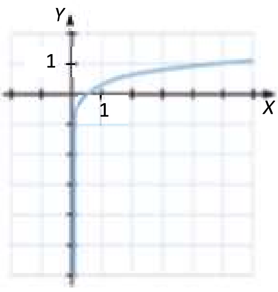
$$1 = 5^{1+b} \to 1 + b = 0 \to b = -1$$

La función es $y = 5^{(x-1)}$.

49. Página 233

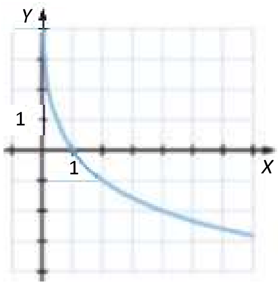
a) $f(x) = \log 2x$ es creciente ya que $10 > 1$.

x	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$	5
f(x)	–1	0	1



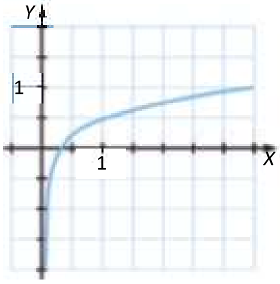
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es decreciente ya que $\frac{1}{2} < 1$.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
f(x)	1	0	–1	–2



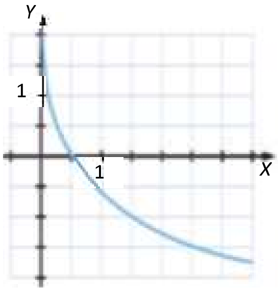
c) $f(x) = \log 3x$ es creciente ya que 10 > 1.

x	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
$f(x)$	–1	0	1



d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} 2x$ es decreciente ya que $\frac{1}{3} < 1$.

x	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
$f(x)$	1	0	–1	–2



50. Página 233

Las gráficas azul y morada son decrecientes, entonces $a < 1$. La gráfica morada pasa por (4, –1), entonces gráfica morada: $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ y gráfica azul: $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Las gráficas roja y verde son crecientes, entonces $a > 1$. La gráfica roja es más cerrada; por tanto, gráfica roja: $y = \log x$ y gráfica verde: $y = \log_2 x$.

52. Página 234

a) La gráfica pasa por el punto (3, 1).

$$y = \log_a x \xrightarrow{x=3, y=1} 1 = \log_a 3 \to a^1 = 3 \to y = \log_3 x$$

b) La gráfica pasa por el punto (2, –1).

$$y = \log_a x \xrightarrow{x=2, y=-1} -1 = \log_a 2 \to a^{-1} = 2 \to y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

c) La gráfica pasa por el punto (6, 1).

$$y = \log_a x \xrightarrow{x=6, y=1} 1 = \log_a 6 \to a = 6 \to y = \log_6 x$$

d) La gráfica pasa por el punto (5, –1).

$$y = \log_a x \xrightarrow{x=5, y=-1} -1 = \log_a 5 \to a^{-1} = 5 \to y = \log_{\frac{1}{5}} x$$

53. Página 234

a) Corresponde a la traslación de la función $y = \log_3 x$ en la que se mueve la gráfica 2 unidades hacia arriba. Por tanto, $y = \log_3 x + 2$

b) Corresponde a la traslación de la función $y = \log_3 x$ en la que se mueve la gráfica 1 unidad a la derecha. Por tanto, $y = \log_3 (x - 1)$

54. Página 234

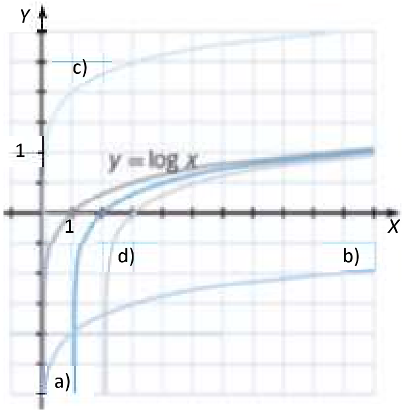
Todas las funciones son traslaciones de $f(x) = \log x$

a) $g(x) = \log(x - 1)$, traslada 1 unidad a la derecha.

b) $h(x) = \log x - 2$, traslada 2 unidades hacia abajo.

c) $p(x) = \log x + 2$, traslada 2 unidades hacia arriba.

d) $q(x) = \log(x - 2)$, traslada 2 unidades a la derecha.



55. Página 234

Las expresiones son todas traslaciones de la función $f(x) = \log x$.

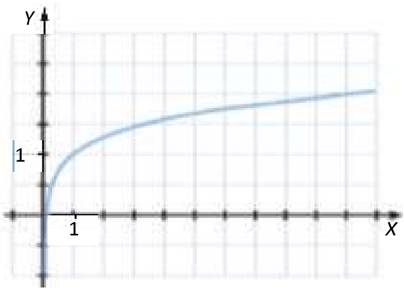
a) Es la traslación de la función $\log x$, trasladada 3 unidades a la izquierda: $\log(x + 3)$

b) Es la traslación de la función $\log x$, trasladada 3 unidades a la derecha: $\log(x - 3)$

c) Es la traslación de la función $\log x$, trasladada 3 unidades hacia arriba: $\log x + 3$

d) Es la traslación de la función $\log x$, trasladada 3 unidades hacia abajo: $\log x - 3$

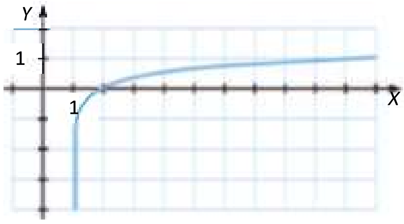
56. Página 234



Al representarlas se ve que coinciden: $f(x) = \log(10x) = \log 10 + \log x = \log x + 1$

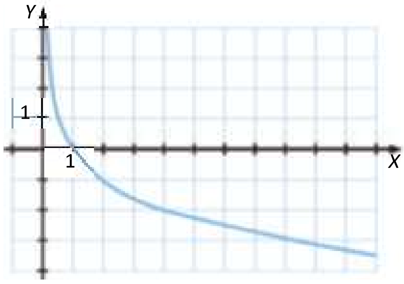
58. Página 234

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\log_9(x-1)$



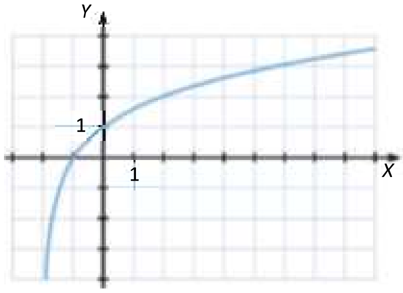
59. Página 234

$$y=\log_a x \xrightarrow{x=4,\,y=-2} -2=\log_a 4 \rightarrow a^{-2}=4 \rightarrow a=\frac{1}{2} \rightarrow y=\log_{\frac{1}{2}} x$$



60. Página 234

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\log_2(x+2)$



61. Página 234

Consideramos que la escala es tanto en el eje vertical como en el horizontal 2 cuadrículas = 1 unidad.

Roja: El período es 4, la función es simétrica respecto del origen de coordenadas. Es la función $sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Verde: El período es 1, es simétrica respecto al eje *Y*. Representa la función $cos(2\pi x)$.

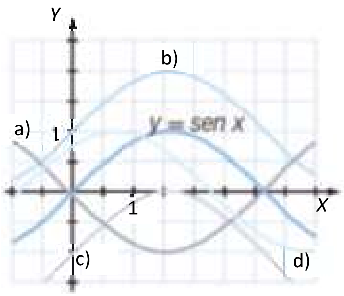
62. Página 235

a) $g(x)=sen\,(x+\pi)=-sen\,x=-f(x)$

b) $g(x)=sen x+1=f(x)+1$

c) $g(x)=sen x-1=f(x)-1$

d) $g(x)=sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$



63. Página 235

a) $y = cos(2x)$, el factor solo cambia el período: $2(x + T) - 2x = 2\pi \rightarrow T = \pi$.

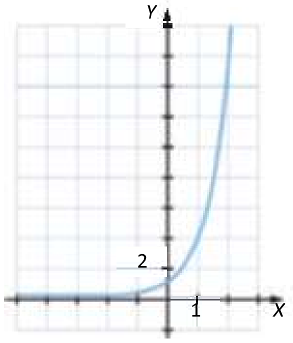
Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: [–1, 1]

b) $y = 2cos\ x$, el factor 2 solo cambia el recorrido: $-2 \leq 2cos\ x \leq 2$.

Dominio: $\mathbb{R}$ Período: $T = 2\pi$

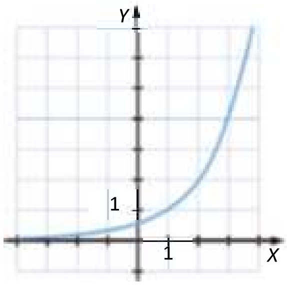
64. Página 235

Horas	1	2	n
Partes	4	16	4^n



65. Página 235

Días	1	2	3	n
Céntimos	1	2	4	2^{n-1}

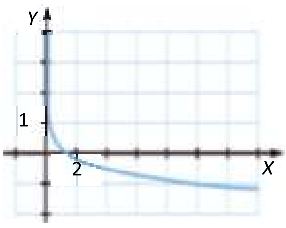


66. Página 235

$C_F = C_I(1+0{,}02)^n = C_I \cdot 1{,}02^n$ donde C_F es el capital final, C_I capital inicial y n el número de períodos.

67. Página 235

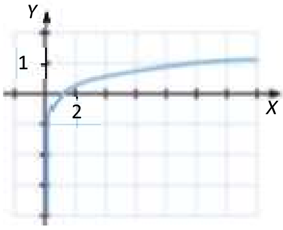
Concentración	$\frac{1}{10}$	1	10
pH	1	0	–1



$\text{pH} = -\log 10^{-7} = 7$

68. Página 235

$$y = A\log n \xrightarrow{y=2,n=100} 2 = A\log 100 \rightarrow 2 = A2 \rightarrow A = 1 \rightarrow y = \log x$$



69. Página 235

$$y = A\mathrm{sen}(x+T) \xrightarrow{A=2,T=\pi/2} y = 2\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

DEBES SABER HACER

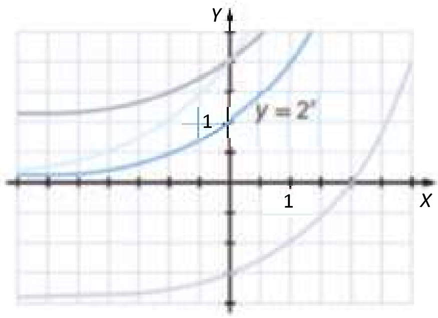
1. Página 235

x	–1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

a) $g(x) = 2^{x+1} \rightarrow$ 1 unidad a la izquierda.

b) $h(x) = 2^x + 1 \rightarrow$ 1 unidad hacia arriba.

c) $p(x) = 2^{x-1} - 2 \rightarrow$ 1 unidad a la derecha y 2 hacia abajo.



2. Página 235

La función es del tipo $y = a^{(x+b)} + c$.

La representación es una traslación, 1 unidad hacia abajo y 2 unidades hacia la izquierda. Pasa por el punto

$(-3, 4) \rightarrow 4 = a^{-3+2} - 1 \rightarrow 5 = a^{-1} \rightarrow a = \frac{1}{5} \rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} - 1$

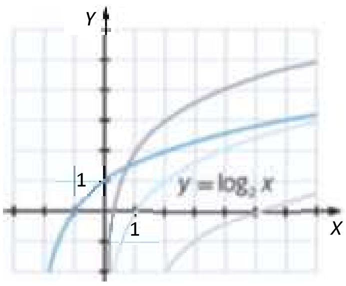
3. Página 235

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	–1	0	1	2

a) $g(x) = \log_2(x+2) \rightarrow$ 2 unidades a la izquierda.

b) $h(x) = \log_2 x + 2 \rightarrow$ 2 unidades hacia arriba.

c) $p(x) = \log_2(x-1) - 2 \rightarrow$ 1 unidad a la derecha y dos hacia abajo.



4. Página 235

Es una traslación 1 unidad hacia arriba de una función logarítmica y pasa por el punto (3, 2).

$2 = \log_a 3 + 1 \rightarrow 1 = \log_a 3 \rightarrow a^1 = 3 \rightarrow y = \log_3 x + 1$

5. Página 235

Está definida para cualquier valor, el dominio es $\mathbb{R}$. Su recorrido es $[2,6]$ y su período es 12.

La función es $f(x)=2sen\left(\frac{\pi x}{6}\right)+4$.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

70. Página 236

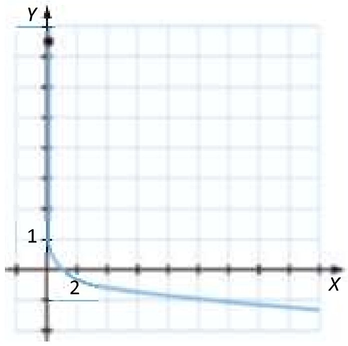
a) $f(x)=2^{2x}$

Tiempo	12 horas	1 día	2 días	3 días	*n* días
N.º células	2	4	16	64	2^{2n}

b) Al cabo de dos días: $2^{2\cdot 2}=16$ células y al cabo de 4 días: $2^{2\cdot 4}=256$ células.

c)

Concentración	$\frac{1}{10}$	1	10
pH	1	0	−1



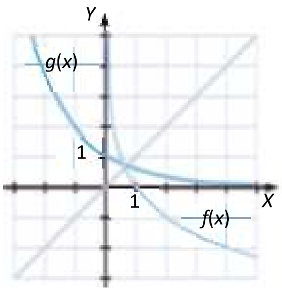
FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

71. Página 236

a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
f(*x*)	2	1	0	−1

x	−2	−1	0	1
g(*x*)	4	2	1	$\frac{1}{2}$



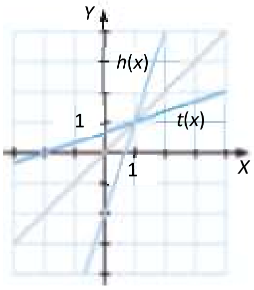
Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, por tanto, son inversas.

Analíticamente: $g(f(x))=g\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}x}=x$. Su composición es la identidad, son inversas.

b)

x	-1	0	1	2
$h(x)$	-5	-2	1	4

x	-2	-1	0	1
$t(x)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1



Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, por tanto, son inversas.

Analíticamente: $t(h(x)) = t\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3\frac{x+2}{3} - 2 = x$. Su composición es la identidad, son inversas.

72. Página 236

El número de cifras es igual a la parte entera de logaritmo decimal más uno.

$\log 4^{16} \cdot 5^{25} = \log 4^{16} + \log 5^{25} = 16\log 4 + 25\log 5 = 27{,}11 \rightarrow 28$ cifras.

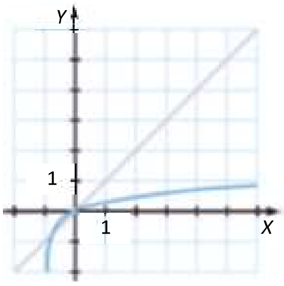
73. Página 236

$\left.\begin{array}{l} a^b = b^a \\ b = 9a \end{array}\right\} \rightarrow a^{9a} = 9^a \cdot a^a \rightarrow a^{8a} = 9^a \rightarrow a^8 = 3^2 \rightarrow a = \sqrt[4]{3}$ y $b = 9\sqrt[4]{3}$

74. Página 236

a) Es falso, pues si $x = 99 \rightarrow \log(100) > \frac{99}{100} \rightarrow 2 > \frac{99}{100}$.

b) Verdadera, para comprobarlo representaremos ambas funciones. Para $x > 0$, la recta siempre está por encima de la función logarítmica.



c) Es falso, pues si $x = 1 \rightarrow \log 2 < \frac{1}{2} \rightarrow 0{,}30 < 0{,}50$.

75. Página 236

$$\left(10^{2009n}+1\right)^2=10^{4018n}+2\cdot 10^{2009n}+1$$

Considerando que *n* es un número entero positivo, la suma de las cifras no depende del valor de *n* pues solo añadirá ceros al número.

La suma de las cifras de cada sumando es $1+2+1=4$.

PRUEBAS PISA

76. Página 237

La respuesta es b) Subiendo.

La foca tarda 3 minutos en bajar al fondo y 8 en subir. Con lo cual la foca baja y sube en períodos de 11 minutos. El minuto 60 (al cabo de una hora) es igual a 5 · 11 + 5. Es decir es la sexta vez que realiza el proceso y ya ha consumido los tres minutos de bajada, por lo que estará subiendo.