5 Semejanza y trigonometría

PIENSA Y CONTESTA

¿Cómo respondió el alumno a la pregunta del examen?

El estudiante respondió: “Lleve el barómetro hasta la azotea del edificio, átele una cuerda muy larga, descuelgue el barómetro hasta la calle y después vuelva a subirlo, midiendo la longitud de la cuerda. Dicha longitud será igual a la altura del edificio”.

El alumno dice que hay muchas formas de responder. ¿Cuántas se te ocurren?

Respuesta libre.

¿Por qué el profesor se resistía a darle la nota máxima?

El profesor se resistía a darle la nota máxima porque una nota alta supondría que el alumno certificaba un alto nivel en física, pero con la respuesta aportada no se confirmaba que el estudiante tuviera ese nivel.

ANALIZA Y REFLEXIONA

¿Crees que sería válida esta respuesta?

“Se lleva el barómetro y se llama a la puerta del conserje. Cuando el conserje responda, se le dice lo siguiente: “Sr Conserje, aquí tengo un barómetro estupendo. Si me dice la altura del edificio se lo regalo”.

Respuesta libre.

Actividades propuestas

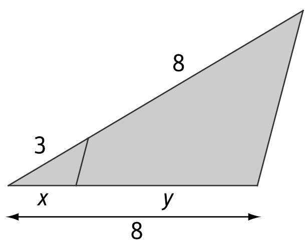
1. Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante a otro que tiene por lados 3, 12 y 10 cm si la razón de semejanza es $k = \frac{16}{5}$.

Los lados del triángulo semejante medirán $3 \cdot \frac{16}{5} = \frac{48}{5} = 9{,}6$ cm, $12 \cdot \frac{16}{5} = \frac{192}{5} = 38{,}4$ cm y $10 \cdot \frac{16}{5} = 32$ cm.

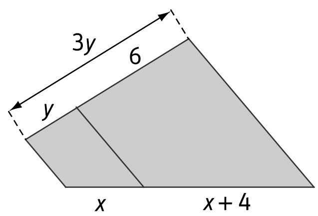
2. Actividad resuelta.

3. Calcula los lados desconocidos de las figuras.

a)



b)



a) $\frac{3}{x} = \frac{3+8}{8} \Rightarrow 11x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{11}$

$y = 8 - x = 8 - \frac{24}{11} = \frac{64}{11}$

b) $3y = y + 6 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$

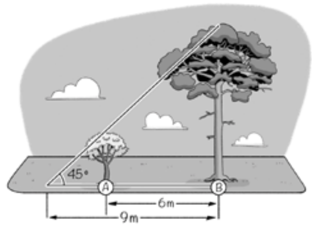
$\frac{3}{x} = \frac{6}{x+4} \Rightarrow 3x + 12 = 6x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

4. Juan mide 1,75 m y proyecta, en un momento dado, una sombra de 1,4 m. Calcula la sombra que proyecta en ese instante una farola de 4 m de altura.

Llamamos x a la sombra que proyecta la farola.

$$\frac{1{,}75}{1{,}4}=\frac{4}{x}\Rightarrow 1{,}75x=5{,}6\Rightarrow x=\frac{5{,}6}{1{,}75}=3{,}2\text{ m}$$

5. Calcula la distancia que debe recorrer un pájaro que quiere volar desde la copa del árbol *A* a la del *B*.



Llamamos x a la distancia que hay desde el suelo hasta la copa del árbol A.

Llamamos d a la distancia que hay entre la copa del árbol A y la copa del árbol B.

La altura del árbol A es igual a 3 m y la altura del árbol B es igual a 9 m.

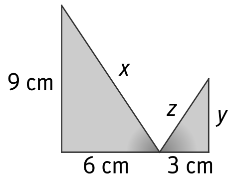
Usando el teorema de Pitágoras: $x^2=3^2+3^2\Rightarrow x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ m.

Por semejanza, $\frac{x}{3}=\frac{d}{6}\Rightarrow d=2x=6\sqrt{2}=8{,}49$ m.

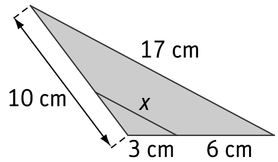
El pájaro deberá recorrer 8,49 m.

6. Razona si los triángulos siguientes son semejantes y calcula los lados desconocidos.

a)



b)



a) Los triángulos son semejantes por tener dos ángulos iguales (Criterio 1 de semejanza).

$$\frac{9}{y}=\frac{6}{3}\Rightarrow y=\frac{27}{6}=4{,}5\text{ cm}\qquad x=\sqrt{9^2+6^2}=10{,}82\text{ cm}\qquad \frac{x}{z}=\frac{6}{3}\Rightarrow z=\frac{x}{2}=\frac{10{,}82}{2}=5{,}41\text{ cm}$$

b) Los triángulos son semejantes por estar en posición de Tales.

$$\frac{9}{3}=\frac{17}{x}\Rightarrow x=\frac{51}{9}=5{,}67\text{ cm}$$

7. ¿Los triángulos interior y exterior de un cartabón son semejantes? Razona tu respuesta.

Los ángulos que forman los triángulos interior y exterior de un cartabón son iguales pues sus lados son paralelos.

Por el criterio 1 de semejanza, los triángulos interior y exterior de un cartabón son semejantes.

8. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 7,5 cm y su proyección sobre la hipotenusa tiene una longitud de 4,5 m. ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo?

Llamamos H a la hipotenusa del triángulo. Por el teorema del cateto, $7{,}5^2 = 4{,}5\cdot H\Rightarrow H = 12{,}5$ cm

9. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa y un cateto miden 40 y 24 cm, respectivamente.

a) Halla la medida del valor del otro cateto.

b) Halla la medida de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

c) Halla la altura sobre la hipotenusa.

a) Llamamos x a la medida del otro cateto. Aplicando el teorema de Pitágoras: $x=\sqrt{40^2-24^2}=\sqrt{1024}=32$ cm

b) Llamamos m a la proyección del cateto de 32 cm sobre la hipotenusa y n a la proyección del cateto de 24 cm.

Aplicando el teorema del cateto: $32^2 = 40\cdot m\Rightarrow m = 25{,}6$ cm y $24^2 = 40\cdot n\Rightarrow n = 14{,}4$ cm

c) Llamamos h a la altura del triángulo sobre la hipotenusa.

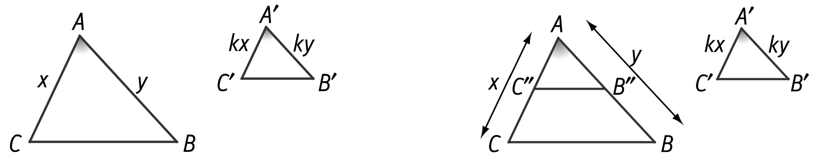
Aplicando el teorema de la altura: $h^2 = m\cdot n = 25{,}6\cdot 14{,}4 = 368{,}64\Rightarrow h = 19{,}2$ cm

10. Demuestra los criterios 2 y 3 de semejanza de triángulos de forma análoga a la demostración del primer criterio.

Criterio 2: "Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales".

Para demostrar el criterio 2, se parte de dos triángulos, *ABC* y *A´B´C´*, con un ángulo igual $\widehat{A}$ y $\widehat{A'}$, y los lados que lo forman proporcionales, y se prueba que son semejantes.

Sobre el lado *AB* del primer triángulo se lleva la medida *A´B´* del segundo y se marca el vértice *B´´*. Se traza el segmento *B´´C´´*, paralelo a *BC*.



Los triángulos *AB´´C´´* y *A´B´C´* son iguales, ya que tienen dos de sus ángulos y un lado iguales.

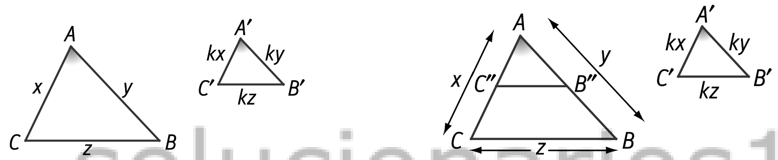
Los triángulos *ABC* y *AB´´C´´* están en posición de Tales y, por tanto, son semejantes.

En consecuencia, los triángulos *ABC* y *A´B´C´* son también semejantes.

Criterio 3: "Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados proporcionales".

Para demostrar el criterio 2, se parte de dos triángulos, *ABC* y *A´B´C´* con los lados que lo forman proporcionales, y se prueba que son semejantes.

Sobre el lado *AB* del primer triángulo se lleva la medida *A´B´* del segundo y se marca el vértice *B´´*. Sobre el lado *AC* se lleva la medida *A´C´* y se marca el punto *C´´*. Se traza el segmento *B´´C´´*.



Los triángulos *AB´´C´´* y *A´B´C´* son iguales, ya que tienen tres lados iguales.

Los triángulos *ABC* y *AB´´C´´* están en posición de Tales y, por tanto, son semejantes.

En consecuencia, los triángulos *ABC* y *A´B´C´* son también semejantes.

11. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando tu respuesta.

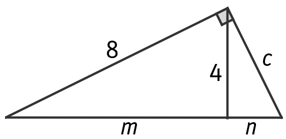
a) Dos triángulos isósceles siempre son semejantes.

b) Un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º es semejante a otro con un ángulo de 60º.

a) Falso. Dos triángulos isósceles no son siempre semejantes porque sus ángulos no tienen por qué ser iguales.

b) Verdadero. Un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º es semejante a otro con un ángulo de 60º porque en ambos casos sus ángulos miden 30º, 60º y 90º. (Criterio 1 de semejanza de triángulos).

12. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 8 cm, y la altura sobre la hipotenusa, 4. Halla el área del triángulo.



Aplicando el teorema de la altura: 16 = $m \cdot n$

Aplicando el teorema del cateto: 64 = $m \cdot (m + n)$.

Se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 16 = mn \\ 64 = m(m+n) \end{cases} \Rightarrow 64 = m\left(m + \frac{16}{m}\right) \Rightarrow m^2 = 48 \Rightarrow m = 4\sqrt{3}\text{ cm} \Rightarrow n = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{ cm} \Rightarrow m + n = 4\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$$

El área del triángulo es $A = \dfrac{\frac{16\sqrt{3}}{3} \cdot 4}{2} = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}\text{ cm}^2$

13. Pasa a radianes los siguientes ángulos expresados en grados sexagesimales.

a) **60º** **b)** **120º** **c)** **210º** **d)** **135º** **e)** **330º**

a) $60º = \frac{\pi}{3}$ rad **b)** $120º = \frac{2\pi}{3}$ rad **c)** $210º = \frac{7\pi}{6}$ rad **d)** $135º = \frac{3\pi}{4}$ rad **e)** $330º = \frac{11\pi}{6}$ rad

14. Calcula, aproximando a los segundos, la medida de un radián en grados sexagesimales.

$1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{180º}{\pi} = 57º\ 17'\ 45''$

15. Convierte a grados sexagesimales los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{\pi}{5}$ **c)** $\frac{\pi}{6}$ **d)** $\frac{2\pi}{3}$ **e)** 4π

a) $\frac{\pi}{4}$ rad = 45º **b)** $\frac{\pi}{5}$ rad = 36º **c)** $\frac{\pi}{6}$ rad = 30º **d)** $\frac{2\pi}{3}$ rad = 120º **e)** 4π rad = 720º

16. Las medidas de dos de los ángulos de un triángulo *ABC* son $\widehat{A}$ = 40º y $\widehat{B}$ = 1,54 rad. Calcula en grados y en radianes la medida de $\widehat{C}$.

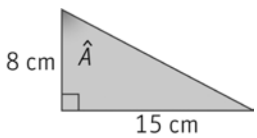
$\widehat{B}$ = 1,54 rad = 88,24º y $\widehat{C}$ = 180º – (40º + 88,24º) = 51,76º = 0,9 rad

17. La medida de un ángulo de un paralelogramo es $\widehat{A}$ = 65º. Halla los otros tres ángulos en grados y en radianes.

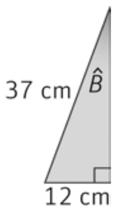
El ángulo opuesto de $\widehat{A}$ mide $65º = \frac{13\pi}{36}$ rad y, cada uno de los otros dos ángulos, $\frac{360º - 2 \cdot 65º}{2} = 115º = \frac{23\pi}{36}$ rad.

18. Indica las razones trigonométricas que relacionan el ángulo y los lados indicados en los siguientes triángulos rectángulos y calcúlalas.

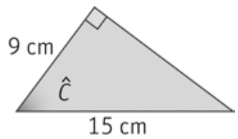
a)



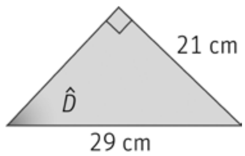
b)



c)



d)



a) La hipotenusa *h* mide *h* = $+\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ cm.

sen $\widehat{A} = \frac{15}{17}$ cos $\widehat{A} = \frac{8}{17}$ tg $\widehat{A} = \frac{15}{8}$

b) El cateto *c* mide *c* = $+\sqrt{37^2 - 12^2} = 35$ cm.

sen $\widehat{B} = \frac{12}{37}$ cos $\widehat{B} = \frac{35}{37}$ tg $\widehat{B} = \frac{12}{35}$

c) El cateto *b* mide *b* = $+\sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ cm.

sen $\widehat{C} = \frac{12}{15}$ cos $\widehat{C} = \frac{9}{15}$ tg $\widehat{C} = \frac{12}{9}$

d) El cateto *x* mide *x* mide *x* = $+\sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ cm.

sen $\widehat{D} = \frac{21}{29}$ cos $\widehat{D} = \frac{20}{29}$ tg $\widehat{D} = \frac{21}{20}$

19. Calcula las razones trigonométricas inversas de las obtenidas en la actividad anterior.

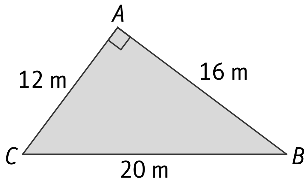
a) cosec $\widehat{A} = \frac{17}{15}$ sec $\widehat{A} = \frac{17}{8}$ cotg $\widehat{A} = \frac{8}{15}$

b) cosec $\widehat{B} = \frac{37}{12}$ sec $\widehat{B} = \frac{37}{35}$ cotg $\widehat{B} = \frac{35}{12}$

c) cosec $\widehat{C} = \frac{15}{12}$ sec $\widehat{C} = \frac{15}{9}$ cotg $\widehat{C} = \frac{9}{12}$

d) cosec $\widehat{D} = \frac{29}{21}$ sec $\widehat{D} = \frac{29}{20}$ cotg $\widehat{D} = \frac{20}{21}$

20. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos en el siguiente triángulo.



¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas del ángulo *B* y el ángulo *C*?

$\text{sen } \hat{B} = \frac{12}{20}$ $\cos \hat{B} = \frac{16}{20}$ $\text{tg } \hat{B} = \frac{12}{16}$ $\text{sen } \hat{C} = \frac{16}{20}$ $\cos \hat{C} = \frac{12}{20}$ $\text{tg } \hat{C} = \frac{16}{12}$

La relación que hay entre las razones trigonométricas del ángulo $\hat{B}$ y el ángulo $\hat{C}$ es:

$\text{sen } \hat{B} = \frac{12}{20} = \cos \hat{C}$ $\cos \hat{B} = \frac{16}{20} = \text{sen } \hat{C}$ $\text{tg } \hat{B} = \frac{12}{16} = \text{cotg } \hat{C}$

21. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos en estos triángulos rectángulos.

a) Cateto *b* = 28 cm, cateto *c* = 45 cm

b) Hipotenusa *a* = 73 cm, cateto *b* = 48 cm

c) Hipotenusa *a* = 15 cm, cateto *c* = 12 cm

a) La hipotenusa *h* mide $h = +\sqrt{28^2 + 45^2} = 53$ cm .

$\text{sen } \hat{B} = \frac{28}{53}$ $\cos \hat{B} = \frac{45}{53}$ $\text{tg } \hat{B} = \frac{28}{45}$ $\text{sen } \hat{C} = \frac{45}{53}$ $\cos \hat{C} = \frac{28}{53}$ $\text{tg } \hat{C} = \frac{45}{28}$

b) El cateto *c* mide $c = +\sqrt{73^2 - 48^2} = 55$ cm .

$\text{sen } \hat{B} = \frac{48}{73}$ $\cos \hat{B} = \frac{55}{73}$ $\text{tg } \hat{B} = \frac{48}{55}$ $\text{sen } \hat{C} = \frac{55}{73}$ $\cos \hat{C} = \frac{48}{73}$ $\text{tg } \hat{C} = \frac{55}{48}$

c) El cateto *b* mide $b = +\sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm .

$\text{sen } \hat{B} = \frac{9}{15}$ $\cos \hat{B} = \frac{12}{15}$ $\text{tg } \hat{B} = \frac{9}{12}$ $\text{sen } \hat{C} = \frac{12}{15}$ $\cos \hat{C} = \frac{9}{15}$ $\text{tg } \hat{C} = \frac{12}{9}$

22. Define en radianes los cuatro cuadrantes del plano.

1.er cuadrante: 0 rad - $\frac{\pi}{2}$ rad 3.er cuadrante: π rad - $\frac{3\pi}{2}$ rad

2.º cuadrante: $\frac{\pi}{2}$ rad - π rad 4.º cuadrante: $\frac{3\pi}{2}$ rad - 2π rad

23. ¿En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) α si sen α > 0 **c) φ si tg φ < 0** **e) δ si sec δ < 0**

b) γ si cos γ < 0 **d) β si cosec β > 0** **f) λ si cotg λ < 0**

a) Primer o segundo cuadrante **c)** Segundo o cuarto cuadrante **e)** Segundo o tercer cuadrante

b) Segundo o tercer cuadrante **d)** Primer o segundo cuadrante **f)** Segundo o cuarto cuadrante

24. Calcula la secante, cosecante y cotangente de los ángulos de 30º y 60º.

α	sec α	cosec α	cotg α
30º	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
60º	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

25. Expresa los siguientes ángulos como la suma de un número completo de vueltas más un ángulo menor de 360º.

a) 400º **c) 2350º** **e) 4315º**

b) 540º **d) 2880º** **f) 6000º**

a) 400º = 1 · 360º + 40º
c) 2350º = 6 · 360º + 190º
e) 4315º = 11 · 360º + 355º

b) 540º = 1 · 360º + 180º
d) 2880º = 8 · 360º
f) 6000º = 16 · 360º + 240º

26. Actividad resuelta.

27. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) sen 300º **b) cos (–330º)** **c) tg (–480º)**

a) $\text{sen } 300° = \text{sen } (360° - 60°) = \text{sen } (-60°) = -\text{sen } 60° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos (-330°) = \cos 330° = \cos (360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{tg } (-480°) = -\text{tg } 480° = -\text{tg } (360° + 120°) = -\text{tg } 120° = -\text{tg } (180° - 60°) = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

28. Actividad resuelta.

29. Calcula sen α y cos α si α es un ángulo agudo y tg α = 0,75.

Como α es un ángulo agudo entonces sen α > 0 y cos α > 0.

$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 0{,}75^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1{,}5625 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}64 \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}8$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + 0{,}8^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - 0{,}8^2 = 0{,}36 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0{,}6$

30. Calcula el seno y la tangente de un ángulo agudo si su coseno vale 0,554.

Como el ángulo α es agudo entonces sen α > 0 y tg α > 0.

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + 0{,}554^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - 0{,}554^2 = 0{,}69 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0{,}83$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{0{,}83}{0{,}554} = 1{,}5$

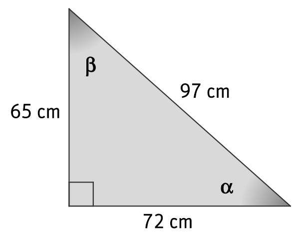
31. Calcula la cosecante y la tangente de un ángulo agudo si su seno vale 0,2.

Como α es un ángulo agudo entonces cos α > 0 y tg α > 0.

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0{,}2^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}2^2 = 0{,}96 \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}98$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}204$ y $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{0{,}2} = 5$

32. Calcula las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos del triángulo aplicando solo la definición del seno.



Como α es un ángulo agudo entonces sen α >0, cos α > 0 y tg α > 0.

$\text{sen}\,\alpha = \frac{65}{97} = 0{,}67 \Rightarrow 0{,}67^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}74$ y $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 0{,}91$

Como α y β son ángulos complementarios, entonces:

sen β = cos α = 0,74, cos β = sen α = 0,67 y tg β = cotg α = 1,1

33. Actividad resuelta.

34. Si cos α = $\frac{-28}{53}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, halla sen α, sec α y tg α.

Como $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, entonces sen α > 0, sec α < 0 y tg α < 0.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{-28}{53}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{-28}{53}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{-28}{53}\right)^2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \left(\frac{45}{53}\right)$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{0{,}85}{-0{,}53} = \frac{-45}{28} \text{ y sec } \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{-53}{28}$$

35. Si tg α = $\frac{-77}{36}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, halla cosec α y cos α.

Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, entonces sen α <0, cosec α < 0 y cos α < 0.

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{77}{36}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 2{,}14^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}18 \Rightarrow \cos\alpha = -0{,}42$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + (-0{,}42)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - (-0{,}42)^2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -0{,}91 \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = -1{,}1$$

36. Actividad resuelta.

37. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas a partir de las relaciones fundamentales.

a) $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$ **b)** $\frac{\text{tg}^2\alpha + 2\,\text{sen}^2\alpha}{tg^2\alpha} = 1 + 2\cos^2\alpha$

a) $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = (1 - \text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$

b) $$\frac{\text{tg}^2\alpha + 2\,\text{sen}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha} = 1 + \frac{2\,\text{sen}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha} = 1 + \frac{2\,\text{sen}^2\alpha}{\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 1 + 2\cos^2\alpha$$

38. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas a partir de las relaciones fundamentales.

a) $\text{tg}\,\alpha + \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$ **c)** $\frac{1}{\text{tg}\,\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$ **e)** $\cos^2\alpha = \text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

b) $\frac{1}{\text{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha + \left(\frac{\cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha}\right)^2$ **d)** $\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$

a) $$\text{tg}\,\alpha + \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

b) $$\cos^2\alpha + \left(\frac{\cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha}\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha\cdot\text{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\left(1+\text{tg}^2\alpha\right)}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\text{tg}^2\alpha}$$

c) $$\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$$

d) $$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$$

e) $\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \cos^2\alpha\cdot(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = \cos^2\alpha$

39. Demuestra las identidades trigonométricas.

a) $\dfrac{1+\text{cotg}\, x}{\text{sen}\, x+\cos x}=\dfrac{1}{\text{sen}\, x}$ **b)** $\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(\text{sen}\, x\cos x)^2}=\sec^2 x$

b) $\dfrac{1+\text{cotg}\, x}{\text{sen}\, x+\cos x}=\dfrac{\text{sen}\, x+\cos x}{\text{sen}\, x(\text{sen}\, x+\cos x)}=\dfrac{1}{\text{sen}\, x}$ **b)** $\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(\text{sen}\, x\cos x)^2}=\dfrac{1-\cos^2 x}{\text{sen}^2 x\cos^2 x}=\dfrac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

40. Calcula para qué valores de α es cierta la igualdad $\cos^2\alpha + \text{tg}^2\alpha = 1$.

$\cos^2\alpha+\text{tg}^2\alpha=\cos^2\alpha+\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^4\alpha+1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1\Rightarrow\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha+1=0\Rightarrow(\cos^2\alpha-1)^2=0$

$\cos^2\alpha-1=0\Rightarrow\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos\alpha=\pm1\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=1\Rightarrow\alpha=360^\circ k\\ \cos\alpha=-1\Rightarrow\alpha=180^\circ+360^\circ k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

41. Con la ayuda de la calculadora, halla:

a) **sen 43º** **d)** **cos (–54º)** **g)** **arctg 0,25**

b) **cos 33º** **e)** **arcsen 0,16** **h)** **arccos(–0,23)**

c) **tg 2,5 rad** **f)** **arccos 0,99** **i)** **arcsen 1**

a) sen 43º = 0,68 **d)** cos (–54º) = 0,59 **g)** arctg 0,25 = 14º 2´ 10´´

b) cos 33º = 0,84 **e)** arcsen 0,16 = 9º 12´ 25´´ **h)** arccos(–0,23) = 103º 17´ 49´´

c) tg 2,5 rad = –0,75 **f)** arccos 0,99 = 8º 6´35´´ **i)** arcsen 1 = 90º

42. Con la ayuda de la calculadora, halla la medida en grados de los siguientes ángulos.

a) **cos α = 0,129** $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ **c)** **sec α = 1,305** **0º < α < 90º**

b) **tg α = 2,310** **180º < α < 270º** **d)** **cosec α = 1,035** $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

a) arccos 0,129 = 1,44 rad ⇒ α = 2π – 1,44 = 4,84 rad **c)** cos α = 0,77 ⇒ arccos 0,77 = 39,64º

b) arctg 2,310 = 66,59º ⇒ α = 180º + 66,59º = 246,59º **d)** arcsen 0,97 = 1,33 rad ⇒ α = π – 1,33 = 1,81 rad

43. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.

a) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ **c)** $\text{tg}\, x=\sqrt{3}$ **e)** **cosec *x* = –2**

b) **b)** $\text{sen}\, x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** **sec *x* = –1** **f)** **cotg *x* = 1**

a) $\cos x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\arccos\dfrac{-1}{2}=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\\[2mm] \dfrac{4\pi}{3}+2\pi k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$ **d)** sec x = –1 ⇒ x = arccos –1 = π + 2πk , $k\in\mathbb{Z}$

b) $\text{sen}\, x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\text{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\\[2mm] \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$ **e)** cosec x = –2 $\Rightarrow x=\text{arcsen}\dfrac{-1}{2}=\begin{cases}\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k\\[2mm] \dfrac{11\pi}{6}+2\pi k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

c) $\text{tg}\, x=\sqrt{3}\Rightarrow x=\text{arctg}\sqrt{3}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\\[2mm] \dfrac{4\pi}{3}+2\pi k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$ **f)** cotg x = 1 $\Rightarrow \text{tg}\, x=1\Rightarrow x=\text{arctg}1=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\\[2mm] \dfrac{5\pi}{4}+2\pi k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

44. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en grados.

a) **sen x = 1**

b) **cos x = –1**

c) **tg x = $-\sqrt{3}$**

d) **cos x + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = 0**

e) **sec x = $\sqrt{2}$**

f) **sen x + $\frac{1}{2}$ = 1**

a) sen $x = 1 \Rightarrow x = \text{arcsen } 1 = 90^\circ + 360^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) cos $x = -1 \Rightarrow x = \arccos(-1) = 180^\circ + 360^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}$

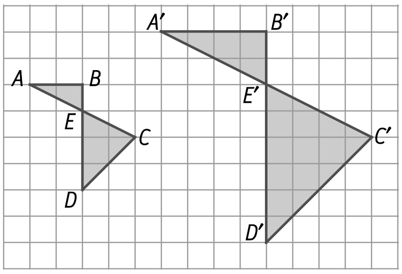
c) $\text{tg}\, x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \begin{cases} 300^\circ + 360^\circ k \\ 120^\circ + 360^\circ k \end{cases}\ k \in \mathbb{Z}$

d) $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 135^\circ + 360^\circ k \\ 225^\circ + 360^\circ k \end{cases}\ k \in \mathbb{Z}$

e) $\sec x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 45^\circ + 360^\circ k \\ 315^\circ + 360^\circ k \end{cases}\ k \in \mathbb{Z}$

f) $\text{sen}\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \text{arcsen}\frac{1}{2} = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}\ k \in \mathbb{Z}$

45. Comprueba que las siguientes figuras son semejantes y calcula la razón de semejanza.



Todos los ángulos homólogos son iguales, ya que los lados que los forman son paralelos.

Por otra parte, los lados correspondientes son proporcionales, ya que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'E'}{AE} = \frac{B'E'}{BE} = \frac{E'C'}{EC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{E'D'}{ED} = 2$$

Por tanto, las figuras son semejantes con razón de semejanza k = 2.

46. Calcula la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos de las siguientes parejas de triángulos semejantes cuyas medidas en centímetros son:

a) **3, 4, 6 y 4,5; x, y**

b) **x, 4, 3 y 2, 2, y**

c) **2, x, 6 e y, 2x, z**

a) La razón de semejanza es $\frac{4{,}5}{3} = 1{,}5 \Rightarrow x = 4 \cdot 1{,}5 = 6$ cm e $y = 6 \cdot 1{,}5 = 9$ cm.

b) La razón de semejanza es $\frac{2}{4} = 0{,}5 \Rightarrow x = \frac{2}{0{,}5} = 4$ cm e $y = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ cm.

c) La razón de semejanza es $\frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 = 4$ cm y $z = 6 \cdot 2 = 12$ cm.

El valor de x puede ser cualquier número real con el cual se pueda formar un triángulo; es decir, $4 < x < 8$.

47. De dos triángulos se conocen las medidas de dos de sus ángulos. Indica en cada caso si son semejantes.

a) **50º, 40º y 90º, 40º**

b) **50º, 40º y 40º, 30º**

c) **40º, 40º y 100º, 40º**

a) El tercer ángulo del primer triángulo debe medir 180º – 50º – 40º = 90º. Por tanto, los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales y son semejantes.

b) El tercer ángulo del primer triángulo debe medir 180º – 50º – 40º = 90º. Por tanto, los dos triángulos tienen sus ángulos diferentes y no son semejantes.

c) El tercer ángulo del primer triángulo debe medir 180º – 40º – 40º = 100º. Por tanto, los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales y son semejantes.

48. El perímetro de un triángulo equilátero mide 90 cm. Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a él si la razón de semejanza es $k = \frac{3}{4}$. ¿Cuál es la razón de sus áreas?

Cada uno de los lados del triángulo original mide 30 cm. Por tanto, el lado de un triángulo equilátero semejante a él medirá $30 \cdot \frac{3}{4} = 22{,}5$ cm.

La razón de sus áreas es $k^2 = \frac{A'}{A} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

49. La arista de un cubo mide 12 m. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante al anterior si la razón de sus volúmenes es $\frac{1}{8}$.

La razón de semejanza entre las longitudes de los cubos es $k = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

Por tanto la arista del semejante medirá $12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ m.

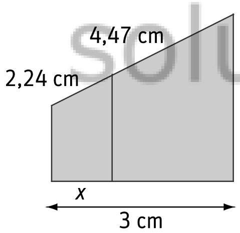
50. Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 cm. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su perímetro mida 40 cm.

El perímetro del rectángulo original es $P = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 16$ cm.

La razón de semejanza es igual a la razón de los perímetros: $k = \frac{40}{16} = 2{,}5$

Por tanto, las medidas del rectángulo semejante son $3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ cm y $5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$ cm.

51. Calcula la longitud *x*.



Aplicando el teorema de Tales:

$\frac{2{,}24}{x} = \frac{4{,}47}{3-x} \Rightarrow 6{,}72 - 2{,}24x = 4{,}47x \Rightarrow 6{,}72 = 6{,}71x \Rightarrow x = 1{,}001$

52. Las medidas de los lados de un pentágono son 3, 7, 8, 10 y 12 cm, respectivamente. Calcula las medidas de los lados de otro pentágono semejante al anterior y tal que:

a) Su lado mayor mida 18 cm.

b) Su perímetro sea de 60 cm.

a) La razón de semejanza es igual a la razón entre los lados mayores: $k = \frac{18}{12} = 1{,}5$

Por tanto, las medidas del pentágono semejante son:

$3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$ cm, $7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5$ cm, $8 \cdot 1{,}5 = 12$ cm y $10 \cdot 1{,}5 = 15$ cm

b) La razón de semejanza es igual a la razón entre los perímetros: $k = \frac{60}{3+7+8+10+12} = \frac{60}{40} = 1{,}5$

Se trata del mismo pentágono del apartado anterior.

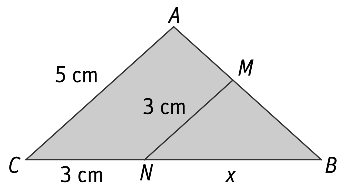
53. Las medidas de un rectángulo son 3 y 5 cm. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior y tal que su área mida 21,6 cm².

El área del rectángulo original es $A = 3 \cdot 5 = 15$ cm^2.

La razón entre sus áreas es $k^2 = \frac{21{,}6}{15} = 1{,}44 \Rightarrow k = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$.

Por tanto, las medidas del rectángulo semejante son $3 \cdot 1{,}2 = 3{,}6$ cm y $5 \cdot 1{,}2 = 6$ cm.

54. Si los segmentos *AC* y *MN* son paralelos, halla la medida del lado *BC*.

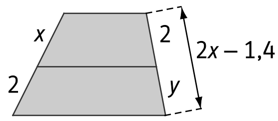


Los triángulos son semejantes por están en posición de Tales.

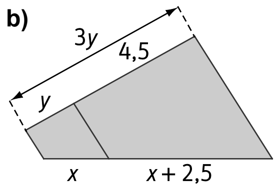
$$\frac{5}{3}=\frac{x+3}{x}\Rightarrow 5x=3x+9\Rightarrow 2x=9\Rightarrow x=\frac{9}{2}=4{,}5\text{ cm}\Rightarrow \overline{BC}=4{,}5+3=7{,}5\text{ cm}$$

55. Calcula el valor de las variables en las siguientes figuras.

a)



b)



a) $\frac{x}{x+2}=\frac{2}{2x-1{,}4}\Rightarrow 2x^2-1{,}4x=2x+4\Rightarrow 2x^2-3{,}4x-4=0\Rightarrow x=\frac{3{,}4\pm 6{,}6}{4}=\begin{cases}2{,}5\\-0{,}8\end{cases}\Rightarrow x=2{,}5$

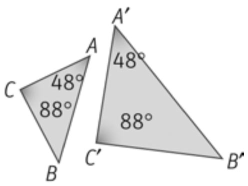
$\frac{2}{y}=\frac{x}{2}\Rightarrow y=\frac{4}{x}=\frac{4}{2{,}5}=1{,}6$

b) $y+4{,}5=3y\Rightarrow 2y=4{,}5\Rightarrow y=2{,}25$

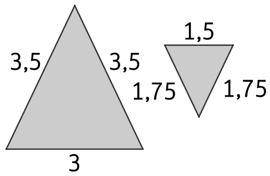
$\frac{x}{y}=\frac{x+2{,}5}{4{,}5}\Rightarrow\frac{x}{2{,}25}=\frac{x+2{,}5}{4{,}5}\Rightarrow 4{,}5x=2{,}25x+5{,}625\Rightarrow 2{,}25x=5{,}625\Rightarrow x=2{,}5$

56. Utilizando alguno de los criterios de semejanza, demuestra que las siguientes parejas de triángulos son semejantes.

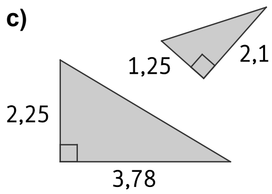
a)



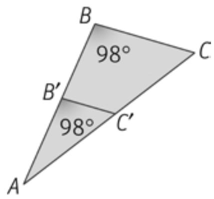
b)



c)



d)



a) Los triángulos son semejantes por tener dos ángulos iguales (Criterio 1).

b) Como $\frac{3{,}5}{1{,}75}=\frac{2{,}5}{1{,}25}=2$, los triángulos son semejantes por tener los tres lados proporcionales (Criterio 3).

c) Como $\frac{3{,}78}{2{,}1}=\frac{2{,}25}{1{,}25}=1{,}8$, los triángulos son semejantes por tener un ángulo igual y los lados que lo forman ser proporcionales (Criterio 2).

d) Los triángulos son semejantes por estar en posición de Tales.

57. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 125 mm. Calcula el valor de uno de los catetos sabiendo que su proyección sobre la hipotenusa mide 45 mm.

Llamando *x* a la medida del cateto desconocido, y aplicando el teorema del cateto:

$x^2=45\cdot 125=5625\Rightarrow x=\sqrt{5625}=75$

El cateto mide 75 mm.

58. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 54 dm, y su proyección sobre la hipotenusa, 32,4 dm. Calcula la medida de la hipotenusa.

Llamando *h* a la medida de la hipotenusa, y aplicando el teorema del cateto:

$54^2 = 32{,}4 \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{54^2}{32{,}4} = 90$

La hipotenusa mide 90 dm.

59. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 24 y 7 cm, respectivamente. Calcula el valor de la hipotenusa y las medidas de las proyecciones de los catetos sobre ella. Calcula también el valor de la altura sobre la hipotenusa.

Llamando *x* a la medida de la hipotenusa, y aplicando el teorema de Pitágoras:

$x = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$ cm

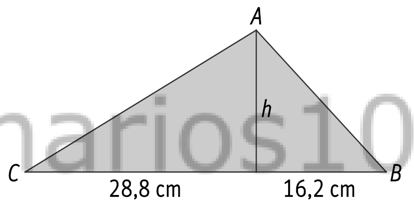
Llamando *m* y *n* a las proyecciones sobre la hipotenusa de los catetos de 24 y 7 cm, respectivamente, y aplicando el teorema del cateto:

$24^2 = m \cdot 25 \Rightarrow m = \dfrac{24^2}{25} = 23{,}04$ cm $7^2 = n \cdot 25 \Rightarrow m = \dfrac{7^2}{25} = 1{,}96$ cm

Llamando *h* a la medida de la altura sobre la hipotenusa, y aplicando el teorema de la altura:

$h^2 = 23{,}04 \cdot 1{,}96 = 45{,}1584 \Rightarrow h = \sqrt{45{,}1584} = 6{,}72$ cm

60. En el siguiente triángulo rectángulo en *A*, calcula la medida de los segmentos desconocidos.



La hipotenusa del triángulo mide 28,8 + 16,2 = 45 cm.

Aplicando el teorema del cateto:

$\overline{AC}^2 = 28{,}8 \cdot 45 = 1296 \Rightarrow \overline{AC} = 36$ cm $\overline{AB}^2 = 16{,}2 \cdot 45 = 729 \Rightarrow \overline{AB} = 27$ cm

Aplicando el teorema de la altura:

$h^2 = 28{,}8 \cdot 16{,}2 = 466{,}56 \Rightarrow h = \sqrt{466{,}56} = 21{,}6$ cm

61. Expresa en radianes la medida de los siguientes ángulos.

a) 35º **c) 125º** **e) 270º**

b) 315º **d) 225º** **f) 330º**

a) $35^\circ = \dfrac{7\pi}{36}$ rad **c)** $125^\circ = \dfrac{25\pi}{36}$ rad **e)** $270^\circ = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

b) $315^\circ = \dfrac{7\pi}{4}$ rad **d)** $225^\circ = \dfrac{5\pi}{4}$ rad **f)** $330^\circ = \dfrac{11\pi}{6}$ rad

62. Expresa en grados sexagesimales la medida de los siguientes ángulos dados en radianes.

a) 7π **c)** $\frac{\pi}{6}$ **e)** $\frac{5\pi}{4}$

b) $\frac{7\pi}{8}$ **d)** $\frac{4\pi}{3}$ **f)** $\frac{5\pi}{11}$

a) 7π rad = 1260º **c)** $\frac{\pi}{6}$ rad = 30º **e)** $\frac{5\pi}{4}$ rad = 225º

b) $\frac{7\pi}{8}$ rad = 157,5º **d)** $\frac{4\pi}{3}$ rad = 240º **f)** $\frac{5\pi}{11}$ rad = 81,81º

63. Expresa los siguientes ángulos como la suma de un ángulo positivo menor de 360º y un número entero de vueltas completas.

a) 650º **c) 1520º** **e) 610º**

b) 900º **d) 3640º** **f) 1925º**

a) 650º = 1 · 360º + 290º **c)** 1520º = 4 · 360º + 80º **e)** 610º = 1 · 360º + 250º

b) 900º = 2 · 360º + 180º **d)** 3640º = 10 · 360º + 40º **f)** 1925º = 5 · 360º + 125º

64. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 2π radianes.

a) $\frac{23\pi}{4}$ **b)** $\frac{32\pi}{3}$ **c)** $\frac{51\pi}{2}$ **d)** 103π **e)** $\frac{175\pi}{6}$

a) $\frac{23\pi}{4} = 2 \cdot 2\pi + \frac{7\pi}{4}$ **c)** $\frac{51\pi}{2} = 12 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$ **e)** $\frac{175\pi}{6} = 14 \cdot 2\pi + \frac{7\pi}{6}$

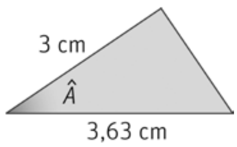
b) $\frac{32\pi}{3} = 5 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ **d)** $103\pi = 51 \cdot 2\pi + \pi$

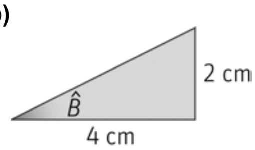
65. Copia y completa la siguiente tabla.

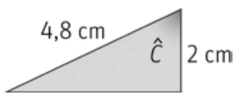
Ángulo	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad
Seno	•••	•••	•••
Coseno	•••	•••	•••
Tangente	•••	•••	•••

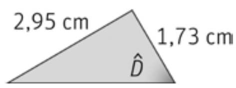
Ángulo	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

66. Calcula las medidas de los ángulos indicados en los siguientes triángulos rectángulos. Da los resultados aproximados a los minutos.

a)


b)


c)


d)


a) $\cos\ \hat{A} = \frac{3}{3,63} = 0,83 \Rightarrow \hat{A}$ = arcos 0,83 = 33º 54´ **c)** $\cos\ \hat{C} = \frac{2}{4,8} = 0,42 \Rightarrow \hat{C}$ = arcos 0,42 = 65º 10´

b) $\text{tg}\ \hat{B} = \frac{2}{4} = 0,5 \Rightarrow \hat{B}$ = arctg 0,5 = 26º 34´ **d)** $\text{tg}\ \hat{D} = \frac{2,95}{1,73} = 1,71 \Rightarrow \hat{D}$ = arctg 1,71 = 59º 41´

67. La hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo rectángulo miden 20 y 16 dm, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas de su ángulo agudo de menor amplitud?

Llamando *x* a la medida del otro cateto, y aplicando el teorema de Pitágoras:

$x = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{144} = 12$

La hipotenusa del triángulo mide 20 dm y, los catetos, 12 y 16 dm.

El ángulo α de menor amplitud es el ángulo opuesto al cateto que mide 12 dm.

$\text{sen } \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\cos \alpha = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\text{tg } \alpha = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

68. Con la ayuda de la calculadora, halla los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) **sen 67º**
b) **sen $\frac{\pi}{7}$ rad**
c) **cos 77º**
d) **cos $\frac{2\pi}{5}$ rad**
e) **tg 39º**
f) **tg $\frac{3\pi}{8}$ rad**

a) sen 67º = 0,92
b) sen $\frac{\pi}{7}$ rad = 0,43
c) cos 77º = 0,22
d) cos $\frac{2\pi}{5}$ rad = 0,31
e) tg 39º = 0,81
f) tg $\frac{3\pi}{8}$ rad = 2,41

69. ¿En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) **α si cos α > 0**
b) **γ si tg γ < 0**
c) **β si sen β > 0**
d) **δ si cosec δ < 0**

a) Primer o cuarto cuadrante
b) Segundo o cuarto cuadrante
c) Primer o segundo cuadrante
d) Tercer o cuarto cuadrante

70. Sin calcular su valor, indica el signo de las siguientes razones trigonométricas.

a) **cos 123º**
b) **sen 750º**
c) **tg 2000º**
d) **cosec 256º**
e) **cotg 568º**
f) **sec 580º**
g) **tg 320º**
h) **cos 130º**
i) **sen 1221º**

a) Negativo
b) Positivo
c) Positivo
d) Negativo
e) Positivo
f) Negativo
g) Negativo
h) Negativo
i) Positivo

71. Expresa las razones trigonométricas de 70º, 160º, 200º y 340º en función de las de 20º.

sen 70º = sen (90º – 20º) = cos 20º
cos 70º = cos (90º – 20º) = sen 20º
tg 70º = tg (90º – 20º) = cotg 20º

sen 160º = sen (180º – 20º) = sen 20º
cos 160º = cos (180º – 20º) = –cos 20º
tg 160º = tg (180º – 20º) = –tg 20º

sen 200º = sen (180º + 20º) = –sen 20º
cos 200º = cos (180º + 20º) = –cos 20º
tg 200º = tg (180º + 20º) = tg 20º

sen 340º = sen (360º – 20º) = –sen 20º
cos 340º = cos (360º – 20º) = cos 20º
tg 340º = tg (360º – 20º) = –tg 20º

72. Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 120º **d) sen (–660º)** **g) cos 450º** **j) tg 150º**
b) sen (–60º) **e) cos 225º** **h) cos (–390º)** **k) tg 420º**
c) sen 510º **f) cos (–150º)** **i) tg 330º** **l) tg (–405º)**

a) sen 120º = sen (180º – 60º) = sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) sen (–60º) = –sen 60º = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

c) sen 510º = sen (360º + 150º) = sen 150º = sen (180º – 30º) = sen 30º = $\frac{1}{2}$

d) sen(–660º) = –sen 660º = –sen (360º + 300º) = –sen 300º = –sen (360º – 60º) = –sen (–60º) = sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) cos 225º = cos (180º + 45º) = –cos 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) cos (–150º) = cos 150º = cos (180º – 30º) = –cos 30º = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

g) cos 450º = cos (360º + 90º) = cos 90º = 0

h) cos (–390º) = cos 390º = cos (360º + 30º) = cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

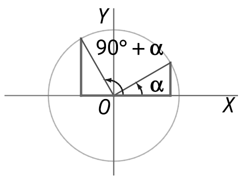
i) tg 330º = tg(360º – 30º) = –tg 30º = $\frac{-\sqrt{3}}{3}$

j) tg 150º = tg(180º – 30º) = –tg 30º = $\frac{-\sqrt{3}}{3}$

k) tg 420º = tg(360º + 60º) = tg 60º = $\sqrt{3}$

l) tg (–405º) = –tg 405º = –tg(360º + 45º) = –tg 45º = –1

73. Con ayuda de la figura, indica las relaciones que se dan entre las razones trigonométricas de los ángulos α y 90º + α.



sen α = –cos (90º + α)

cos α = sen (90º + α)

tg α = $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\cos(90º+\alpha)}{\operatorname{sen}(90º+\alpha)} = \frac{-1}{\operatorname{tg}(90º+\alpha)}$

74. Actividad resuelta.

75. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α si sen α = 0,6.

Como α es un ángulo agudo, entonces cos α > 0 y tg α > 0.

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0,6^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0,6^2 = 0,64 \Rightarrow \cos\alpha = 0,8$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$

76. Halla el seno y la tangente de un ángulo agudo α cuyo coseno vale 0,75.

Como el ángulo α es agudo, entonces sen α > 0 y tg α > 0.

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + 0{,}75^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - 0{,}75^2 = 0{,}4375 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0{,}66$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{0{,}66}{0{,}75} = 0{,}88$$

77. Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α cuya tangente es igual a $\sqrt{5}$.

Como α es un ángulo agudo, entonces sen α > 0 y cos α > 0.

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 6 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}17 \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}41$$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + 0{,}41^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - 0{,}41^2 = 0{,}83 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0{,}91$

78. Con la ayuda de la calculadora, halla las medidas en grados sexagesimales de los siguientes ángulos agudos. Aproxima los resultados a los minutos.

a) $\text{sen}\,\hat{A} = 0{,}125$ **b)** $\cos\hat{B} = 0{,}245$ **c)** $\text{tg}\,\hat{C} = 1{,}25$

a) $\hat{A}$ = arcsen 0,125 = 7º 11´ **b)** $\hat{B}$ = arcos 0,245 = 75º 49´ **c)** $\hat{C}$ = arctg 1,25 = 51º 20´

79. Con la ayuda de la calculadora, halla las medidas en radianes de los siguientes ángulos agudos. Expresa los resultados con tres cifras.

a) $\text{sen}\,\hat{A} = 0{,}85$ **b)** $\cos\hat{B} = 0{,}645$ **c)** $\text{tg}\,\hat{C} = 0{,}556$

a) $\hat{A}$ = arcsen 0,85 = 1,016 **b)** $\hat{B}$ = arcos 0,645 = 0,870 **c)** $\hat{C}$ = arctg 0,556 = 0,507

80. Halla las razones trigonométricas restantes del ángulo α en cada caso.

a) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ **b)** sen α = 0,75 $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ **c)** $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{5}$ $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

a) Como $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, entonces α es un ángulo del cuarto cuadrante. Por tanto, sen α < 0 y tg α < 0.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

b) Como $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, entonces α es un ángulo del segundo cuadrante. Por tanto, cos α < 0 y tg α < 0.

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0{,}75^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}75^2 = 0{,}4375 \Rightarrow \cos\alpha = -0{,}66$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}75}{-0{,}66} = -1{,}14$$

c) Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, entonces α es un ángulo del tercer cuadrante. Por tanto, sen α < 0 y cos α < 0.

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 5 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}17 \Rightarrow \cos\alpha = -0{,}41$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \sqrt{5} \cdot (-0{,}41) = -0{,}92$$

81. Calcula las razones trigonométricas restantes del ángulo α en cada caso.

a) **$\sec\alpha = \frac{-7}{4}$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$**

b) **$\text{cosec}\,\alpha = -1{,}11$ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$**

a) Como 180º < α < 270º, entonces α es un ángulo del tercer cuadrante. Por tanto, sen α < 0, cos < 0 y tg α > 0.

$$\sec\alpha = \frac{-7}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-4}{7}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{-4}{7}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{-4}{7}\right)^2 = \frac{33}{49} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7} : \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{7\sqrt{33}}{28} = \frac{\sqrt{33}}{4}$$

b) Como 270º < α < 360º, entonces α es un ángulo del cuarto cuadrante. Por tanto, sen α < 0, cos α > 0 y tg α < 0.

$\text{cosec}\,\alpha = -1{,}11 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -0{,}9$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (-0{,}9)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - (-0{,}9)^2 = 0{,}19 \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}44$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{-0{,}9}{0{,}44} = -2{,}05$$

82. Comprueba si existe un ángulo α tal que:

a) **sen α = 0,52 y cos α = 0,43**

b) **tg α = 1,483 y sec α = 1,789**

c) **sen α = 0,7071 y tg α = –0,7002**

a) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 0{,}52^2 + 0{,}43^2 = 0{,}4553$

No existe ningún ángulo α tal que sen α = 0,52 y cos α = 0,43 porque no se cumple la ecuación fundamental de la trigonometría: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $1 + \text{tg}^2\alpha = 1 + 1{,}483^2 = 3{,}2 = \sec^2\alpha$

Sí que existe un ángulo α tal que tg α = 1,483 y sec α = 1,789 porque se cumple la identidad trigonométrica

$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$

c) $\cos\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{0{,}7071}{-0{,}7002} = -1{,}01$

No existe ningún ángulo α tal que sen α = 0,7071 y tg α = –0,7002 porque siempre se cumple que cos α > –1.

83. Si $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, y α es un ángulo agudo halla:

a) **sen (α + 180º)**

b) **tg (90º – α)**

c) **cos (180º – α)**

d) **sen (–α)**

Como el ángulo α es agudo entonces sen α > 0 y tg α > 0.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$$

a) $\text{sen}\,(\alpha + 180^\circ) = -\text{sen}\,\alpha = \frac{-12}{13}$

b) $\text{tg}\,(90^\circ - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha = \frac{5}{12}$

c) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{-5}{13}$

d) $\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha = \frac{-12}{13}$

84. Actividad resuelta.

85. Demuestra esta igualdad trigonométrica.

$$\frac{1+\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{2}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{1+2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha}$$

$$\frac{1+\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{2}{\mathrm{tg}\,\alpha}}{1+2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}=\frac{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha}+\dfrac{2\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}}{1+2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}=\frac{\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha}\left(\mathrm{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)}{1+2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}=\frac{1+2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha\left(1+2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)}=\frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha}$$

86. Demuestra las siguientes igualdades.

a) $\sqrt{\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}}=\cos x$ **b)** $\dfrac{\mathrm{sen}\,x\cos x}{\mathrm{tg}\,x}=1-\mathrm{sen}^2 x$ **c)** $(1+\mathrm{tg}^2 x)\cos^2 x=1$

a) $\sqrt{\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}}=\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$

b) $\dfrac{\mathrm{sen}\,x\cos x}{\mathrm{tg}\,x}=\dfrac{\mathrm{sen}\,x\cos^2 x}{\mathrm{sen}\,x}=\cos^2 x=1-\mathrm{sen}^2 x$

c) $(1+\mathrm{tg}^2x)\cos^2x=\cos^2x+\mathrm{tg}^2x\cdot\cos^2x=\cos^2x+\mathrm{sen}^2x=1$

87. Demuestra las identidades siguientes.

a) $\mathrm{tg}^2\alpha(1-\mathrm{sen}^2\alpha)=\mathrm{sen}^2\alpha$ **b)** $\dfrac{\mathrm{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{2}=\mathrm{sen}^2\alpha$ **c)** $(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{cotg}\,x)^2=\sec^2x+\mathrm{cosec}^2x$

a) $\mathrm{tg}^2\alpha(1-\mathrm{sen}^2\alpha)=\dfrac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\mathrm{sen}^2\alpha$

b) $\dfrac{\mathrm{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{2}=\dfrac{\mathrm{sen}^2\alpha+\mathrm{sen}^2\alpha}{2}=\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2\alpha}{2}=\mathrm{sen}^2\alpha$

c) $(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{cotg}\,x)^2=\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}\right)^2=\left(\dfrac{\mathrm{sen}^2x+\cos^2x}{\cos x\,\mathrm{sen}\,x}\right)^2=\left(\dfrac{1}{\cos x\,\mathrm{sen}\,x}\right)^2=\dfrac{1}{\cos^2x\,\mathrm{sen}^2x}=\sec^2x+\mathrm{cosec}^2x$

88. Con la ayuda de la calculadora, halla las medidas en radianes de los siguientes ángulos.

a) $\mathrm{sen}\,\hat{A}=0{,}559$ $\quad\dfrac{\pi}{2}<\hat{A}<\pi$

b) $\cos\hat{B}=0{,}775$ $\quad\dfrac{3\pi}{2}<\hat{B}<2\pi$

c) $\mathrm{tg}\,\hat{C}=1{,}5$ $\quad\dfrac{\pi}{2}<\hat{C}<\pi$

a) Como $\dfrac{\pi}{2}<\hat{A}<\pi$, entonces $\hat{A}$ es un ángulo del segundo cuadrante.

$\mathrm{sen}\,\hat{A}=0{,}559\Rightarrow\hat{A}=\pi-\mathrm{arcsen}\,0{,}559=\pi-0{,}59=2{,}55$ rad

b) Como $\dfrac{3\pi}{2}<\hat{B}<2\pi$, entonces $\hat{B}$ es un ángulo del cuarto cuadrante.

$\cos\hat{B}=0{,}775\Rightarrow\hat{B}=2\pi-\arccos 0{,}775=2\pi-0{,}68=5{,}60$ rad

c) Como $\pi<\hat{C}<\dfrac{3\pi}{2}$, entonces $\hat{C}$ es un ángulo del tercer cuadrante.

$\mathrm{tg}\,\hat{C}=1{,}5\Rightarrow\hat{C}=\pi+\mathrm{arctg}\,1{,}5=\pi+0{,}98=4{,}12$ rad

89. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.

a) $\mathbf{tg}x = -2$ **b)** $\mathbf{1 - 5cos}x = 6$ **c)** $\mathbf{sen}x = 0,81$ **d)** $\mathbf{4sen}x + 1 = 0$

a) $\text{tg}x = -2 \Rightarrow x = \text{arctg}(-2) = \begin{cases} 2,034 + 2\pi k \\ 5,176 + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $1 - 5\cos x = 6 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \arccos(-1) = \pi + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $\text{sen}x = 0,81 \Rightarrow x = \text{arcsen}\ 0,81 = \begin{cases} 0,9444 + 2\pi k \\ 2,197 + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

d) $4\text{sen}x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \left(\frac{-1}{4}\right) \Rightarrow x = \text{arcsen}\left(\frac{-1}{4}\right) = \begin{cases} 3,394 + 2\pi k \\ 6,031 + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

90. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en grados.

a) $\mathbf{\cos(3x - 40^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2}}$ **b)** $\mathbf{2sen(x + 100^\circ) = \sqrt{3}}$ **c)** $\mathbf{tg\ (4x - 25^\circ) = 1}$

a) $\cos(3x - 40^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3x - 40^\circ = \arccos\frac{-\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} 150^\circ + 360^\circ k \\ 210^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{190^\circ}{3} + 120^\circ k \\ \frac{250^\circ}{3} + 120^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $2\text{sen}(x + 100^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow x + 100^\circ = \text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 120^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -40^\circ + 360^\circ k \\ 20^\circ + 360^\circ k \end{cases} = \begin{cases} 320^\circ + 360^\circ k \\ 20^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $\text{tg}\ (4x - 25^\circ) = 1 \Rightarrow 4x - 25^\circ = \text{arctg}\ 1 = \begin{cases} 45^\circ + 360^\circ k \\ 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{70^\circ}{4} + 90^\circ k \\ \frac{125^\circ}{2} + 90^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

91. Simplifica las expresiones trigonométricas.

a) $\mathbf{\frac{2\,sen\,x\cos x}{1 + \cos^2 x - sen^2 x}}$ **b)** $\mathbf{\frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}}$ **c)** $\mathbf{\frac{sen^2 x}{1 - \cos x}}$

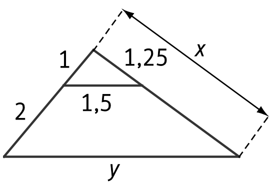
a) $\frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1 + \cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \text{tg}\,x$

b) $\frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{1 - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x + \text{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{1} = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

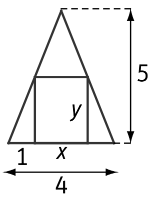
c) $\frac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$

92. Utilizando los criterios de semejanza, encuentra triángulos semejantes en las siguientes figuras y calcula las medidas de los segmentos desconocidos.

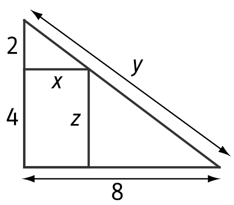
a)



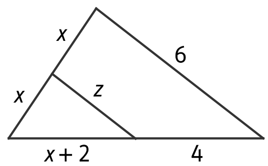
b)



c)



d)



a) $\frac{1}{1,5} = \frac{3}{y} \Rightarrow y = 4,5$

$\frac{1}{1,25} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 3,75$

b) $x = 4 - 2 = 2$

$\frac{5}{4} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2,5$

c) $\frac{2}{x} = \frac{6}{8} \Rightarrow x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$y = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10;\ z = 4$

d) $\frac{x}{x + 2} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2$

$\frac{8}{4} = \frac{6}{z} \Rightarrow z = 3$

93. Halla las razones trigonométricas de 225º y –225º.

sen 225º = sen (180º + 45º) = –sen 45º = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ sen (–225º) = –sen 225º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos 225º = cos (180º + 45º) = –cos 45º = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ cos (–225º) = cos 225º = $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

tg 225º = tg (180º + 45º) = tg 45º = 1 tg (–225º) = –tg 225º = –1

94. Si α es un ángulo agudo y sen α = $\frac{4}{9}$, ¿cuáles son las razones del ángulo α + 180º?

Como el ángulo α es agudo entonces cos α > 0 y tg α > 0.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{65}{81} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{65}}{9}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{4}{9} : \frac{\sqrt{65}}{9} = \frac{36}{9\sqrt{65}} = \frac{36\sqrt{65}}{585} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

sen (α + 180º) = –sen α = $-\frac{4}{9}$ cos (α + 180º) = –cos α = $-\frac{\sqrt{65}}{9}$ tg (α + 180º) = tg α = $\frac{4\sqrt{65}}{65}$

95. Actividad resuelta.

96. ¿Verdadero o falso? Razona tu respuesta.

a) Todos los rectángulos son semejantes.

b) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

c) Todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes.

d) Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.

a) Falso

Por ejemplo, un rectángulo de lados 1 cm y 2 cm y otro de lados 1 cm y 3 cm no tienen sus lados homólogos proporcionales y, por tanto, no son semejantes.

b) Verdadero

Todos los triángulos equiláteros tienen sus ángulos iguales, 60º, y los lados homólogos son proporcionales ya que en un triángulo equilátero los lados son iguales.

c) Verdadero

Los ángulos correspondientes son iguales, ya que en todos los casos miden 90°, 45° y 45°, y los lados correspondientes son proporcionales, pues son de la forma x, x y $x\sqrt{2}$. .

d) Verdadero

Los ángulos de dos triángulos semejantes son iguales. Es decir, son proporcionales con razón de proporcionalidad 1.

97. Emprende

Halla la altura del edificio donde estudias utilizando únicamente un lápiz, un papel y una cinta métrica. Explica el método que has utilizado.

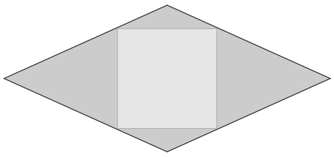
Respuesta libre.

98. Una plancha de hierro fundido tiene una masa de 8,5 kg. ¿Qué masa tendrá otra plancha semejante del mismo metal y grosor si sus dimensiones son el triple de las de la plancha original?

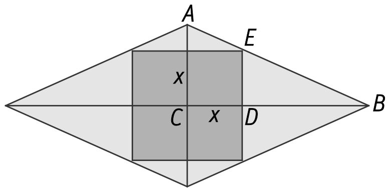
La razón de semejanza es $k = 3$. La razón de las áreas será $k^2 = 9$.

Al mantenerse el grosor, la masa de la segunda plancha será nueve veces la masa de la primera: 9 · 8,5 = 76,5 kg

99. Se quieren fabricar losetas como las de la figura que estén formadas por un rombo de diagonales 18,1 y 8,36 cm, respectivamente, y un cuadrado inscrito en él. Calcula el área de la zona verde (cuadrado interior) y la suma de las áreas de las zonas naranjas (superficie entre el rombo).



Los triángulos *ABC* y *EBD* son semejantes por estar en posición de Tales.

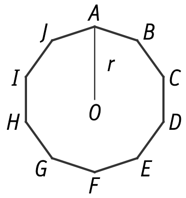


$$\frac{4{,}18}{9{,}05} = \frac{x}{9{,}05 - x} \Rightarrow 37{,}829 - 4{,}18x = 9{,}05x \Rightarrow x = \frac{37{,}829}{13{,}23} = 2{,}86 \text{ cm}$$

Área verde: $2{,}86^2 \cdot 4 = 32{,}7$ cm^2

Área naranja: $\frac{18{,}10 \cdot 8{,}36}{2} - 32{,}7 = 42{,}96$ cm^2

100. Observa el decágono regular y contesta.



a) ¿Qué ángulo hay que recorrer para llevar el radio *r* desde el vértice *A* hasta *B* en el sentido contrario a las agujas del reloj?

b) ¿A dónde llegará *r* si se encuentra inicialmente en *B* y se le aplica un giro de 108º?

c) ¿A dónde llegará *r* si se encuentra inicialmente en *G* y se le aplica un giro de –144º?

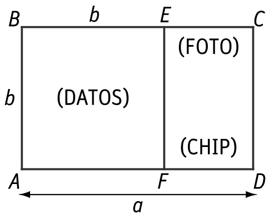
Desde un vértice hasta el vértice consecutivo, el radio *r* recorre un ángulo de 360º : 10 = 36º.

a) Para ir del vértice *A* hasta el vértice *B* el radio *r* recorre un ángulo de 36º en el sentido de las agujas del reloj. Es decir, recorre un ángulo de 360º–36º = 324º.

b) Si el radio *r* se encuentra inicialmente en *B* y se le aplica un giro de 108º = 3 ·36º, el radio llegará al vértice *I*.

c) Si el radio *r* se encuentra inicialmente en *G* y se le aplica un giro de 144º = 4 ·36º, en sentido contrario a las agujas del reloj, el radio llegará al vértice *C*.

101. El carnet del polideportivo tiene la propiedad que el rectángulo *ABCD* que lo forma es semejante al rectángulo *ECDF*. La zona *ABEF* es un cuadrado de lado *b*. Calcula el cociente de las dos medidas *a* y *b* del carnet.

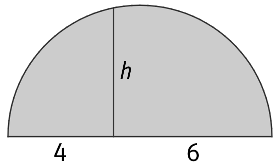


ABCD y *ECDF* son semejantes por tener sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow a^2 - ab = b^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{5b^2}}{2} = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} = \frac{b\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$$

Como $a > 0$, entonces $a = \frac{b\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{b\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

102. El valor *h* en la siguiente figura es:



A. $h = 4$ **B.** $h = 6$ **C.** $h = \sqrt{24}$ **D.** $h = \sqrt{10}$

Un ángulo interior de una circunferencia que abarca un diámetro mide 90º.

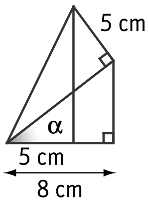
Por tanto, se forma un triángulo rectángulo cuya altura sobre la hipotenusa es *h* y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 4 y 6.

Aplicando el teorema de la altura:

$h = 4 \cdot 6 = 24 \Rightarrow h = \sqrt{24}$

La respuesta correcta es la C.

103. El seno del ángulo α de la figura vale:



A. 0,3

B. 0,4

C. 0,5

D. 0,6

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{8-5}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

La respuesta correcta es la A.

Encuentra el error

104. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo de área 46,875 cm² semejante a otros cuyos catetos miden 5 y 12 cm.

El área de un triángulo semejante es $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ cm², y su hipotenusa, $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm.

Luego, la razón de semejanza de los dos triángulos es:

$$\frac{46{,}875}{30} = 1{,}5625$$

La hipotenusa mide: 13 · 1,5625 = 20,3125 cm

¿Dónde está el error?

La razón de semejanza de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza de las longitudes.
En este ejercicio, el error está en considerar que las razones de semejanza de las áreas coinciden con la razón de semejanza de las longitudes.

La razón de semejanza entre las áreas es $k^2 = \frac{46{,}875}{30} = 1{,}5625$.

Por tanto, la razón de semejanza entre las longitudes es $k = \sqrt{1{,}5625} = 1{,}25$.
La hipotenusa mide: 13 · 1,25 = 16,25 cm.

PONTE A PRUEBA

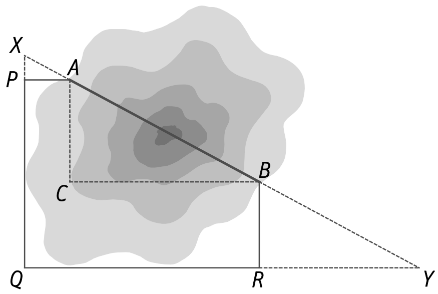
La profundidad del pozo

Actividad resuelta.

El túnel de Eupalinos

Cuando Polícrates encargó a Eupalinos construir un túnel bajo la montaña que, partiendo simultáneamente de *A* y *B*, se encontrara en las profundidades de la roca, el sabio griego recurrió a los triángulos semejantes.

El siguiente método le permitió calcular la dirección con la que se debía horadar la montaña desde cada uno de los extremos.



1. **Traza el triángulo imaginario *ABC* y, en la falda de la montaña, toma las medidas *AP* = 100 m, *PQ* = 700 m, *QR* = 1060 m y *RB* = 300m, en las que todos los ángulos son rectos. Obtén las distancias *AC* y *CB*.**

   $AC = PQ - BR = 400$ m $CB = QR - AP = 960$ m.

2. **¿Cuánto medirá el túnel?**

   Aplicando el teorema de Pitágoras:

   $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{400^2 + 960^2} = 1040$

   El túnel medirá 1040 m.

3. **¿Cómo deben ser los segmentos *PX* y *RY* para que los triángulos *ABC*, *XPA* y *BRY* sean semejantes?**

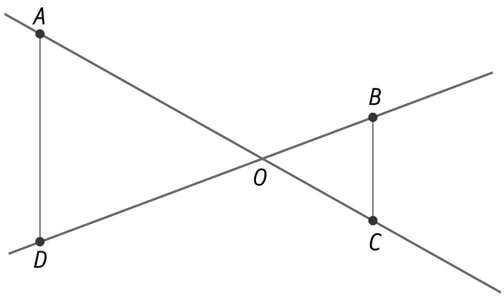
   Los segmentos *PX* y *RY* deben ser una prolongación de *PQ* y *QR* tales que $\frac{PX}{AP} = \frac{BR}{RY} = \frac{AC}{BC}$.

4. **Halla las distancias *PX* y *RY*.**

   $\frac{PX}{100} = \frac{400}{960} \Rightarrow PX = 41{,}67$ m   y $\frac{300}{RY} = \frac{400}{960} \Rightarrow RY = 720$ m

¿Son o no segmentos paralelos?

Observa la figura y resuelve.



Si las medidas de los segmentos son:

$\overline{OA}$ = 46,656 cm **$\overline{OB}$ = 41,472 cm** **$\overline{OC}$ = 20,736 cm** **$\overline{OD}$ = 23,328 cm**

1. **Compara los productos de las distancias $\overline{OA}\cdot\overline{OC}$ y $\overline{OB}\cdot\overline{OD}$.**

   $\overline{OA}\cdot\overline{OC}$ = 46,656 · 20,736 = 967,458816 y $\overline{OB}\cdot\overline{OD}$ = 41,472 · 23,328 = 967,458816

   Los productos de las distancias $\overline{OA}\cdot\overline{OC}$ y $\overline{OB}\cdot\overline{OD}$ son iguales.

2. **Compara los productos de las distancias $\overline{OA}\cdot\overline{OD}$ y $\overline{OB}\cdot\overline{OC}$.**

   $\overline{OA}\cdot\overline{OD}$ = 46,656 · 23,328 = 1088,391168 y $\overline{OB}\cdot\overline{OC}$ = 41,472 · 20,736 = 859,963392

3. **Con los resultados obtenidos en los apartados anteriores, ¿puedes decidir si los segmentos *AB* y *CD* son o no paralelos?**

   AB y *CD* no son paralelos porque $\overline{OA}\cdot\overline{OD} \neq \overline{OB}\cdot\overline{OC}$

4. **¿Y si se modifica únicamente la distancia $\overline{OD}$ para el valor $\overline{OD}$ = 18,432 cm?**

   $\overline{OA}\cdot\overline{OD}$ = 46,656 · 23,328 = 859,963392 = 41,472 · 20,736 = $\overline{OB}\cdot\overline{OC}$

   En este caso *AB* y *CD* son paralelos porque $\overline{OA}\cdot\overline{OD} = \overline{OB}\cdot\overline{OC}$

La altura del alcornoque

Cinthya ha encontrado un alcornoque con un nido de buitre negro en la copa. Se ha alejado unos 35 m del árbol para mirar con su catalejo y poder observar el nido con perspectiva. Sus ojos están a una altura de metro y medio y el catalejo forma un ángulo de 11º con el suelo.

1. **¿A qué altura está el nido?**

   A. Menos de 6 m **B. Entre 6 y 6,5 m** **C. Entre 6,5 y 7 m** **D. Más de 7 m**

   Llamamos *x* a la distancia que hay desde el suelo hasta el nido.

   $\text{tg } 11º = \frac{x - 1{,}5}{35} \Rightarrow x - 1{,}5 = 35 \cdot \text{tg } 11º \Rightarrow x - 1{,}5 = 6{,}8 \Rightarrow x = 8{,}3$

   La respuesta correcta es la D.

2. **Si se aleja 100 m del pie del alcornoque, ¿aumenta o disminuye la inclinación del catalejo para seguir observando el nido? ¿Qué ángulo forma el catalejo con el suelo en este caso?**

   Si se aleja 100 m del pie del alcornoque la inclinación del catalejo para seguir mirando el suelo disminuye.

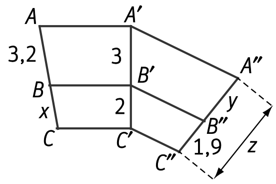
   Llamamos α al ángulo que forma el catalejo con el suelo.

   $\text{tg } \alpha = \frac{6{,}8}{100} = 0{,}068 \Rightarrow \alpha = \text{arctg } 0{,}068 = 3º\ 53'24''$

   El catalejo forma un ángulo de 3º 53´24´´ con el suelo.

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula el valor de x, y, z en la siguiente figura.



Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{3{,}2}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 3{,}2}{3} = 2{,}13$$

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'C'}{B''C''} \Rightarrow \frac{3}{y} = \frac{2}{1{,}9} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 1{,}9}{2} = 2{,}85$$

$z = 1{,}9 + y = 1{,}9 + 2{,}85 = 4{,}75$

2. El perímetro de un triángulo es de 15 cm y es semejante a otro triángulo de lados 7,5; 6 y 9 cm. ¿Cuánto miden los lados de ese triángulo? ¿Cuál es la razón de semejanza?

El perímetro del triángulo semejante es $P = 7{,}5 + 6 + 9 = 22{,}5$ cm.

La razón de semejanza de las longitudes de los triángulos es $k = \frac{22{,}5}{15} = 1{,}5$.

Por tanto, los lados del triángulo original medirán:

Homólogo al lado de 7,5 cm: $x \cdot 1{,}5 = 7{,}5 \Rightarrow x = 5$ cm

Homólogo al lado de 6 cm: $x \cdot 1{,}5 = 6 \Rightarrow x = 4$ cm

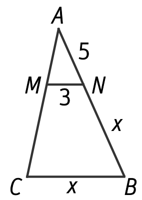
Homólogo al lado de 9 cm: $x \cdot 1{,}5 = 9 \Rightarrow x = 6$ cm

3. Las áreas de dos hexágonos semejantes son 104 y 26 cm^2, respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del mayor si el del menor es de 12 cm?

La razón de semejanza entre las áreas es $k^2 = \frac{104}{26} = 4$. Por tanto, la razón de semejanza de las longitudes de los hexágonos es $k = 2$.

El perímetro del mayor es $12 \cdot k = 12 \cdot 2 = 24$ cm.

4. Considera los triángulos de la figura.



a) ¿Cómo deben ser los segmentos *MN* y *BC* para que los triángulos *ABC* y *AMN* sean semejantes?

b) Halla el valor de *x* suponiendo que se verifica la condición del apartado anterior e indica la razón de semejanza.

a) Para que los triángulos *ABC* y *AMN* sean semejantes, los segmentos *MN* y *BC* deben ser paralelos.

b) $\frac{5}{3} = \frac{5+x}{x} \Rightarrow 5x = 15 + 3x \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = 7{,}5$

5. La razón de semejanza es $k = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5$. **Expresa $\frac{7\pi}{12}$ rad en grados y 96º en radianes.**

$$\frac{7\pi}{12} \text{ rad} = \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ$$

$$96^\circ = 96 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{8\pi}{15} \text{ rad}$$

6. Halla el seno y el coseno del ángulo α del cuarto cuadrante y tal que tg α = $-\frac{4}{3}$.

Como α es un ángulo del cuarto cuadrante, entonces sen α < 0 y cos α > 0.

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \left(\frac{-4}{3}\right)\cdot\left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

7. Si sen α = 0,2, y α es un ángulo agudo halla:

a) sen (180º – α) **b) cos (90º – α)** **c) cos (–α)**

Como α es un ángulo agudo entonces cos α > 0.

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0{,}2^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}2^2 = 0{,}96 \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}98$

a) sen (180º – α) = sen α = 0,2 **b)** cos (90º – α) = sen α = 0,2 **c)** cos (–α) = cos α = 0,98

8. Demuestra la siguiente igualdad.

$$\frac{\textbf{sen}^2\, \boldsymbol{x} + \textbf{sen}\, \boldsymbol{x} \,\textbf{cos}\, \boldsymbol{x}}{\mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{1}}{\textbf{tg}\, \boldsymbol{x}}} = \textbf{sen}^2\, \boldsymbol{x}$$

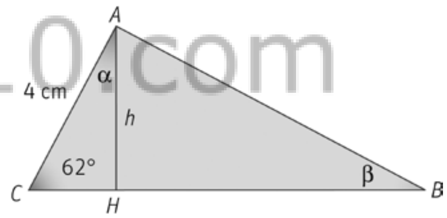
$$\frac{\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x \cos x}{1 + \dfrac{1}{\text{tg}\, x}} = \frac{\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x \cos x}{1 + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}} = \frac{\text{sen}\, x\left(\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x \cos x\right)}{\text{sen}\, x + \cos x} = \frac{\text{sen}^2 x\left(\text{sen}\, x + \cos x\right)}{\text{sen}\, x + \cos x} = \text{sen}^2 x$$

9. El triángulo de la figura es rectángulo en A.

a) Calcula las medidas de los lados desconocidos y de *h*.

b) Calcula las razones trigonométricas del ángulo α.

c) Calcula las amplitudes de los ángulos α y β.



a) Calculamos la distancia $\overline{CH}$: $\cos 62º = \frac{\overline{CH}}{4} \Rightarrow \overline{CH} = \cos 62º \cdot 4 = 1{,}88$ cm

Aplicando el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{4^2 - 1{,}88^2} = 3{,}53$ cm

Por el teorema de la altura: $3{,}53^2 = 1{,}88 \cdot \overline{BH} \Rightarrow \overline{BH} = \frac{3{,}53^2}{1{,}88} = 6{,}63$ cm

$\overline{CB} = \overline{CH} + \overline{BH} = 1{,}88 + 6{,}63 = 8{,}51$ cm

Aplicando el teorema de Pitágoras: $\overline{AB} = \sqrt{3{,}53^2 + 6{,}63^2} = 7{,}51$ cm

b) El ángulo de 62º y α son ángulos complementarios.

sen α = cos (90º – α) = cos 62º = 0,47

cos α = sen (90º – α) = sen 62º = 0,88

tg α = cotg (90º – α) = cotg 62º = $\frac{1}{\text{tg}\, 62º}$ = 0,53

c) α = 180º – (90º + 62º) = 180º – 152º = 28º

sen β = $\frac{3{,}53}{7{,}51}$ = 0,47 ⇒ β = arcsen 0,47 = 28º