9 Funciones elementales

ANALIZA Y DECIDE

¿Qué tipo de curva no se utiliza en los ramales de entrada y salida de las autopistas? ¿Cuál es la más adecuada?

Un arco de circunferencia no se utiliza en los ramales de entrada y salida de las autopistas.

La curva más adecuada en estos casos es la espiral de Cornu o clotoide.

¿Conoces otro tipo de espirales que se den en la naturaleza o en obras construidas por el hombre? Compara tu respuesta con tus compañeros.

Respuesta libre.

Por ejemplo, la espiral aúrea o de Durero que aparece en las escamas de una piña, en las semillas del girasol, en el nautilus, en “La Mona Lisa” de Da Vinci, en el Partenón de Atenas… o la espiral logarítmica que aparece en los brazos de las galaxias o de los huracanes, en las telas de araña…

OBSERVA Y CONTESTA

Dibuja una espiral en tu cuaderno. ¿Es igual que la parte de la espiral que se ve en la fotografía? ¿Cuántas dimensiones tienen cada una?

Respuesta libre.

Actividades propuestas

1. Señala cuáles de las siguientes funciones son polinómicas. En caso afirmativo, indica el grado y la variable independiente.

a) $f(x) = 2$ **c)** $f(x) = -2\sqrt{x} - 2x^2$ **e)** $f(x) = x + \dfrac{1}{2x}$

b) $f(z) = -5 - 2z^2$ **d)** $f(t) = -3t^3 - 4t$ **f)** $f(v) = \dfrac{v^3}{2}$

a) Función polinómica de grado 1 y cuya variable independiente es *x*.

b) Función polinómica de grado 2 y cuya variable independiente es *z*.

c) No es función polinómica.

d) Función polinómica de grado 3 y cuya variable independiente es *t*.

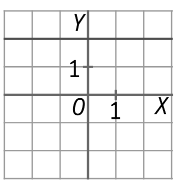
e) No es función polinómica.

f) Función polinómica de grado 3 y cuya variable independiente es *v*.

2. Representa estas funciones lineales e indica su pendiente y su ordenada en el origen.

a) $f(x) = 2$ **b)** $f(x) = -2x$ **c)** $f(x) = x - 3$ **d)** $f(x) = -2x + 2$

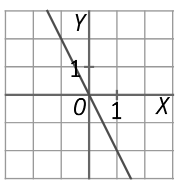
a)



Pendiente $a = 0$

Ordenada $b = 2$

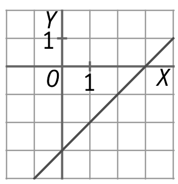
b)



Pendiente $a = -2$

Ordenada $b = 0$

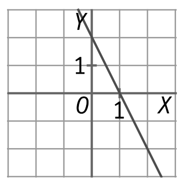
c)



Pendiente $a = 1$

Ordenada $b = -3$

d)



Pendiente $a = -2$

Ordenada $b = 2$

3. La gráfica de la función polinómica de primer grado $y = f(x)$ pasa por el punto (3, 5) y su pendiente es 2. Determina:

a) $f(4)$.

b) La expresión de la función $f(x)$.

c) La ordenada en el origen.

a) La expresión de la función polinómica de primer grado es $y = 2x + b$.

$a = \dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = f(4) - 5 = 2 \Rightarrow f(4) = 7$

b) Como la recta pasa por el punto (3, 5), entonces $5 = 2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -1$.

La expresión de la función es $f(x) = 2x - 1$.

c) La ordenada en el origen es $b = -1$.

4. Determina el sentido de las ramas, las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas.

a) $f(x) = x^2 + 4x$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $f(x) = 2x^2 - 5x$

a) $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia arriba.

Vértice $V(-2, f(-2)) = V(-2, -4) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = -2$

b) $a = -1 < 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia abajo.

Vértice $V(2, f(2)) = V(2, 3) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = 2$

c) $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia arriba.

Vértice $V(1, f(1)) = V(1, 0) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = 1$

d) $a = 2 > 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia arriba.

Vértice $V\left(\dfrac{5}{4}, f\left(\dfrac{5}{4}\right)\right) = \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{-25}{8}\right) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = \dfrac{5}{4}$

5. Actividad resuelta.

6. Representa las siguientes funciones cuadráticas.

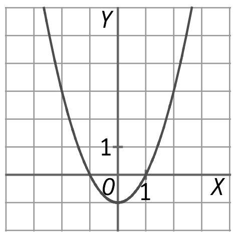
a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = (x - 3)^2$

a) $f(x) = x^2 - 1$

- $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas se abren hacia arriba.
- Vértice $V(0, f(0)) = V(0, -1)$
- Eje de simetría: $x = 0$
- Punto de corte con el eje Y: $f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1)$
- Puntos de corte con el eje X:

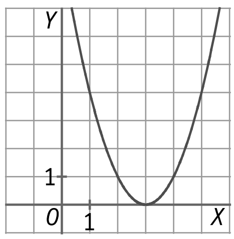
  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$



b) $f(x) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

- $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas se abren hacia arriba.
- Vértice $V(3, f(3)) = V(3, 0)$
- Eje de simetría: $x = 3$
- Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 9 \Rightarrow (0, 9)$
- Puntos de corte con el eje X:

  $(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 0)$



7. Estudia las características y representa de forma aproximada la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 1$.

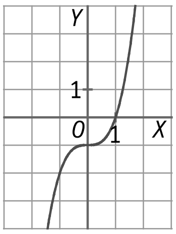
$D(f) = \mathbb{R}$

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1)$

Puntos de corte con el eje X: $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$

Es función impar porque $-f(x) = -x^3 + 1 = f(-x)$

x	0	0,1	0,5	1	1,5	2
y	–1	0,999	–0,875	0	2,375	7



8. Actividad resuelta.

9. Indica cuáles de las funciones son racionales. Justifícalo.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x} + x^2 - 2x$

b) $f(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{5}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - \sqrt{2x}}{x+1}$

a) $f(x) = \dfrac{3}{x} + x^2 - 2x = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{x}$ es una función racional, puesto que es el cociente de dos polinomios.

b) $f(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x-1}$ es una función racional, puesto que es el cociente de dos polinomios.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{5}$ es una función polinómica, puesto que $f(x) = \dfrac{1}{5}x^2 - \dfrac{1}{5}x - \dfrac{1}{5}$.

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - \sqrt{2x}}{x+1}$ no es una función racional, porque el numerador, P(x) = $x^3 - \sqrt{2x}$, no es un polinomio.

10. Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{5}{x(3x+1)}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+3}$

d) $f(x) = \dfrac{4x+8}{x^2 - 8x + 7}$

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{-1}{3}\right\}$

c) $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-3}{2}\right\}$

d) $f(x) = \dfrac{4x+8}{x^2 - 8x + 7} = \dfrac{4x+8}{(x-1)(x-7)} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{1, 7\}$

11. Indica el dominio y el crecimiento de las funciones.

a) $y = \dfrac{3}{x}$

b) $y = \dfrac{-2}{x}$

c) $y = \dfrac{1}{-x}$

d) $y = \dfrac{1}{\dfrac{x}{2}}$

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$k = 3 \Rightarrow$ Decreciente

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$k = -3 \Rightarrow$ Creciente

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$k = -1 \Rightarrow$ Creciente

d) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$k = 2 \Rightarrow$ Decreciente

12. Determina los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones racionales.

a) $y = \dfrac{2x+3}{x^2-1}$ **b)** $y = \dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

a) Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3)$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{2x+3}{x^2-1} \Rightarrow x = \dfrac{-3}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{-3}{2}, 0\right)$

Signo de la función:

La función, con $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, corta al eje X en el punto $\left(\dfrac{-3}{2}, 0\right)$.

Los intervalos a estudiar son:

- En $\left(-\infty, \dfrac{-3}{2}\right)$: $f(-2) = -\dfrac{1}{3} < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(-1, 1)$: $f(0) = -3 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $\left(\dfrac{-3}{2}, -1\right)$: $f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{88}{9} > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(1, +\infty)$: $f(2) = \dfrac{7}{3} > 0 \Rightarrow$ Positiva

b) $y = \dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1} = x + 3$, con $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3)$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = x + 3 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 0)$

Signo de la función:

La función, con $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, corta al eje X en el punto $(-3, 0)$.

Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty, -3)$: $f(-4) = -1 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(-3, 1)$: $f(0) = 3 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(1, +\infty)$: $f(2) = 5 > 0 \Rightarrow$ Positiva

13. El dominio de la función $y = \dfrac{x+5}{x^2+bx+c}$ es $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 4) \cup (4, +\infty)$. Calcula b y c.

Como el dominio es $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 4) \cup (4, +\infty)$, entonces las raíces del denominador son $x = -2$ y $x = 4$.

Por tanto, $x^2 + bx + c = (x + 2)(x - 4) = x^2 - 2x - 8 \Rightarrow b = -2$ y $c = -8$.

14. Actividad resuelta.

15. ¿Cuál es la expresión que permite obtener la base de un rectángulo de 12 cm^2 de área en función de su altura?

De la expresión del área del rectángulo se despeja su base: $A = b \cdot h \Rightarrow b = \dfrac{A}{h} \Rightarrow b = \dfrac{12}{h}$

Por tanto, se puede escribir como $b = f(h)$, donde b expresa la longitud de la base y h la longitud de la altura:

$b = f(h) = \dfrac{12}{h}$, que es una función de proporcionalidad inversa.

16. Actividad interactiva.

17. Determina las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones racionales.

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$ **c)** $y = \dfrac{3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

a) Asíntotas horizontales

Como grado (x)= 1 < grado (x^2 – 1) = 2, entonces la función tiene una asíntota horizontal en y = 0.

Asíntotas verticales

Como $D(f)$ = $\mathbb{R} - \{1, -1\}$, la función tiene asíntotas verticales en x = 1 y x = –1.

Asíntotas oblicuas

La función no tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

b) Asíntotas horizontales

Como grado ($2x^2$ + x + 1) = 2 > grado (x – 1) = 1, entonces la función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales

Como $D(f)$ = $\mathbb{R} - \{1\}$, la función tiene una asíntota vertical en x = 1 .

Asíntotas oblicuas

Como $\dfrac{2x^2 + x + 1}{x - 1} = 2x + 3 + \dfrac{4}{x - 1}$, la función tiene una asíntota oblicua en y = 2x + 3.

c) Asíntotas horizontales

Como grado (3x – 2) = 1 < grado (x^2 – 5x + 6) = 2, entonces la función tiene una asíntota horizontal en y = 0.

Asíntotas verticales

Como $D(f)$ = $\mathbb{R} - \{2, 3\}$, la función tiene asíntotas verticales en x = 2 y x = 3.

Asíntotas oblicuas

La función no tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

18. Determina el dominio, los puntos de corte y las asíntotas de las siguientes funciones. Luego, trata de esbozar sus gráficas.

a) $y = x + 1 + \dfrac{x^2}{x - 4}$ **b)** $y = \dfrac{2x}{x + 1}$

a) $y = x + 1 + \dfrac{x^2}{x - 4} = \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{x - 4} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 3x - 4 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4} \Rightarrow \left(0, \dfrac{3 + \sqrt{41}}{4}\right)$ y $\left(0, \dfrac{3 - \sqrt{41}}{4}\right)$

Asíntotas horizontales

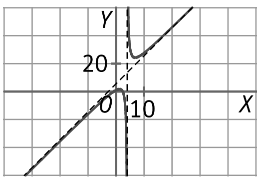
Como grado (x^2 – 3x – 3) = 2 > grado (x – 4) = 1, entonces la función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales

Como $D(f)$ = $\mathbb{R} - \{4\}$, la función tiene una asíntota vertical en x = 4.

Asíntotas oblicuas

$$\frac{2x^2 - 3x - 4}{x - 4} = 2x + 5 + \frac{16}{x - 4} \Rightarrow y = 2x + 5$$



b) $y = \dfrac{2x}{x+1}$

D(f) = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow (0, 0)$

Asíntotas horizontales

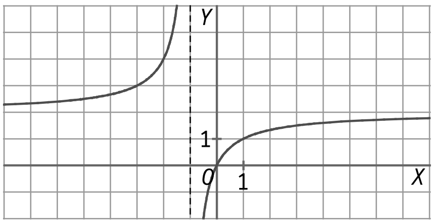
Como grado $(2x) = 1 =$ grado $(x + 1)$, entonces la función tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

Asíntotas verticales

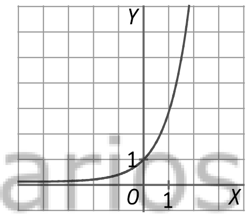
Como $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, la función tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

Asíntotas oblicuas

La función no tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.



19. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = 3^x$.



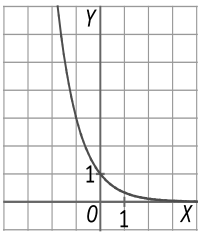
a) Comprueba que verifica todas las propiedades de las funciones exponenciales.

b) Dibuja en tu cuaderno la gráfica de $g(x) = 3^{-x}$.

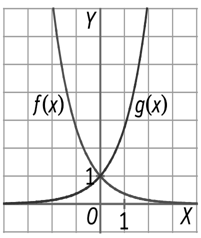
a) Dominio = $(-\infty, +\infty)$ y recorrido $(0, +\infty)$. Es continua en todo su dominio. Pasa por los puntos (0, 1) y (1, 3).

La función es creciente y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando *x* va tomando valores cada vez menores.

b) La función $g(x) = 3^{-x}$ es simétrica de $f(x) = 3^x$ respecto del eje *Y*.



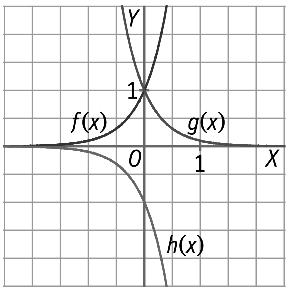
20. Representa en tu cuaderno la gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$. Compárala con la gráfica de la función $g(x) = e^x$, ¿qué observas?



La gráfica de $f(x) = e^{-x}$ y la gráfica de $g(x) = e^x$ son simétricas respecto del eje Y.

21. **Representa en tu cuaderno las siguientes funciones de base 10 y compáralas. ¿Qué tienen en común? ¿Qué relación hay entre ellas?**

$f(x) = 10^x$ **$g(x) = 10^{-x}$** **$h(x) = -10^x$**



Las gráficas de las funciones 10^x y 10^{-x} son simétricas respecto del eje Y.

Las gráficas de las funciones 10^x y -10^x son simétricas respecto del eje X.

22. **Actividad resuelta.**

23. **Halla el dominio y los puntos de corte de estas funciones.**

a) $y = \log x^2$ **c)** $y = 2\log x$

b) $y = 3\log(4 - x^2)$ **d)** $y = \ln(e + x)$

a) $x^2 > 0 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0)$ no existe. $\Rightarrow$ No corta al eje Y.

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = \log x^2 \Rightarrow \log 1 = \log x^2 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1, 0)$ y $(-1, 0)$

b) $4 - x^2 > 0 \Rightarrow 4 > x^2 \Rightarrow D(f) = (-2, 2)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3\log 4 \Rightarrow (0, 3\log 4)$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = 3\log(4 - x^2) \Rightarrow \log 1 = \log(4 - x^2)^3 \Rightarrow 1 = (4 - x^2)^3 \Rightarrow 1 = 4 - x^2 \Rightarrow$

$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$

c) $x > 0 \Rightarrow D(f) = (0, +\infty)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0)$ no existe. $\Rightarrow$ No corta al eje Y.

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = 2\log x \Rightarrow \log 1 = \log x^2 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1, 0)$, pues $D(f) = (0, +\infty)$

d) $e + x > 0 \Rightarrow x > -e \Rightarrow D(f) = (-e, +\infty)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln e = 1 \Rightarrow (0, 1)$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 0 = \ln(e + x) \Rightarrow \ln 1 = \ln(e + x) \Rightarrow 1 = e + x \Rightarrow x = 1 - e \Rightarrow (1 - e, 0)$

24. **Halla y compara la tasa de variación de los siguientes pares de funciones en los intervalos indicados.**

I. [1, 2] **II. [10, 20]** **III. [100, 120]**

a) $f(x) = x^5$ y $g(x) = 2^x$ **b)** $f(x) = \log x$ y $g(x) = \sqrt{x}$

a) $TVf[1, 2] = 2^5 - 1^5 = 31$ $TVf[10, 20] = 20^5 - 10^5 = 3\ 100\ 000$ $TVf[100, 200] = 200^5 - 100^5 = 3{,}1 \cdot 10^{11}$

$TVg[1, 2] = 2^2 - 2^1 = 2$ $TVg[10, 20] = 2^{20} - 2^{10} = 1\ 047\ 552$ $TVg[100, 200] = 2^{200} - 2^{100} = 1{,}6 \cdot 10^{60}$

Se observa que la función exponencial crece más rápido que la función potencial.

b) $TVf[1, 2] = \log 2 - \log 1 = 0{,}3$ $TVf[10, 20] = \log 20 - \log 10 = 0{,}3$ $TVf[100, 200] = \log 200 - \log 100 = 0{,}3$

$TVg[1, 2] = \sqrt{2} - \sqrt{1} = 0{,}414$ $TVg[10, 20] = \sqrt{20} - \sqrt{10} = 1{,}309$ $TVg[100, 200] = \sqrt{200} - \sqrt{100} = 4{,}14$

Se observa que la función logaritmo crece más lentamente que la función raíz cuadrada.

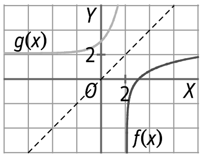
25. Halla la función inversa de estas funciones.

a) $\boldsymbol{y = 2\log x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \ln(e \cdot x)}$

a) $y = 2\log x \Rightarrow \dfrac{y}{2} = \log x \Rightarrow 10^{\frac{y}{2}} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^{\frac{x}{2}}$

b) $y = \ln(e \cdot x) \Rightarrow e^y = e \cdot x \Rightarrow x = e^{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = e^{x-1}$

26. A partir de la gráfica de la función f(x) = ln (x – 2), halla la fórmula de la función *g*(*x*). Demuestra que la función que has hallado es correcta dando algunos valores y comprobándolos en la gráfica.



La función $g(x)$ es la inversa de la función $f(x) = \ln(x-2)$: $y = \ln(x-2) \Rightarrow e^y = x - 2 \Rightarrow x = e^y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x) = e^x + 2$

x	–4	–3	–2	–1	–0,5	0	0,5	1
$g(x)$	2,0183	2,0498	2,1353	2,3678	2,6065	3	3,6487	7,3891

27. Indica si las siguientes funciones crecen o decrecen en los intervalos indicados calculando la tasa de variación media correspondiente.

a) $\boldsymbol{f(x) = \text{sen}\, x}$**, en** $\boldsymbol{\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]}$ **y** $\boldsymbol{\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right]}$

b) $\boldsymbol{g(x) = \cos x}$**, en** $\boldsymbol{\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]}$ **y** $\boldsymbol{\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]}$

c) $\boldsymbol{h(x) = \text{tg}\, x}$**, en** $\boldsymbol{\left[-\dfrac{\pi}{3}, 0\right]}$ **y** $\boldsymbol{\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]}$

a) $TVMf\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right] = \dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}} = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{12}} = \dfrac{12\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\pi} = \dfrac{6\left(\sqrt{2}-1\right)}{\pi} > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$

$TVMf\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right] = \dfrac{f\left(\frac{5\pi}{6}\right) - f\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}} = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{6\left(1-\sqrt{3}\right)}{2\pi} = \dfrac{3\left(1-\sqrt{3}\right)}{\pi} < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}$

b) $TVMg\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right] = \dfrac{g\left(\frac{3\pi}{4}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}} = \dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{-\sqrt{2}}{2} - 0}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-4\sqrt{2}}{2\pi} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{\pi} < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}$

$TVMg\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right] = \dfrac{g(2\pi) - g\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2\pi - \frac{3\pi}{2}} = \dfrac{\text{sen}(2\pi) - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{0-(-1)}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi} > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$

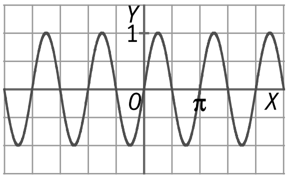
c) $TVMh\left[-\dfrac{\pi}{3}, 0\right] = \dfrac{h(0) - h\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{0 - \left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\text{tg}(0) - t\,\text{g}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{0 - \left(-\sqrt{3}\right)}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$

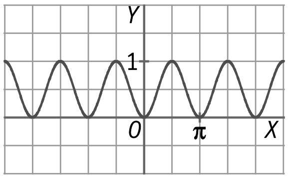
$TVMh\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] = \dfrac{h\left(\frac{\pi}{3}\right) - h(0)}{\frac{\pi}{3} - 0} = \dfrac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \text{tg}(0)}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3} - 0}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$

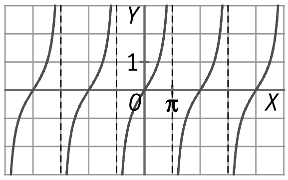
28. Representa estas funciones trigonométricas en tu cuaderno.

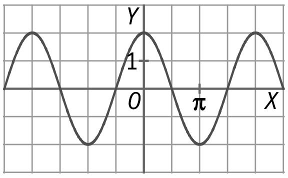
a) $f(x) = \text{sen}\,(2x)$ **c)** $h(x) = \text{sen}^2 x$ **e)** $j(x) = \text{tg}\,\dfrac{x}{2}$

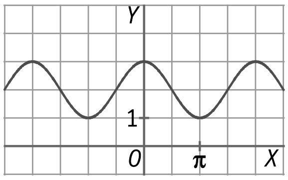
b) $g(x) = 2\cos x$ **d)** $i(x) = 2 + \cos x$ **f)** $k(x) = 2 - \cos x$

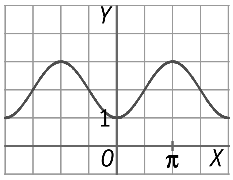
a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

f) 

29. Actividad resuelta.

30. Determina el dominio, la simetría y el período de las funciones: $f(x) = \sec x$ y $g(x) = \text{tg}x$.

$f(x) = \sec x$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

$f(-x) = \sec(-x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x \Rightarrow f(x)$ es par.

$f(x) = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos(x+2\pi)} = \sec(x+2\pi) = f(x+2\pi) \Rightarrow f(x)$ es periódica de período $T = 2\pi$.

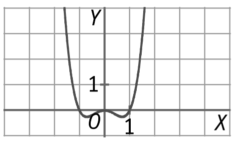
$g(x) = \text{tg}\, x$

$D(g) = \{x \in \mathbb{R} / \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

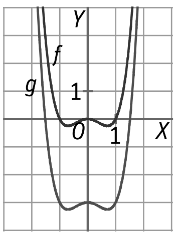
$g(-x) = \text{tg}\,(-x) = \dfrac{\text{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\text{sen}x}{\cos x} = -\text{tg}\, x = -g(x) \Rightarrow g(x)$ es impar.

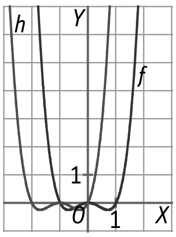
$g(x) = \text{tg}\,(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{-\text{sen}(x+\pi)}{-\cos(x+\pi)} = \tan(x+\pi) = g(x+\pi) \Rightarrow g(x)$ es periódica de período $T = \pi$.

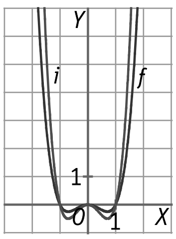
31. A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^4 - x^2$, representa en tu cuaderno las gráficas de las siguientes funciones.

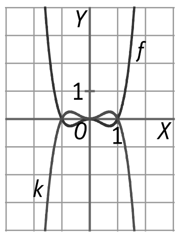


a) $g(x) = x^4 - x^2 - 3$ **b)** $h(x) = (x + 1)^4 - (x + 1)^2$ **c)** $j(x) = 2x^4 - 2x^2$ **d)** $k(x) = -x^4 + x^2$

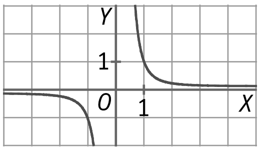
a) 

b) 

c) 

d) 

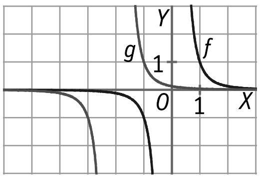
32. **A partir de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, representa en tu cuaderno las gráficas de las siguientes funciones.**



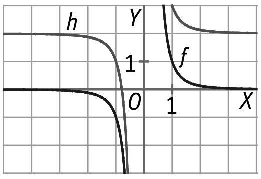
a) $g(x) = \dfrac{1}{(x+2)^3}$

b) $h(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^3}$

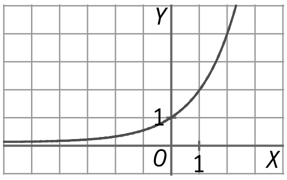
a)



b)



33. **A partir de la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, representa en tu cuaderno las gráficas de las siguientes funciones.**



a) $g(x) = 1 + 2^x$

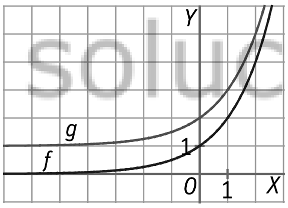
b) $h(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

c) $j(x) = 2^{-x}$

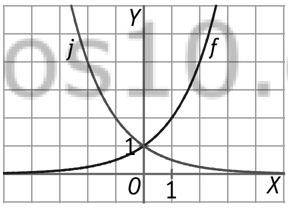
d) $k(x) = \dfrac{2^x}{4}$

Halla la función inversa de y = 2^x y represéntala.

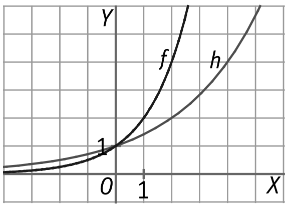
a)



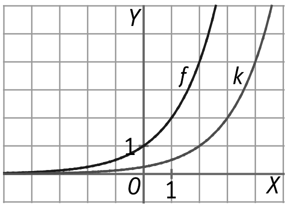
c)



b)

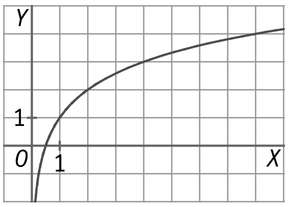


d)



La función inversa de y = 2^x es $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

Representación gráfica:



34. Se considera la función $f(x) = \cos x$ definida en el intervalo $[0, 2\pi]$. A partir de su gráfica, representa las funciones:

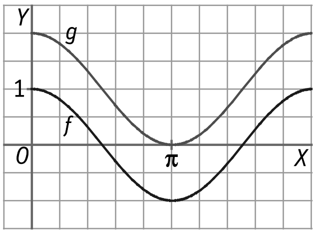
a) $g(x) = 1 + \cos x$

b) $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

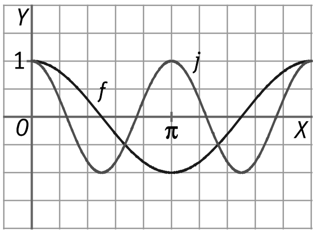
c) $j(x) = \cos(2x)$

d) $k(x) = 3\cos(2x)$

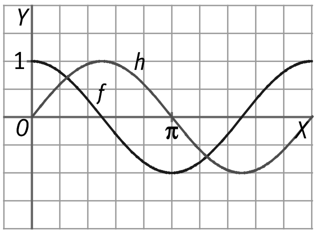
a)



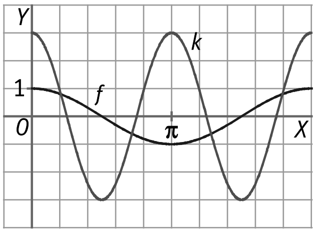
c)



b)



d)



35. Clasifica las siguientes funciones polinómicas.

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 3x - x^2 + 1$

c) $f(x) = x(2 - x)$

d) $f(x) = -2x$

e) $f(x) = 3x - 1$

f) $f(x) = 5(2 - x)$

a) Función constante

b) Función cuadrática

c) Función cuadrática

d) Función lineal

e) Función lineal

f) Función lineal

36. ¿Qué tipo de función es $f(x) = ax + b$ según los valores de a y b?

a) Si $a \neq 0$, $b = 0$

b) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$

c) Si $a = 0$, $b = 0$

d) Si $a = 0$, $b \neq 0$

a) Función de proporcionalidad directa

b) Función lineal

c) Función nula

d) Función lineal constante

37. Representa estas funciones en tu cuaderno e indica la pendiente de cada una.

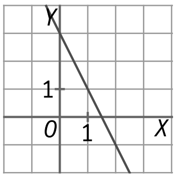
a) $f(x) = 3 - 2x$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = -2$

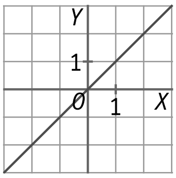
d) $f(x) = x + 2$

a)



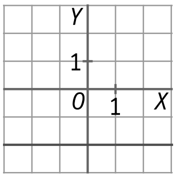
Pendiente $a = -2$

b)



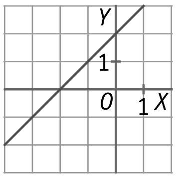
Pendiente $a = 1$

c)



Pendiente $a = 0$

d)



Pendiente $a = 1$

38. Escribe la expresión de la función polinómica de primer grado que cumpla las condiciones de cada apartado.

a) Pendiente 2 y ordenada en el origen 0

b) Pendiente –2 y ordenada en el origen 1

c) Pendiente 1 y ordenada en el origen 1

d) Pendiente –3 y ordenada en el origen –1

a) $y = 2x$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = x + 1$

d) $y = -3x - 1$

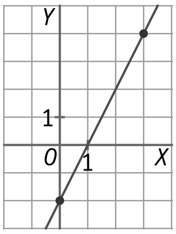
39. De la función *f*(*x*), se sabe que es polinómica de primer grado y que su gráfica pasa por los puntos (0, –2) y (3, 4).

a) Dibuja su gráfica.

b) Halla su ecuación.

c) ¿Cuál es su pendiente?

d) ¿Cuál es la ordenada en el origen?

a) 

b) La función es polinómica de primer grado. Luego es de la forma $y = ax + b$. Como pasa por los puntos (0, –2) y (3, 4):

$$\begin{cases} -2 = 0a + b \\ 4 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{La ecuación es } y = 2x - 2.$$

c) La pendiente es $a = 2$.

d) La ordenada en el origen es $b = -2$.

40. Determina el eje y el vértice de las parábolas cuya ecuación es:

a) $f(x) = 1 - x^2$

b) $f(x) = 6x - x^2$

c) $f(x) = (x - 2)^2$

d) $f(x) = x^2 + 3x - 1$

a) Vértice $V(0, f(0)) = V(0, 1) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = 0$

b) Vértice $V(3, f(3)) = V(3, 9) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = 3$

c) $f(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$: Vértice $V(2, f(2)) = V(2, 0) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = 2$

d) Vértice $V\left(\frac{-3}{2}, f\left(\frac{-3}{2}\right)\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{-13}{4}\right) \Rightarrow$ Eje de simetría: $x = \frac{-3}{2}$

41. Representa la gráfica de las siguientes funciones e indica: el sentido de las ramas, los puntos de corte con los ejes, las coordenadas del vértice y la ecuación del eje.

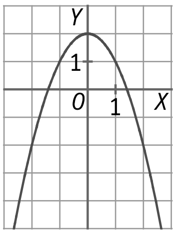
a) $y = 2 - x^2$ **c)** $y = (x - 1)^2 + 3$

b) $y = 6x + x^2$ **d)** $y = x^2 - 3x - 4$

a) $y = 2 - x^2$

- $a = -1 < 0 \Rightarrow$ las ramas se abren hacia abajo
- Vértice $V(0, f(0)) = V(0, 2)$
- Eje de simetría: $x = 0$
- Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$
- Puntos de corte con el eje X:

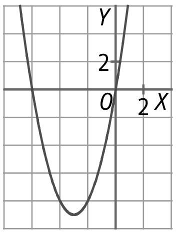
  $2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$



b) $y = 6x + x^2$

- $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas se abren hacia arriba.
- Vértice $V(-3, f(-3)) = V(-3, -9)$
- Eje de simetría: $x = -3$
- Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$
- Puntos de corte con el eje X:

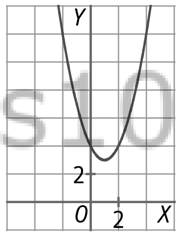
  $6x + x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -6 \Rightarrow (0, 0)$ y $(-6, 0)$



c) $y = (x - 1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4$

- $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas se abren hacia arriba.
- Vértice $V(1, f(1)) = V(1, 3)$
- Eje de simetría: $x = 1$
- Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 4 \Rightarrow (0, 4)$
- Puntos de corte con el eje X:

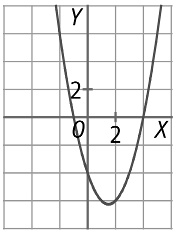
  $x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución



d) $y = x^2 - 3x - 4$

- $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas se abren hacia arriba.
- Vértice $V\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-25}{4}\right)$
- Eje de simetría: $x = \frac{3}{2}$
- Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 4 \Rightarrow (0, -4)$
- Puntos de corte con el eje X:

  $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ y $x = -1 \Rightarrow (4, 0)$ y $(-1, 0)$



42. ¿Puede haber una función polinómica de primer grado con pendiente cero? ¿Por qué?

Una función polinómica de primer grado es de la forma $y = ax + b$, donde a es la pendiente de la recta.

Si $a = 0$, entonces $y = b$ es una función polinómica de grado cero.

Por tanto, no puede haber ninguna función polinómica de primer grado con pendiente cero.

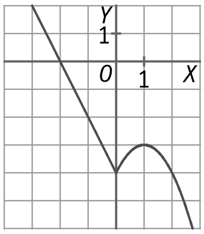
43. Representa en tu cuaderno la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -4 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 - 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) A partir de la gráfica, indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y comprueba tu respuesta calculando la tasa de variación media en cada intervalo.

b) ¿Presenta algún máximo o mínimo relativo? ¿Dónde?

c) Estudia el signo de la función.



a) Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

Si $a < 0 \Rightarrow f(a) > f(0) \Rightarrow TVMf[a, 0] = \dfrac{f(0) - f(a)}{0 - a} = \dfrac{-4 - f(a)}{-a} < 0$

Si $a > 1 \Rightarrow f(a) < f(1) \Rightarrow TVMf[1, a] = \dfrac{f(a) - f(1)}{a - 1} = \dfrac{f(a) + 5}{a - 1} < 0$

Creciente: (0, 1)

$TVMf[0, 1] = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{-3 + 4}{1} = 1 > 0$

b) Presenta un mínimo relativo para $x = 0$ y un máximo relativo para $x = 1$.

c) Punto de corte con el eje Y: (0, –4)

Puntos de corte con el eje X: (–2, 0)

Signo de la función:

La función, con $D(f) = (-\infty, +\infty)$, corta al eje X en el punto (–2, 0).

Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty, -2)$: Positiva
- En $(-2, +\infty)$: Negativa

44. Actividad resuelta.

45. De una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, se sabe que su vértice es el punto $V(-1, 4)$ y que pasa por el punto $A(-2, 3)$. ¿Qué función cuadrática representa?

El valor de la abscisa del vértice es igual a –1, por lo que: $\dfrac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$

Pasa por el punto (–2, 3): $4a - 2b + c = 3$ y como $b = 2a \Rightarrow 4a - 4a + c = 3 \Rightarrow c = 3$.

Pasa por el punto (–1, 4): $a - b + c = 4$ y como $b = 2a \Rightarrow a - 2a + c = 4 \Rightarrow -a + c = 4 \Rightarrow a = c - 4 = 3 - 4 = -1$.

Luego $b = 2a = -2$

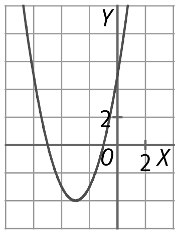
Por tanto, $a = -1$, $b = -2$ y $c = 3$

La ecuación de la función cuadrática es $y = -x^2 - 2x + 3$.

46. El vértice de la parábola $y = x^2 + bx + c$ es el punto (–3, –4). Calcula los valores b y c y representa la función.

El valor de la abscisa del vértice es igual a –3, por lo que: $\frac{-b}{2a} = -3 \Rightarrow b = 6a = 6$

Pasa por el punto (–3, –4): $9 - 3b + c = -4$ y como $b = 6 \Rightarrow 9 - 18 + c = -4 \Rightarrow c = 5$.
La parábola es $y = x^2 + 6x + 5$.



47. Actividad resuelta.

48. Representa las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2$. Halla las coordenadas de los puntos en los que se cortan sus gráficas.

Para representar la parábola $g(x) = x^2$.

- $a = 1 > 0 \Rightarrow$ las ramas se abren hacia arriba.
- Vértice $V(0, f(0)) = V(0, 0)$
- Eje de simetría: $x = 0$
- Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$
- Puntos de corte con el eje X: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$
- Tabla de valores:

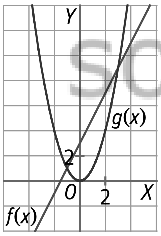
x	–3	–2	2	3
$g(x)$	9	4	4	9

Para representar la recta $f(x) = 2x + 3$

- Tabla de valores:

x	0	2
$f(x)$	3	7

Representación gráfica:

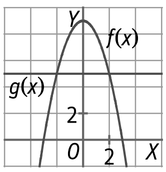


Para calcular los puntos de corte se resuelve el sistema de ecuaciones formado por las dos funciones:
$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = 3 \Rightarrow P(-1, 1) \text{ y } B(3, 9)$

49. Representa las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = 5$ y determina los valores de x que verifican $9 - x^2 \geq 5$.

Para representar la parábola $f(x) = 9 - x^2$.

- $a = -1 < 0 \Rightarrow$ las ramas se abren hacia abajo.
- Vértice $V(0, f(0)) = V(0, 9)$ y Eje de simetría: $x = 0$
- Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 9 \Rightarrow (0, 9)$
- Puntos de corte con el eje X: $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow (3, 0)$ y $(-3, 0)$.



Observando la gráfica se comprueba que los puntos que verifican la inecuación $9 - x^2 \geq 5$ son $x \in [-2, 2]$.

50. Halla el dominio de las siguientes funciones racionales.

a) $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$ **b)** $y=\dfrac{x^2-1}{x(x-3)}$ **c)** $y=\dfrac{x-3}{x^2+2}$ **d)** $y=\dfrac{x+7}{(x+2)x(x^2-1)}$

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$ **b)** $D(f)=\mathbb{R}-\{0,3\}$ **c)** $D(f)=\mathbb{R}$ **d)** $D(f)=\mathbb{R}-\{-2,-1,0,1\}$

51. Determina los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones racionales.

a) $y=\dfrac{x^2+1}{2x-3}$ **b)** $y=\dfrac{x^3-3x+2}{x(x-5)}$

a) Punto de corte con el eje *Y*: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{-1}{3}\Rightarrow\left(0,\dfrac{-1}{3}\right)$

Puntos de corte con el eje *X*: $y=0$, pero $\dfrac{x^2+1}{2x-3}\neq 0\Rightarrow$ No corta al eje *X*.

Signo de la función:

La función, con $D(f)=\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, no corta al eje *X*.

Los intervalos a estudiar son:

- En $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$: $f(0)=\dfrac{-1}{3}<0\Rightarrow$ Negativa
- En $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$: $f(2)=5>0\Rightarrow$ Positiva

b) $y=\dfrac{x^3-3x+2}{x(x-5)}$, con $D(f)=\mathbb{R}-\{0,5\}$

Punto de corte con el eje *Y*: $x=0$ no está en el dominio $\Rightarrow$ No corta al eje *Y*.

Puntos de corte con el eje *X*: $y=0\Rightarrow\dfrac{x^3-3x+2}{x(x-5)}=0\Rightarrow x=-2$ y $x=1\Rightarrow(-2,0)$ y $(1,0)$.

Signo de la función.

La función, con $D(f)=\mathbb{R}-\{0,5\}$, corta al eje *X* en el punto $(-2,0)$ y $(1,0)$.

Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty,-2)$: $f(-4)=\dfrac{-25}{18}<0\Rightarrow$ Negativa
- En $(0,1)$: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-5}{18}<0\Rightarrow$ Negativa
- En $(-2,0)$: $f(-1)=\dfrac{2}{3}>0\Rightarrow$ Positiva
- En $(1,+\infty)$: $f(2)=\dfrac{-2}{3}<0\Rightarrow$ Negativa

52. ¿Cuáles de las siguientes funciones son de proporcionalidad inversa? Indica en esos casos la constante de proporcionalidad.

a) $y=\dfrac{x}{4}$ **b)** $y=\dfrac{x+3}{x}-1$ **c)** $y=-\dfrac{4}{x}$ **d)** $y=\dfrac{2}{3x}$

a) No es función de proporcionalidad inversa porque no es de la forma $y=\dfrac{k}{x}$.

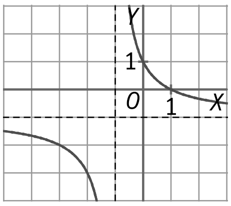
b) $y=\dfrac{x+3}{x}-1=\dfrac{3}{x}$ es función de proporcionalidad inversa. La constante de proporcionalidad es $k=3$.

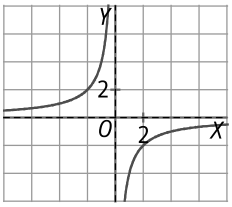
c) Es función de proporcionalidad inversa. La constante de proporcionalidad es $k=-4$.

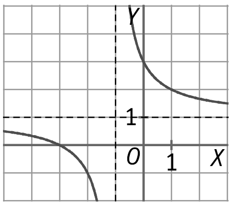
d) $y=\dfrac{2}{3x}=\dfrac{\frac{2}{3}}{x}$ es función de proporcionalidad inversa. La constante de proporcionalidad es $k=\dfrac{2}{3}$.

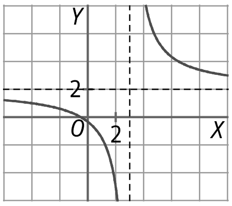
53. Identifica cada gráfica con la función a la que corresponde.

A. $y = -\dfrac{4}{x}$ **B.** $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ **C.** $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ **D.** $y = \dfrac{x-1}{-x-1}$

I.


II.


III.


IV.


A. II. B. III C. IV D. I

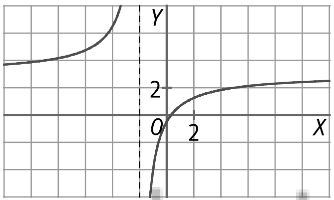
54. Indica cuáles son las asíntotas de las funciones racionales siguientes y efectúa su representación gráfica después.

a) $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x-3}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ **d)** $y = \dfrac{4x+8}{x-4}$

a) $y = \dfrac{3x-1}{x+2} = \dfrac{-7}{x+2} + 3$

Asíntotas horizontales: $y = 3$

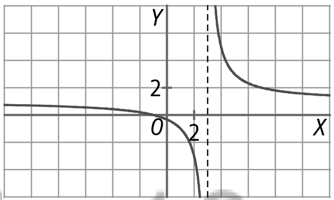
Asíntotas verticales: $x = -2$



c) $y = \dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{4}{x-3} + 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

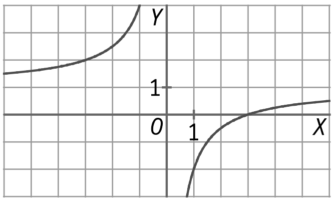
Asíntotas verticales: $x = 3$



b) $y = \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{-3}{x} + 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

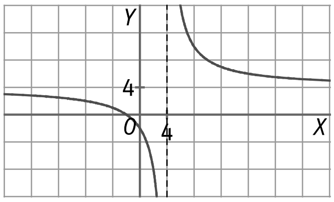
Asíntotas verticales: $x = 0$



d) $y = \dfrac{4x+8}{x-4} = \dfrac{24}{x-4} + 4$

Asíntotas horizontales: $y = 4$

Asíntotas verticales: $x = 4$



55. Halla las asíntotas de estas funciones racionales.

a) $y = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{x^3+x^2}{x^2+1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2-4x+1}{2x^2+x-3}$ **d)** $y = \dfrac{2x+3}{(x+1)^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{x^2+2x}{x+1} = \dfrac{-1}{x+1} + x + 1$

Asíntota oblicua: $y = x + 1$

Asíntota vertical: $x = -1$

c) $y = \dfrac{x^2-4x+1}{2x^2+x-3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-9x+5}{(2x+3)(x-1)}\right)$

Asíntotas horizontales: $y = 0{,}5$

Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1{,}5$

b) $y = \dfrac{x^3+x^2}{x^2+1} = \dfrac{-x-1}{x^2+1} + x + 1$

Asíntota oblicua: $y = x + 1$

c) $y = \dfrac{2x+3}{(x+1)^2(x-3)}$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

Asíntotas verticales: $x = 3$ y $x = -1$

56. Los siguientes puntos pertenecen a la gráfica de una función de proporcionalidad inversa:

A(a, 8) **B(b, –2)** **C(–6, 4)** **D(1, d)**

a) Halla la constante de proporcionalidad.

b) Halla los valores de a, b, d.

c) Escribe la fórmula de la función.

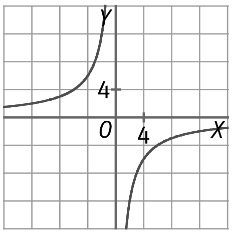
d) Representa su gráfica de forma aproximada.

a) Los puntos de una función de proporcionalidad inversa cumplen que $xy = k$, donde k es la constante de proporcionalidad. Como el punto C pertenece a la gráfica, entonces $k = 4 \cdot (-6) = -24$.

b) $a \cdot 8 = -24 \Rightarrow a = -3$, $b \cdot (-2) = -24 \Rightarrow b = 12$ y $1 \cdot d = -24 \Rightarrow d = -24$

c) La fórmula de la función es $y = \frac{-24}{x}$.

d)



57. La función racional $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{cx + 4}$ tiene dos asíntotas: una vertical, $x = -2$, y otra oblicua, $y = x - 5$.

a) Halla los valores de a, b y c.

b) Calcula los puntos de corte con el eje X.

c) Determina el signo de la función.

a) Como $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{c}\right\}$, la función tienen una asíntota vertical en $x = \frac{-4}{c}$. Por tanto, $\frac{-4}{c} = -2 \Rightarrow c = 2$.

Como $f(x) = \frac{a}{2}x + \frac{b-2a}{2} + \frac{4-2b+4a}{2x+4}$, la función tiene una asíntota oblicua en $y = \frac{a}{2}x + \frac{b-2a}{2}$.

Por tanto, $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$ y $\frac{b-2a}{2} = -5 \Rightarrow b = 2a - 10 = -6$

b) Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 1 \Rightarrow (2, 0)$ y $(1, 0)$.

c) La función, con $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, corta al eje X en los puntos (1, 0) y (2, 0).

- En $(-\infty, -2)$: $f(-4) = -15 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En (1, 2): $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{14} < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En (–2, 1): $f(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(2, +\infty)$: $f(3) = \frac{2}{5} > 0 \Rightarrow$ Positiva

58. ¿Cuáles de las siguientes funciones corresponden a una función exponencial?

a) $y = (-2)^x$ **b) $y = 82^x$** **c) $y = 1^x$** **d) $y = (2,5)^x$**

Una función exponencial es de la forma $y = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Por tanto, son funciones exponenciales $y = 82^x$ e $y = (2,5)^x$.

59. Indica cuáles de las siguientes exponenciales son crecientes y cuáles son decrecientes.

a) $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ **b) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$** **c) $y = \pi^x$** **d) $y = (0,88)^x$**

a) Decreciente **b)** Creciente **c)** Creciente **d)** Decreciente

60. Completa la siguiente tabla de valores correspondiente a las funciones $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ y $g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

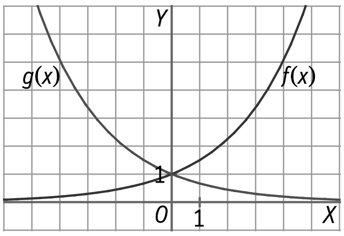
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)							
g(x)							

a) Representa en tu cuaderno de forma aproximada ambas funciones en los mismos ejes de coordenadas.

b) ¿Qué relación observas entre sus gráficas?

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$
g(x)	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

a)



b) Las funciones son simétricas respecto del eje *Y*.

61. Indica cuál es el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \ln(x^2 - 9)$ **b)** $y = \log\sqrt{x}$

a) $x^2 - 9 > 0 \Rightarrow D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ **b)** $\sqrt{x} > 0$ y $x > 0 \Rightarrow D(f) = (0, +\infty)$

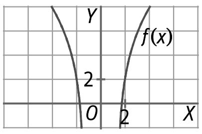
62. Indica cuáles son las funciones inversas de las siguientes funciones inyectivas.

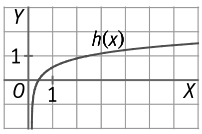
a) $y = 2^x$ **b)** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **c)** $y = \log_3 x$ **d)** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

a) $y = \log_2 x$ **b)** $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ **c)** $y = 3^x$ **d)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

63. Halla las funciones inversas de las funciones si es posible. En caso afirmativo, represéntalas en tu cuaderno.

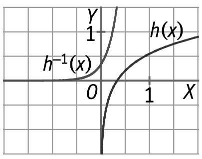
a) $f(x) = 3\ln(x^2 - 2)$ **b)** $h(x) = \frac{1}{2}\log(3x)$





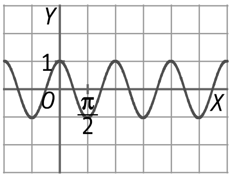
a) $f(x)$ no tiene función inversa porque no es inyectiva. Por ejemplo, $f(3) = f(-3) = 3\ln 7$.

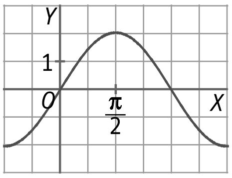
b) $y = \frac{1}{2}\log(3x) \Rightarrow 2y = \log(3x) \Rightarrow 10^{2y} = 3x \Rightarrow x = \frac{10^{2y}}{3} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{10^{2x}}{3}$

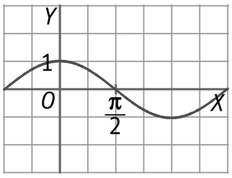


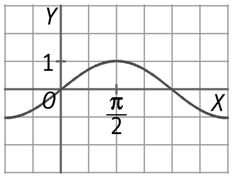
64. Relaciona las siguientes funciones con sus gráficas.

A. $y = \text{sen } x$ **B.** $y = \cos (2x)$ **C.** $y = \cos x$ **D.** $y = 2\text{sen } x$

I.


II.


III.


IV.


A. IV B. I C. III D. II

65. Justifica si la función $f(x) = \cos x$ es creciente o decreciente en el intervalo $(23\pi, 24\pi)$, teniendo en cuenta el período.

La función $f(x) = \cos x$ es periódica de período $T = 2\pi$.

Como $f(23\pi) = f(\pi + 11 \cdot 2\pi) = f(\pi)$ y $f(24\pi) = f(2\pi + 11 \cdot 2\pi) = f(2\pi)$, la función $f(x) = \cos x$ se comporta igual en el intervalo $(23\pi, 24\pi)$ que en el intervalo $(\pi, 2\pi)$.

Como en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ la función $f(x) = \cos x$ es creciente, también lo será en el intervalo $(23\pi, 24\pi)$.

66. Averigua el período de las funciones:

a) $y = \text{sen } 2x$ **b)** $y = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$ **c)** $y = 2 + \text{sen } x$ **d)** $y = 3\cos (\pi x)$

a) $f(x) = \text{sen } 2x = \text{sen } (2x + 2\pi) = \text{sen } [2(x + \pi)] = f(x + \pi) \Rightarrow$ El período es $T = \pi$.

b) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(\dfrac{x + 8\pi}{4}\right) = f(x + 8\pi) \Rightarrow$ El período es $T = 8\pi$.

c) $f(x) = 2 + \text{sen } x = 2 + \text{sen } (x + 2\pi) = f(x + 2\pi) \Rightarrow$ El período es $T = 2\pi$.

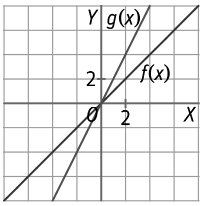
d) $f(x) = 3\cos (\pi x) = 3\cos(\pi x + 2\pi) = 3\cos[\pi(x + 2)] = f(x + 2) \Rightarrow$ El período es $T = 2$.

67. A partir de la gráfica de $f(x) = x$, representa las siguientes funciones mediante traslaciones y dilataciones.

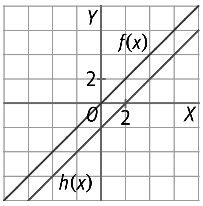
a) $g(x) = 2x$ **c)** $h(x) = x - 2$

b) $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$ **d)** $h(x) = -x + 2$

a) Dilatación vertical de razón 2

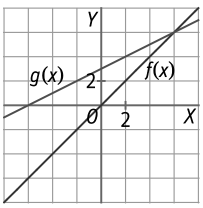


c) Traslación hacia debajo de 2 unidades



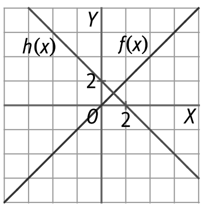
b) Contracción vertical de razón 0,5

Traslación hacia arriba de 3 unidades



d) Gráfica simétrica respecto de la original

Traslación de 2 unidades hacia arriba



68. Actividad resuelta.

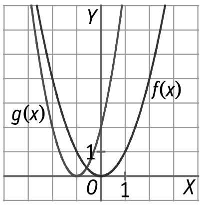
69. A partir de la gráfica de $f(x) = x^2$, representa las siguientes funciones mediante traslaciones y dilataciones.

a) $g(x) = 2(x + 1)^2$

b) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

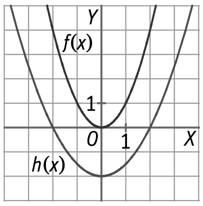
a) Traslación horizontal a la izquierda de 1 unidad

Dilatación vertical de razón 2



b) Contracción vertical de razón 0,5

Traslación hacia abajo de 2 unidades



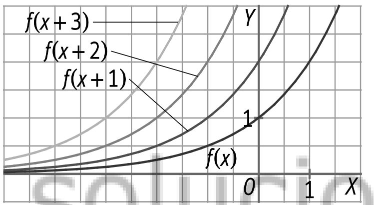
70. Dada la función exponencial $f(x) = 2^x$, representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones:

a) $f(x)$, $f(x + 1)$, $f(x + 2)$ y $f(x + 3)$

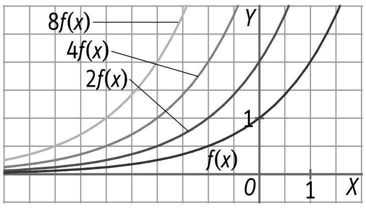
b) $f(x)$, $2f(x)$, $4f(x)$ y $8f(x)$

c) **¿Qué relación hay entre las funciones de los apartados?**

a) $f(x + 1) = 2^{x+1}$, $f(x + 2) = 2^{x+2}$ y $f(x + 3) = 2^{x+3}$



b) $2f(x) = 2 \cdot 2^x$, $4f(x) = 4 \cdot 2^x$ y $8f(x) = 8 \cdot 2^x$



c) Las funciones de los dos apartados son las mismas, porque:

$f(x + 1) = 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2f(x)$

$f(x + 2) = 2^{x+2} = 2^2 \cdot 2^x = 4f(x)$

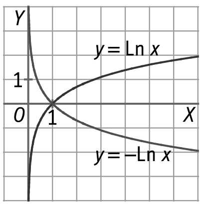
$f(x + 3) = 2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8f(x)$

71. Teniendo en cuenta cómo es la gráfica de la función y = ln x, representa las funciones.

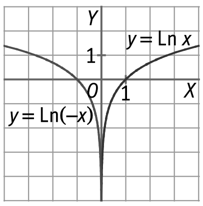
a) $y = -\ln x$

b) $y = \ln(-x)$

a) Simétricas respecto del eje Y



b) Simétrica respecto del eje X



72. A partir de la gráfica de *y* = sen *x*, representa por traslación y simetría las funciones:

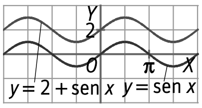
a) $y = 2 + \text{sen } x$

b) $y = \dfrac{1}{2}\text{sen } x$

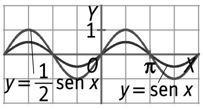
c) $y = -\text{sen}(2x)$

d) $y = -3\text{sen } x$

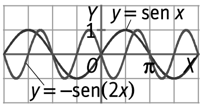
a) Traslación vertical de 2 unidades



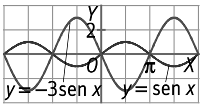
b) Contracción vertical de razón 0,5



c) Contracción horizontal de razón 2 y una simetría



d) Dilatación vertical de razón –3

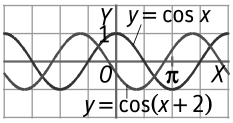


73. A partir de la gráfica de *y* = cos *x*, representa por traslación y simetría las funciones:

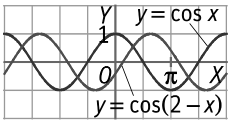
a) $y = \cos(x + 2)$

b) $y = \cos(2 - x)$

a) Traslación a la izquierda 2 unidades



b) Simetría y traslación hacia la izquierda 2 unidades.



74. Actividad resuelta.

75. Expresa como funciones definidas a trozos y representa las gráficas de estas funciones.

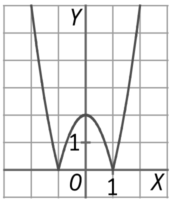
a) $f(x) = |-2x^2 + 2|$

b) $f(x) = |\ln x|$

a) Se expresa el valor absoluto como:

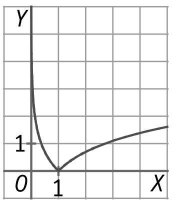
$$|2-2x^2| = \begin{cases} 2-2x^2 & \text{si} \quad 2 > 2x^2 \\ -(2-2x^2) & \text{si} \quad 2 < 2x^2 \end{cases} = \begin{cases} 2-2x^2 & \text{si} \quad 1 > x^2 \\ -(2-2x^2) & \text{si} \quad 1 < x^2 \end{cases} = \begin{cases} 2-2x^2 & \text{si} \quad 1 > x^2 \\ 2x^2-2 & \text{si} \quad 1 < x^2 \end{cases}$$

Por tanto, $f(x) = \begin{cases} 2x^2-2 & \text{si } x < -1 \\ -2x^2+2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2x^2-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b) Se expresa el valor absoluto como:

$$|\ln x| = \begin{cases} -\ln x & \text{si} \quad \ln x < 0 \\ \ln x & \text{si} \quad \ln x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$



76. Dada la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2} & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$:

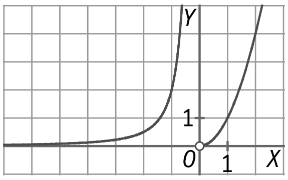
a) Halla su dominio.

b) Represéntala gráficamente.

c) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función a partir de la gráfica y comprueba los resultados utilizando la tasa de variación media.

a) $D(f) = \mathbb{R}-\{0\}$

b)



c) Creciente en todo su dominio.

Si $a < b < 0$ son dos puntos del dominio de f, entonces $f(a)=\dfrac{2}{a^2}<f(b)=\dfrac{2}{b^2}$ pues $a^2>b^2$:

$TVMf[a, b] = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$.

Si b > a > 0 son dos puntos del dominio de f, entonces $f(b)=b^2>f(a)=a^2$: $TVMf[a, b] = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$.

77. La función $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ es una función decreciente y no simétrica y la función $g(x) = 2^x$ es creciente y tampoco es simétrica. Justifica que $h(x)= f(x) + g(x)$ y $k(x) = g(x) - f(x)$ son funciones simétricas e indica el tipo de simetría.

$h(x) = f(x) + g(x) = 2^{-x} + 2^x \Rightarrow h(-x) = 2^x + 2^{-x} = h(x) \Rightarrow h(x)$ es una función par.

$k(x) = g(x) - f(x) = 2^x - 2^{-x} \Rightarrow k(-x) = 2^{-x} - 2^x = -(2^{-x} - 2^x) = k(-x) \Rightarrow k(x)$ es una función impar.

78. La factura de la energía eléctrica de una empresa suministradora se puede resumir en tres conceptos:

- **Cuota fija por potencia contratada: 38 €**
- **Consumo: 0,14 € cada kilovatio hora (kWh)**
- **IVA: 21 %**

a) Escribe la función, $f(x)$, que determina el importe de la factura durante un período en el que se han consumido x kWh.

b) ¿Cuál es el importe de la factura si se han consumido 324 kWh?

c) Determina la función, $g(x)$ que indica el coste de kWh consumido.

a) $f(x) = 1{,}21 \cdot (0{,}14x + 38) = 0{,}1694x + 45{,}98$

b) $f(324) = 0{,}1694 \cdot 324 + 45{,}98 = 100{,}87$ €

c) $g(x)=\dfrac{45{,}98+0{,}1694x}{x}=\dfrac{45{,}98}{x}+0{,}1694$

79. Un taller de planchas de aluminio tiene que fabricar canaletas para conducciones de agua. Las planchas de aluminio que va a utilizar son rectangulares de 40 cm de ancho y las doblan mediante una prensa.

a) Determina la anchura de la canaleta en función de su altura x.

b) Escribe una función que representa el área de la sección transversal, S, de la canaleta. ¿Cuál es su dominio?

c) Determina cómo se debe plegar la plancha de aluminio para que S tenga la mayor superficie posible.

a) Llamamos y a la anchura de la canaleta: $y = 40 - 2x$

b) $S = x \cdot y = x \cdot (40 - 2x) = 40x - 2x^2 \Rightarrow D(S) = [0, 20]$

c) La función $S = 40x - 2x^2$ corresponde a una parábola orientada hacia abajo. Por tanto, su máximo estará en el vértice: $V_x = 10$. La plancha se debe plegar de forma que la anchura de la canaleta sea 20 cm, y la altura, 10.

80. Actividad resuelta.

81. Una especie de bacteria se duplica cada 20 min. En una placa de Petri con un cultivo de esta bacteria había inicialmente 12 microorganismos.

a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de la bacteria?

b) ¿Cuántas bacterias hay en la placa después de 3 horas?

c) ¿Cuántas horas deben pasar para que el número de bacterias sea de 10 000 microorganismos?

a) Llamamos x al número de horas que transcurren.

Como cada 20 minutos las bacterias se duplican, entonces: $f(x) = 12 \cdot 2^{3x}$.

b) $f(3) = 12 \cdot 2^9 = 6144$ bacterias.

c) $10\,000 = 12 \cdot 2^{3x} \Rightarrow \dfrac{10\,000}{12} = 2^{3x} \Rightarrow \log\dfrac{10\,000}{12} = \log 2^{3x} \Rightarrow \log\dfrac{10\,000}{12} = 3x \cdot \log 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log\dfrac{10\,000}{12}}{3\log 2} = 3{,}234$

Deberán pasar 3,234 horas = 3 h 14 min, aproximadamente.

82. El vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto (4, 2). Si el punto (2, 0) pertenece a la parábola, ¿cuál es el valor de $a + b + c$?

A. $\dfrac{5}{2}$ **B.** $\dfrac{-5}{2}$ **C.** 5 **D.** 10

El valor de la abscisa del vértice es igual a 4, por lo que: $\dfrac{-b}{2a} = 4 \Rightarrow b = -8a$

Pasa por el punto (2, 0): $4a + 2b + c = 0$ y como $b = -8a \Rightarrow 4a - 16a + c = 0 \Rightarrow c = 12a$

Pasa por el punto (4, 2): $16a + 4b + c = 2$ y como $b = -8a$ y $c = 12a \Rightarrow 16a - 32a + 12a = 2 \Rightarrow a = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

Luego $b = -8a = 4$ y $c = 12a = -6$. Por tanto, $a + b + c = \dfrac{-1}{2} + 4 - 6 = \dfrac{-5}{2}$. La respuesta correcta es la B.

83. La función $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 4x}{(x^2 - 1)(x + 2)}$ tiene:

A. Una asíntota vertical y una oblicua.

B. Tres asíntotas verticales y una horizontal.

C. Tres asíntotas verticales y una oblicua.

D. Dos asíntotas verticales y una oblicua.

La función $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 4x}{(x^2 - 1)(x + 2)}$ tiene una asíntota oblicua porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

No tiene asíntotas horizontales por tener una asíntota oblicua.

Las posibles asíntotas verticales son $x = 1$, $x = -1$ y $x = -2$.

Los tres valores de x también anulan el numerador. Por tanto, se debe comprobar si son asíntotas tomando valores de x próximos a estos puntos de discontinuidad.

La función no tiene una asíntota vertical en $x = 1$, porque cuando la variable independiente se va acercando a 1, la función no toma valores grandes:

x	0	0,5	0,9	0,99	1,01	1,1	2
y	0	0,8333333	1,3736842	1,4874874	1,5124875	1,6238095	2,6666666

La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$, porque cuando la variable independiente se va acercando a –1, la función toma valores grandes:

x	–1,9	–1,1	–1,01	–0,99	–0,9	–0,5	0
y	0,2111111	9,9	99,99	–99,99	–9,9	–1,5	0

La función no tiene una asíntota vertical en $x = 2$, porque cuando la variable independiente se va acercando a 1, la función no toma valores grandes:

x	1,01	1,5	1,9	1,99	2,01	2,1	3
y	1,5124876	2,1	2,5551724	2,6555514	2,6777749	2,7774193	3,75

Por tanto, la función tiene una asíntota oblicua y una asíntota vertical. La respuesta correcta es la A.

84. Sea *f* la función definida por *f*(*x*) = $\frac{x+1}{x-1}$, cuando $x^2 \neq 1$, *f*(–*x*) es:

A. $\frac{1}{f(x)}$ **B.** $-f(x)$ **C.** $\frac{1}{f(-x)}$ **D.** $-f(-x)$

$$f(-x)=\frac{-x+1}{-x-1}=\frac{-(x-1)}{-(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{f(x)}$$

La respuesta correcta es la A.

Encuentra el error

85. Pedro ha encontrado una curiosa propiedad con la función:

$$f(x)=\sqrt{100x-20x^2+x}+\sqrt{x^3}$$

Calcula distintos valores de la misma y obtiene:

$$f(2)=10\sqrt{2}\ ;\ f(3)=10\sqrt{3}\ ;\ f(4)=20=10\sqrt{4}\ ;\ f(5)=10\sqrt{5}$$

por lo que concluye que es igual a la función *f*(*x*) = $10\sqrt{x}$.

Ana hace los siguientes cálculos y concluye que tiene razón:

$$f(x)=\sqrt{100x-20x^2+x}+\sqrt{x^3}=\sqrt{x\left(100-20x+x^2\right)}+\sqrt{x^3}=\sqrt{x(10-x)^2}+\sqrt{x\cdot x^2}=(10-x)\sqrt{x}+x\sqrt{x}=10\sqrt{x}$$

Sin embargo, su profesor no está de acuerdo con los cálculos y les dice que comprueben con *f*(15). Calcula esos valores y encuentra el error en los cálculos de Pedro y Ana.

Usando la expresión inicial se obtiene:

$$f(15)=\sqrt{100\cdot 15-20\cdot 15^2+15^3}+\sqrt{15^3}=\sqrt{100\cdot 15-20\cdot 15^2+15^3}+\sqrt{15^3}=\sqrt{375}+15\sqrt{15}=5\sqrt{15}+15\sqrt{15}=20\sqrt{15}$$

Con la expresión que ha hallado Pedro, *f*(15) = $10\sqrt{15}$.

Ambos resultados no coinciden.

El error está al considerar que $\sqrt{k^2}=k$, puesto que se debe tomar la raíz positiva de $\sqrt{k^2}$; es decir, $\sqrt{k^2}$ = $|k|$.

Entonces:

$$f(x)=\sqrt{x(10-x)^2}+\sqrt{x\cdot x^2}=|10-x|\sqrt{x}+|x|\sqrt{x}=\begin{cases}(10-x)\sqrt{x}+x\sqrt{x} & \text{si } 0\le x<10\\ (x-10)\sqrt{x}+x\sqrt{x} & \text{si } x\ge 10\end{cases}$$

Con esta nueva expresión *f*(15) = $\sqrt{15(10-15)^2}+\sqrt{15\cdot 15^2}=\sqrt{15\cdot 25}+\sqrt{15\cdot 15^2}=5\sqrt{15}+15\sqrt{15}=20\sqrt{15}$, valor que sí que coincide con el hallado con la expresión inicial.

PONTE A PRUEBA

Investigación forense

Actividad resuelta.

El precio

El departamento de ventas de una empresa que fabrica teléfonos móviles ha determinado una función que analiza la demanda para un nuevo modelo: $p = 160 - 0{,}000\,015x$, para $0 \le x \le 8\,000\,000$, donde p es el precio en euros, por móvil, y x representa el número de móviles vendidos. La fabricación de x teléfonos cuesta 10 € por cada teléfono más un coste de 40 000 000 € de desarrollo. Los ingresos de la empresa vienen dados por la venta de x móviles al precio de p € y la función que proporciona los beneficios B, es la diferencia entre ingresos, I, y costes, C.

1. **Escribe cuál será la función ingresos I, la función costes, C, y la función beneficios, B.**

   $I(x) = x \cdot p(x) = 160x - 0{,}000\,015x^2$, $C(x) = 10x + 40\,000\,000$ y $B(x) = I - C = -0{,}000\,015x^2 + 150x - 40\,000\,000$.

2. **¿A qué precio habría que vender cada móvil si se fabrica el máximo número de ellos? ¿Qué ganancias tendría la empresa?**

   Como máximo se pueden fabricar 8 000 000 móviles.

   $p = 160 - 0{,}000\,015x = 160 - 0{,}000\,015 \cdot 8\,000\,000 = 40$, entonces cada móvil habría que venderlo a 40 €.

   En este caso se obtendría un beneficio de $B(8\,000\,000) = 200\,000\,000$ €.

3. **¿Cuál es el mínimo número de móviles que hay que vender para que la empresa no tenga pérdidas?**

   $B(x)$ es una parábola, orientada hacia abajo, que corta al eje X en los puntos 274 184,4 y 9 725 667.

   Por tanto, como mínimo, se deberían vender 274 185 móviles para que la empresa no tuviera pérdidas.

4. **Si la empresa quiere ganar un mínimo de 250 000 000 €, ¿a qué precio debe vender cada móvil?**

   $B(x) \ge 250\,000\,000 \Rightarrow -0{,}000\,015x^2 + 150x - 290\,000\,000 \ge 0$.

   Es decir, $2\,619\,533 < x < 7\,380\,467$ y, el precio, p sería $120{,}7 € > p > 49{,}3$ €.

5. **¿Cuál sería el número de móviles que debe fabricar la empresa para obtener la ganancia máxima? ¿Cuál sería la ganancia obtenida?**

   Como $B(x)$ es una parábola, orientada hacia abajo, el máximo estará en el vértice.

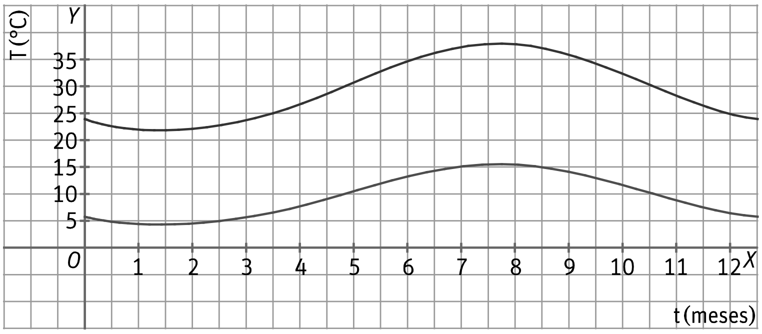
   Es decir, el máximo está en $x = 5\,000\,000$.

   Por tanto, habría que fabricar 5 000 000 de móviles. En este caso, el beneficio sería $B(5\,000\,000) = 335\,000\,000$ €.

Meteorología

En cierto punto del hemisferio norte, las temperaturas máximas a lo largo de un año se aproximan por la función $M(t) = 29{,}2 - 6{,}5\cos\frac{\pi t}{6} - 5\text{sen}\frac{\pi t}{6}$ y las mínimas se aproximaron por $m(t) = 10 - 3{,}8\cos\frac{\pi t}{6} - 3{,}8\text{sen}\frac{\pi t}{6}$, donde t es el tiempo en meses y la temperatura viene dada en grados centígrados.

En el diagrama se representan ambas funciones, comenzando a las 0:00 del día 1 de enero.



1. **¿Durante qué meses las temperaturas máximas superaron los 30º C? ¿En qué períodos las mínimas no llegaron a 10º C?**

   Las temperaturas máximas superaron los 30º C desde el inicio de junio hasta mediados de noviembre. Las mínimas no llegaron a 10º C desde el inicio del año hasta final de mayo, y de mitad de noviembre a final de año.

2. **¿Cuál es el período de cada función?**

   El período de ambas funciones es $T = 12$.

3. **¿Consideras que estas funciones son válidas para el próximo año?**

   Aunque haya pequeñas variaciones, se pueden considerar válidas porque son funciones periódicas.

4. **La amplitud térmica es la función que marca la diferencia entre las máximas y las mínimas. ¿Cuál es su expresión? ¿Es también periódica?**

   $A(t) = M(t) - m(t) = 29{,}2 - 6{,}5\cos\frac{\pi t}{6} - 5\,\text{sen}\frac{\pi t}{6} - \left(10 - 3{,}8\cos\frac{\pi t}{6} - 3{,}8\,\text{sen}\frac{\pi t}{6}\right) = 19{,}2 - 2{,}7\cos\frac{\pi t}{6} - 1{,}2\,\text{sen}\frac{\pi t}{6}$

   Esta función también es periódica.

5. **¿Cuándo es mayor la amplitud térmica?**

   Observando la gráfica se deduce que la amplitud térmica es mayor para $t = 8$. Es decir, en agosto.

6. **¿A qué crees que es debido que las temperaturas más altas no coincidan exactamente con los meses que tienen más horas de sol? ¿Ocurre algo con las temperaturas más bajas?**

   La tierra y el agua del mar se van calentando lentamente y enfriando de igual forma. Por eso, las temperaturas más altas se dan un mes después del solsticio de verano y, las mínimas, uno después del solsticio de invierno.

AUTOEVALUACIÓN

1. Una función polinómica de primer grado tiene ordenada en el origen $b = -2$. Además el punto $P(3, 4)$ pertenece a su gráfica.

a) ¿De qué función se trata?

b) ¿Cuál es su pendiente?

a) Se trata de una función lineal de la forma $y = ax - 2$, donde a es la pendiente de la recta.

b) Como $P(3, 4)$ pertenece a su gráfica: $4 = 3a - 2 \Rightarrow a = 2$.

2. Determina el eje de simetría, las coordenadas del vértice, los puntos de corte con los ejes y estudia el signo de la función $f(x) = 6x - x^2$. Represéntala de forma aproximada.

$a = -1 < 0 \Rightarrow$ las ramas se abren hacia abajo.

Vértice $V(3, f(3)) = V(3, 9)$

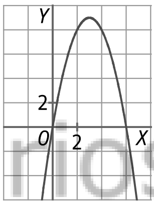
Eje de simetría: $x = 3$

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Puntos de corte con el eje X: $6x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 6 \Rightarrow (0, 0)$ y $(6, 0)$

Signo de la función: $f(x)$ es una función, con $D(f) = \mathbb{R}$, que corta al eje X en $(0, 0)$ y $(6, 0)$.

- En $(-\infty, 0)$: $f(-1) = -7 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(0, 6)$: $f(1) = 5 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(6, +\infty)$: $f(7) = -7 < 0 \Rightarrow$ Negativa



3. Halla el dominio de las funciones racionales.

a) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x + 1}$

¿Cuáles son sus asíntotas?

a) $x^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

Asíntotas horizontales.

Como grado $(2x) <$ grado $(x^2 + 2)$, entonces la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Asíntotas verticales.

Como $D(f) = \mathbb{R}$, la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas oblicuas.

La función no tiene asíntotas oblicuas por tener asíntotas horizontales.

b) $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas horizontales.

Como grado $(x^2 + 3x + 4) >$ grado $(x + 1)$, entonces la función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales.

Como $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, la función tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

Asíntotas oblicuas.

Como $y = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x + 1} = \dfrac{2}{x + 1} + x + 2$, la función tiene una asíntota oblicua en $y = x + 2$.

4. **Una función de proporcionalidad inversa, *f*(*x*), verifica que *f*(4) = 6.**

   a) **Halla la constante de proporcionalidad.**

   b) **Indica si es creciente o decreciente.**

   c) **Halla el número *a* para que *f*(*a*) = –18.**

   d) **Escribe la expresión de la función *f*(*x*).**

   a) Los puntos de una función de proporcionalidad inversa cumplen que $xy = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

   Como $f(4) = 6$, entonces $k = 4 \cdot 6 = 24$.

   b) La función es decreciente porque $k = 24 > 0$.

   c) $a \cdot (-18) = 24 \Rightarrow a = \frac{-24}{18} = \frac{-4}{3}$

   d) $y = \frac{24}{x}$

5. **Se considera la función exponencial $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Determina:**

   a) **Su dominio y su recorrido.**

   b) **Los puntos de corte con los ejes.**

   c) **Sus asíntotas.**

   Represéntala de forma aproximada ayudándote de una tabla de valores.

   a) $D(f) = \mathbb{R}$ y $R(f) = (0, +\infty)$

   b) Corte con el eje X: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$

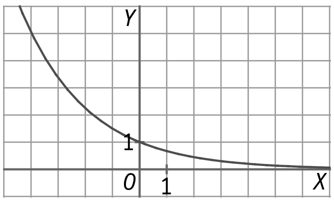
   No corta al eje Y, porque $f(x) > 0$ para todo x.

   c) La función tiene una asíntota horizontal por la derecha, $y = 0$.

Tabla de valores:

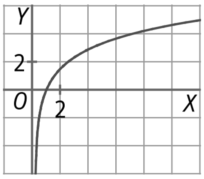
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	$\frac{27}{8} = 3{,}375$	$\frac{9}{4} = 2{,}25$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	1	$\frac{2}{3} = 0{,}66...$	$\frac{4}{9} = 0{,}44...$	$\frac{8}{27} = 0{,}296...$

Representación gráfica

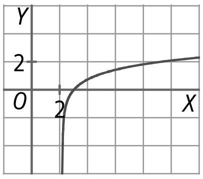


6. **Halla la inversa de las siguientes funciones y represéntalas a partir de las gráficas de las funciones de partida.**

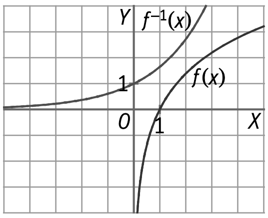
a) $\boldsymbol{y = 2 \ln x}$



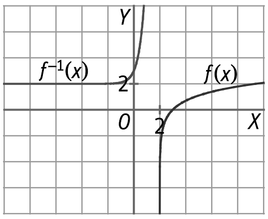
b) $\boldsymbol{y = \log(x - 2)}$



a) $y = 2 \ln x \Rightarrow \frac{y}{2} = \ln x \Rightarrow e^{\frac{y}{2}} = x \Rightarrow \sqrt{e^{y}} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{e^{x}}$



b) $y = \log(x - 2) \Rightarrow x - 2 = 10^{y} \Rightarrow x = 2 + 10^{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + 10^{x}$

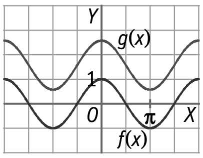


7. **A partir de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$, representa las gráficas de las siguientes funciones.**

a) $\boldsymbol{g(x) = \cos x + \frac{\pi}{2}}$

b) $\boldsymbol{h(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$

a) Trasladar $f(x)$ $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia arriba



b) Trasladar $f(x)$ $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda