12 Combinatoria

ANALIZA Y CALCULA

En muchos países europeos existen loterías parecidas a esta. En España, es popular la bonoloto. Cada apuesta consiste en marcar 6 números de una tabla (del 1 al 49). Se obtiene premio si se aciertan tres números o más. ¿Crees que importa el orden en que se marcan los números?

El orden en que se marcan los números no importa.

¿Es más fácil acertar la bonoloto (6 de 49) o la antigua lotería genovesa (5 de 90)?

Es más fácil acertar la bonoloto porque, aunque hay que acertar un número más, hay muchos menos números para elegir.

Es mucho más fácil acertar tres números que los seis del sorteo. ¿Con cuántas apuestas distintas se pueden acertar 3 de los números de la combinación ganadora?

Con 18 424 apuestas distintas se pueden acertar tres de los números de la combinación ganadora de la bonoloto.

REFLEXIONA Y SACA CONCLUSIONES

¿Cuál es el origen de la lotería? ¿Dónde surgió?

La lotería genovesa surgió en Génova a finales del siglo XVI.

Génova era una república gobernada por cinco senadores, elegidos al azar entre noventa candidatos cada seis meses. En épocas de elecciones los ciudadanos empezaron a hacer apuestas sobre el resultado de las elecciones. Aunque al principio fue un juego prohibido, posteriormente se legalizó y adoptó el nombre de lotería genovesa.

¿Cuántas apuestas diferentes se pueden hacer: más de 100 000, más de un millón? ¿Crees que es muy complicado acertar los 5 números?

Se pueden hacer más de un millón de apuestas diferentes. En concreto, se pueden hacer 43 949 268 apuestas diferentes en la lotería genovesa. Por tanto, es bastante complicado acertar los 5 números.

Actividades propuestas

1. Una chica tiene 3 faldas y 5 blusas. ¿Cuántas combinaciones distintas de falda y blusa puede ponerse?

Por el principio de la multiplicación se puede poner $N = 3 \cdot 5 = 15$ combinaciones distintas de falda y blusa.

2. Actividad resuelta.

3. Utiliza los siguientes dígitos y contesta: 2, 4, 6 y 8.

a) ¿Cuántos números distintos de tres cifras pueden formarse?

b) ¿Cuántos números que no contengan ninguna cifra repetida?

c) ¿Cuántos que tengan un solo dígito repetido?

a) Cada cifra del número se puede elegir entre cualquiera de las cuatro disponibles. Por el principio de la multiplicación, se podrán formar $N = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ números distintos de tres cifras.

b) Una de las cifras del número puede ser cualquiera de los cuatro dígitos disponibles, otra cifra cualquiera de los tres dígitos restantes... Por el principio de la multiplicación, se podrán formar $N = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ números distintos de tres cifras que no contengan ninguna cifra repetida.

c) En total se pueden formar 64 números, de los cuales 24 no contienen ninguna cifra repetida y 4 contienen todas las cifras repetidas. Por tanto, habrá 64 – 24 – 4 = 36 números que tengan un solo dígito repetido.

4. En una fila del cine van a sentarse 4 hombres y 3 mujeres.

a) ¿De cuántas formas pueden sentarse para que no haya ni dos hombres ni dos mujeres juntas?

b) ¿Y si todos los hombres han de estar juntos y las mujeres también? ¿Y si las mujeres han de estar juntas pero los hombres pueden estar separados?

a) Si no puede haber ningún hombre ni ninguna mujer juntos, la única forma de sentarse es *HMHMHMH*, donde *H* representa a un hombre y *M* a una mujer. Es decir, un hombre puede ocupar las posiciones impares y, una mujer, las pares. Por tanto, habrá $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneras de ordenar a los hombres y $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ de ordenar a las mujeres.

Por el principio de la multiplicación habrá $N = 24 \cdot 6 = 144$ formas de ordenar a 4 hombres y 3 mujeres en una fila, de manera que no haya dos hombres ni dos mujeres juntas.

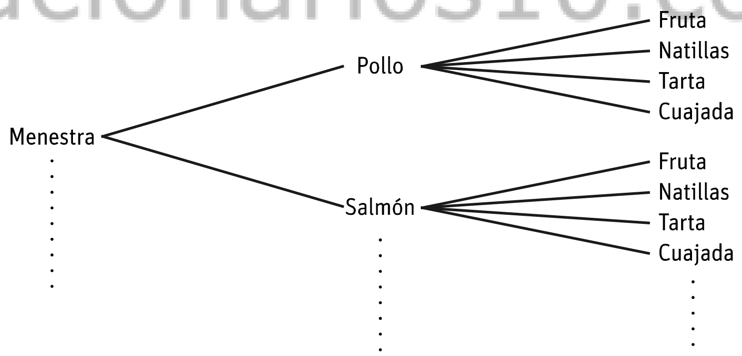
b) Si todos los hombres han de estar juntos y las mujeres también, existen dos formas de sentarse: *HHHHMMM* o *MMMHHHH*. En cada ordenación hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneras de ordenar a los hombres y $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ de ordenar a las mujeres. Por el principio de la multiplicación habrá $N = 2 \cdot 24 \cdot 6 = 288$ formas de ordenar a 4 hombres y 3 mujeres en una fila, de manera que los hombres estén juntos y las mujeres también.

Si las mujeres han de estar juntas y los hombres pueden estar separados, existen cinco formas de sentarse: *HHHHMMM*, *HHHMMMH*, *HHMMMHH, HMMMHHH* o *MMMHHHH.* En cada ordenación hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneras de ordenar a los hombres y $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ de ordenar a las mujeres. Por el principio de la multiplicación habrá $N = 5 \cdot 24 \cdot 6 = 720$ formas de ordenar a 4 hombres y 3 mujeres en una fila, de manera que las mujeres estén juntas.

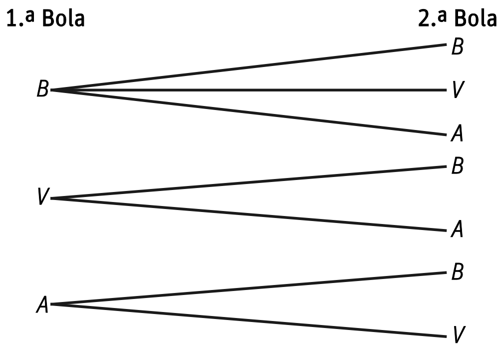
5. ¿Cuántos menús puede elaborar Juan con estos platos? Realiza el recuento con la ayuda de un diagrama de árbol.

	1.^{er} plato	2.º plato	Postre
Menú	Menestra de verduras	Pollo en salsa	Fruta
	Frijoles con arroz	Salmón a la plancha	Natillas
	Ensalada templada	Albóndigas	Tarta de queso
	Tallarines al pesto		Cuajada con miel

Por cada primer plato se pueden elaborar 12 menús diferentes. Como hay 4 opciones para elegir como primer planto, entonces Juan podrá elaborar $12 \cdot 4 = 48$ menús diferentes.

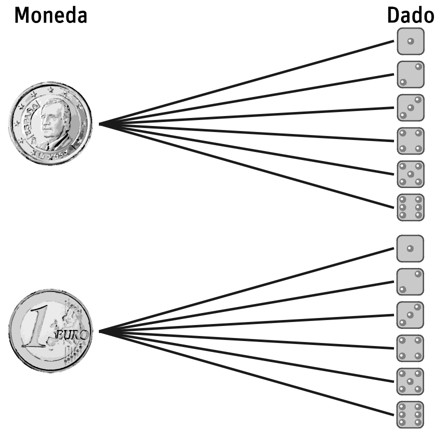


6. ¿Cuántos resultados se pueden obtener al extraer dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 1 verde y 1 amarilla?



Se podrán obtener 7 resultados diferentes.

7. **Utiliza un diagrama de árbol para expresar todos los resultados obtenidos al lanzar una moneda y un dado y haz un recuento de los resultados.**

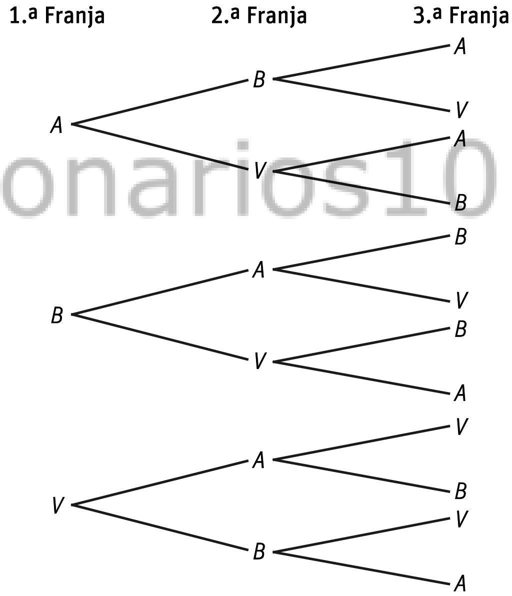


Hay 12 resultados posibles.

8. **¿Cuántas banderas distintas se pueden formar con 3 franjas horizontales de color azul, blanco o verde? Realiza un diagrama de árbol para ver todas las posibilidades teniendo en cuenta que dos franjas del mismo color no pueden estar juntas.**

Denotamos por A = "azul", B = "blanco" y V = "verde".

El diagrama de árbol es el siguiente:



Hay 12 banderas distintas.

9. **Se quiere construir una clave alfanumérica de cinco caracteres que contenga 3 letras y 2 cifras. Las cifras no se pueden repetir, pero las letras sí, aunque solo se pueden usar vocales. ¿Cuántas claves diferentes, con estas condiciones, existen?**

Existen 10 formas distintas de ordenar 3 vocales y 2 cifras en 5 huecos.

Las cifras se pueden elegir de $10 \cdot 9 = 90$ maneras diferentes, porque se seleccionan dos cifras distintas del 0 al 9.

Las vocales se pueden elegir de $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ maneras diferentes, porque se eligen tres vocales de las cinco existentes y se pueden repetir.

Por el principio de la multiplicación, habrá $N = 10 \cdot 90 \cdot 125 = 11\,250$ claves diferentes.

10. En una liga de baloncesto escolar participan 12 equipos. Cada equipo juega contra todos los demás, a doble vuelta. ¿Cuántos partidos se disputan en total?

Para cada partido se eligen 2 equipos de los 12. El orden influye, ya que hay partidos de ida y vuelta. Entonces de 12 elementos hay que elegir 2 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 12 elementos tomados de 2 en 2.

$V_{12,\,2} = 12 \cdot 11 = 132$

Se disputan 132 partidos en total.

11. Con las letras de la palabra BURGOS:

a) ¿Cuántas palabras de 4 letras, con significado o sin él, se pueden formar?

b) ¿Cuántas de ellas tienen alguna letra repetida?

a) Hay que seleccionar 4 letras de entre 6, pero una misma letra puede estar repetida y el orden influye.

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 4 en 4.

$VR_{6,\,4} = 6^4 = 1296$

Se pueden formar 1296 palabras de 4 letras, con significado o sin él.

b) Calculamos el número de palabras de 4 letras, con significado o sin él, que se pueden formar sin repetir ninguna letra.

Para cada palabra se eligen 4 letras diferentes de las 6 disponibles. El orden influye, ya que al intercambiar dos letras la palabra es distinta. Entonces de 6 elementos hay que elegir 4 y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 6 elementos tomados de 4 en 4.

$V_{6,\,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Se pueden formar 360 palabras de 4 letras, con significado o sin él, sin repetir ninguna letra.

Por tanto, habrá 1296 – 360 = 936 palabras, con o sin significado, en las que se repita al menos una letra.

12. Con los dígitos {3, 4, 5, 6, 7 y 8}:

a) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar?

b) ¿Cuántos no tienen ninguna cifra repetida?

a) Hay que seleccionar 3 cifras de entre 6, pero una misma cifra puede estar repetida y el orden influye.

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 3 en 3.

$VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$

Se pueden formar 216 números de tres cifras.

b) Para cada número se eligen 3 dígitos diferentes de los 6 disponibles. El orden influye, ya que al intercambiar dos cifras el número es distinto. Entonces de 6 elementos hay que elegir 3 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 6 elementos tomados de 3 en 3.

$V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Se pueden formar 120 números de 3 cifras sin repetir ninguna cifra.

13. En el alfabeto Braille cada letra y cada signo está representado por 6 puntos, distribuidos en dos columnas de 3, de los cuales unos están en relieve y otros no. ¿Cuántos signos distintos se pueden formar así?

Hay que seleccionar 6 elementos de entre 2. En cada grupo habrá elementos repetidos y el orden influye.

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 6 en 6.

$VR_{2,\,6} = 2^6 = 64$

Se pueden formar 64 signos distintos.

14. Actividad resuelta.

15. Cinco amigos han sacado cinco entradas consecutivas en la misma fila para ver el último estreno de cine.

a) ¿De cuántas maneras pueden sentarse?

b) Luis y Carmen quieren estar en butacas contiguas. ¿De cuántas maneras se pueden sentar ahora los cinco amigos?

a) Cualquiera de los 5 amigos puede ocupar cualquiera de las 5 butacas. Entonces, de 5 elementos, se toman los 5 y dos ordenaciones serán distintas si los amigos están en diferente butaca.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 5.

$P_5 = 5! = 120$

Se pueden sentar de 120 maneras diferentes.

b) Si dos amigos quieren estar juntos, se pueden considerar como uno solo y quedan 4 amigos para colocar: $P_4 = 24$.

Pero hay dos formas de colocar a los dos amigos que quieren estar juntos: $P_2 = 2! = 2$.

Aplicando el principio de la multiplicación, los amigos tendrán $N = 24 \cdot 2 = 48$ formas de sentarse.

16. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 5 personas en un coche si…

a) … todos tienen carnet de conducir?

b) … solo una de ellas tienen carnet de conducir?

c) … hay dos que tienen carnet de conducir?

a) Cualquiera de las 5 personas puede ocupar cualquiera de los 5 asientos del coche. Entonces, de 5 elementos, se toman los 5 y dos ordenaciones serán distintas si las personas están en diferente asiento.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 5.

$P_5 = 5! = 120$

Se pueden sentar de 120 maneras diferentes.

b) La persona que tiene carnet de conducir tiene que sentarse en el asiento del conductor.

Cualquiera de las 4 personas restantes puede ocupar cualquiera de los 4 asientos restantes del coche. Entonces, de 4 elementos, se toman los 4 y dos ordenaciones serán distintas si las personas están en diferente asiento.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 4.

$P_4 = 4! = 24$

Se pueden sentar de 24 maneras diferentes.

c) Las personas que tienen el carnet de conducir son las únicas que se pueden sentar en la plaza del conductor. Así estas dos personas se pueden considerar como una sola y quedan 4 personas para colocar: $P_4 = 24$.

Pero hay dos formas de colocar a las dos personas que tienen el carnet de conducir: $P_2 = 2! = 2$.

Aplicando el principio de la multiplicación, habrá $N = 24 \cdot 2 = 48$ formas de sentarse.

17. ¿Cuántas palabras distintas de 4 letras, con significado o sin él, se pueden formar con las letras de la palabra *GAME*? Si las colocamos por orden alfabético, ¿en qué posición estará la palabra *GAME*?

Como *GAME* tiene 4 letras, se quieren hacer grupos de 4 elementos distintos y el orden es determinante, se trata de calcular permutaciones de orden 4.

$P_4 = 4! = 24$

Se pueden hacer 24 palabras, con significado o sin él, con las letras de la palabra *GAME*.

Para hallar la posición en la que estará la palabra *GAME* se cuentan cuántas palabras empiezan por *A* y cuántas por *E*.

Palabras que empiezan por *A*: se quieren hacer grupos de 3 elementos con las 3 letras restantes. Se trata de calcular permutaciones de orden 3: $P_3 = 3! = 6$.

Palabras que empiezan por *E*: se quieren hacer grupos de 3 elementos con las 3 letras restantes. Se trata de calcular permutaciones de orden 3: $P_3 = 3! = 6$.

Por *G*, ordenadas alfabéticamente, las palabras que se pueden formar son: *GAEM*, *GAME*…

Por tanto, si colocamos por orden alfabético las palabras, la palabra *GAME* ocupará la posición 14.

18. En el código morse, los caracteres están formados por dos símbolos: punto y raya. Por ejemplo, los dígitos del 0 al 9 se representan mediante grupos de 5 símbolos:

1	• — — — —	6	— • • • •
2	• • — — —	7	— — • • •
3	• • • — —	8	— — — • •
4	• • • • —	9	— — — — •
5	• • • • •	0	— — — — —

¿Cuántos caracteres distintos se pueden formar con grupos de 3 rayas y 2 puntos, como el número 2 o el número 8?

En cada carácter se utilizan todos los elementos. Además, los elementos se repiten y el orden influye.

Se trata de calcular las permutaciones con repetición de 5 elementos en los que uno se repite 2 veces y otro 3 veces.

$$PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Se pueden formar 10 caracteres distintos.

19. En un garaje hay 10 plazas numeradas para aparcar los 10 coches de los vecinos, pero están sin asignar.

a) ¿De cuántas formas distintas pueden aparcar los 10 coches?

b) Si los tres vecinos del primer piso ocuparan las tres primeras plazas, ¿de cuántas maneras podrán aparcar ahora?

a) Cualquiera de los 10 coches puede ocupar cualquiera de las 10 plazas de garaje. Entonces, de 10 elementos se toman 10 sin repetir y dos combinaciones serán distintas solo si dos coches están en distinto orden.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 10.

$P_{10} = 10! = 3\,628\,800$

Hay 3 628 800 formas distintas de aparcar los 10 coches.

b) Si los tres vecinos del primer piso ocupan las tres primeras plazas, hay $P_3 = 3! = 6$ formas distintas de aparcar estos 3 coches en las 3 primeras plazas.

Pero además hay $P_7 = 7! = 5040$ formas distintas de aparcar los coches de los 7 vecinos restantes en las 7 plazas que quedan vacías.

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 6 \cdot 5040 = 30\,240$ formas de aparcar.

20. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse en fila 7 bolas de billar de igual tamaño, de las que 4 son lisas, 2 rayadas y una negra? ¿Y si la bola negra debe estar en el centro?

En cada ordenación se utilizan todos los elementos y, además, los elementos se repiten porque hay bolas lisas y rayadas iguales y el orden influye en cada grupo.

Se trata de calcular las permutaciones con repetición de 7 elementos en los que uno se repite 4 veces, otro 2 veces y otro una vez.

$$PR_7^{4,2,1} = \frac{7!}{4! \cdot 2! \cdot 1!} = 105$$

Se pueden agrupar de 105 formas distintas.

Si la bola negra debe estar en el centro, entonces quedan 6 huecos en los que colocar 4 bolas lisas y 2 rayadas.

Se trata de calcular las permutaciones con repetición de 6 elementos en los que uno se repite 4 veces y otro 2 veces.

$$PR_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

Si la bola negra debe estar en el centro, se pueden agrupar de 15 formas distintas.

21. Ana nació en el año 2000 y quiere crear una clave de 7 caracteres con las letras de su nombre y los dígitos de su año de nacimiento.

a) ¿Cuántas claves distintas podrá formar?

b) ¿Cuántas de ellas tienen las tres letras al principio y las cuatro cifras al final?

c) ¿Cuántas tienen las tres letras juntas?

a) Hay que crear claves de 7 caracteres con los símbolos 2, 0, 0, 0, *A*, *N*, *A*. Por tanto, se toman todos los elementos, el orden influye y en cada grupo hay elementos repetidos.

Se trata de calcular las permutaciones con repetición de 7 elementos en los que uno se repite 3 veces, otro, 2 veces, y los otros dos, 1 vez.

$$PR_7^{3,2,1,1,} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 420$$

Se pueden crear 420 claves distintas.

b) Si las tres letras deben ir al principio, hay $PR_3^{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ formas distintas de ordenar las letras al inicio de la clave.

Pero además hay $PR_4^{3,1} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ formas distintas de ordenar las cuatro cifras al final de la clave.

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 3 \cdot 4 = 12$ claves diferentes.

c) Si las tres letras deben estar juntas, se pueden considerar como una sola y quedan 5 símbolos para colocar. Se trata de calcular las permutaciones con repetición de 5 elementos en los que uno se repite 3 veces y los otros 2 una vez.

$$PR_5^{1,1,3} = \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = 20$$

Pero hay 3 formas de ordenar las tres letras: $PR_3^{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 20 \cdot 3 = 60$ claves diferentes.

22. Usando todas las letras de la palabra BANANA.

a) ¿Cuántas palabras distintas, con significado o sin él, se pueden formar?

b) ¿En cuántas de estas palabras las tres aes ocupan los lugares pares?

c) ¿En cuántas de ellas las tres aes están juntas?

a) Se trata de calcular las permutaciones con repetición de 6 elementos en los que uno se repite 3 veces, otro, 2 veces, y otro, 1 una vez.

$$PR_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$$

Se pueden crear 60 palabras distintas.

b) Si las tres aes deben ocupar los lugares pares, entonces el resto de letras tienen que ocupar los lugares impares.

Se trata de calcular las permutaciones con repetición de 3 elementos en los que uno se repite 2 veces, y otro, 1 vez.

$$PR_3^{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

Se pueden crear 3 palabras distintas.

c) Si las tres aes están juntas, se pueden considerar como una sola y quedan 4 letras para colocar. Son permutaciones con repetición de 4 elementos en los que uno se repite 2 veces, y los otros dos, 1 vez.

$$PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$$

Se pueden crear 12 palabras distintas.

23. Mario va a colocar 50 libros en cajas de 6. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Mario dispone de 50 libros de los que hay que seleccionar 6 diferentes sin importar el orden de esos 6.

Se trata de calcular las combinaciones de 50 elementos tomados de 6 en 6.

$$C_{50,6} = \frac{50!}{6! \cdot 44!} = 15\,890\,700$$

Se pueden colocar de 15 890 700 formas distintas.

24. Para aprobar un examen de 5 preguntas es necesario contestar bien a tres de ellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir las tres preguntas?

De 5 preguntas hay que seleccionar 3 diferentes sin importar el orden de esas 3.

Se trata de calcular las combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Las tres preguntas se pueden elegir de 10 formas distintas.

25. Ocho equipos llegan a cuartos de final en un campeonato. ¿Cuántos partidos diferentes se pueden dar?

De 8 equipos hay que seleccionar 2 diferentes sin importar el orden de esos 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 8 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$$

Se pueden dar 28 partidos diferentes.

26. En una clase de baile de salón hay 12 personas. ¿Cuántas parejas de baile pueden darse?

De 12 personas hay que seleccionar 2 diferentes sin importar el orden de esas 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 12 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = 66$$

Se pueden dar 66 parejas de baile diferentes.

27. Un estudiante debe elegir 3 temas de física de 5 posibles, y 2 de química, de 4 posibles. ¿De cuántas maneras puede elegir los temas de física? ¿Y los temas que va a estudiar?

De 5 temas de física hay que seleccionar 3 diferentes sin importar el orden de esos 3.

Se trata de calcular las combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3: $C_{5,3} = 10$

Puede elegir de 10 formas diferentes los temas de física.

De 4 temas de química hay que seleccionar 2 diferentes sin importar el orden de esos 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2: $C_{4,2} = 6$

Puede elegir de 6 formas diferentes los temas de química.

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 10 \cdot 6 = 60$ formas diferentes de elegir los temas que va estudiar.

28. Calcula los siguientes números combinatorios.

a) $\binom{4}{1}$ **b)** $\binom{5}{2}$ **c)** $\binom{5}{3}$ **d)** $\binom{6}{6}$ **e)** $\binom{8}{5}$

a) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$ **b)** $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ **c)** $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ **d)** $\binom{6}{6} = \frac{6!}{6! \cdot 0!} = 1$ **e)** $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$

29. Comprueba que se cumple la siguiente igualdad.

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4$$

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{1}+\binom{4}{0}=1+4+\frac{4!}{2!\cdot 2!}+4+1=10+6=16=2^4$$

30. Si se lanzan dos dados consecutivamente, ¿cuántos resultados se pueden producir? ¿Y si se lanzan dos dados y dos monedas?

Si se lanzan dos dados consecutivamente, al lanzar el primer dado se pueden obtener 6 resultados diferentes y, al lanzar el segundo dado, otros 6. Por el principio de la multiplicación, se pueden producir $N = 6 \cdot 6 = 36$ resultados diferentes.

Si se lanzan dos dados y dos monedas consecutivamente, al lanzar el primer dado se pueden obtener 6 resultados diferentes y, al lanzar el segundo dado, otros 6. Al lanzar una moneda se pueden obtener 2 resultados distintos y, al lanzar la segunda moneda, otros 2. Por el principio de la multiplicación, se pueden producir $N = 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 =$ 144 resultados diferentes.

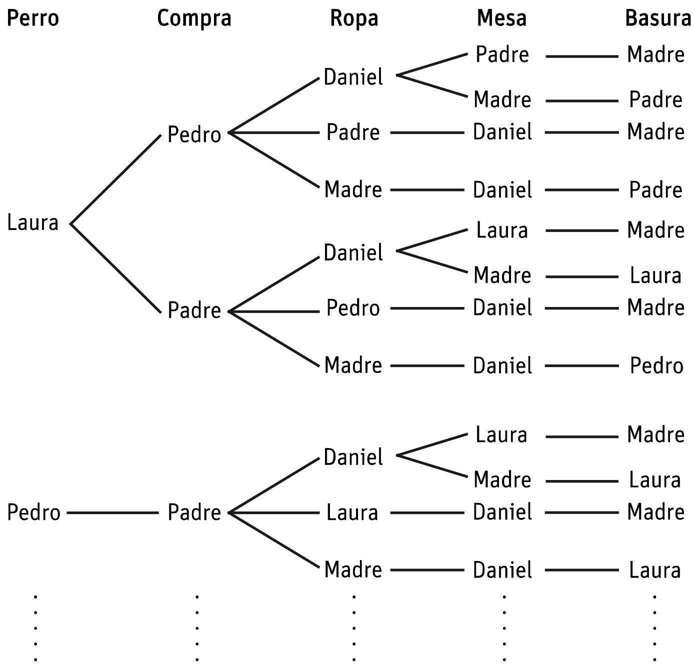
31. Actividad resuelta.

32. Los padres de Pedro, Laura y Daniel van a repartir las tareas entre todos.

- **La madre quiere que se encargue un chico de hacer la compra.**
- **Daniel no puede salir solo de casa.**
- **El padre ha pedido no pasear al perro.**

¿De cuántas formas pueden asignarse las tareas, teniendo en cuenta todas las condiciones?

Construimos un diagrama de árbol, teniendo en cuenta las condiciones dadas.



Si Laura pasea al perro hay 8 formas de asignar la tarea.

Por simetría, si la madre pasea al perro hay otras 8 maneras de asignar la tarea.

Si es Pedro el que pasea al perro hay 4 maneras de asignar las tareas.

En total habrá 8 + 8 + 4 = 20 maneras diferentes de asignar las tareas.

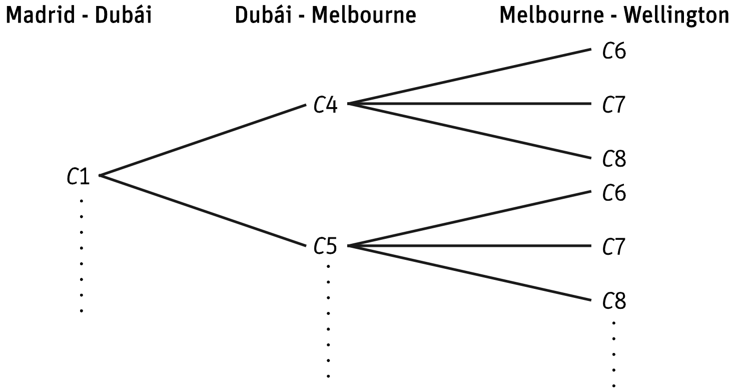
33. Para volar de Madrid a Wellington (Nueva Zelanda) hay que hacer dos escalas: en Dubái y en Melbourne. Hay tres compañías que vuelan de Madrid a Dubái, dos que vuelan de Dubái a Melbourne y tres que enlazan Melbourne y Wellington.

a) Haz un diagrama en árbol.

b) ¿De cuántas maneras se puede organizar el viaje?

a) Llamamos C_1, C_2, C_3 a las compañías que vuelan de Madrid a Dubái, C_4 y C_5 a las que vuelan de Dubái a Melbourne y C_6, C_7 y C_8 a las que unen Melbourne con Wellington.

El diagrama de árbol es el siguiente:



Si se vuela de Madrid a Dubái con la compañía C_2 o la C_3, las ramas del árbol serían igual.

b) De Madrid a Dubái se puede viajar con 3 compañías, de Dubái a Melbourne con 2 y de Melbourne a Wellington con 3.

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ formas diferentes de viajar.

34. Una línea de ferrocarril constaba de 10 estaciones. En cada billete figura la estación de partida y la de llegada.

a) ¿Cuántos billetes distintos hay?

b) La línea se ha ampliado con 3 nuevas estaciones. ¿Cuántos billetes nuevos habrá que imprimir?

a) La estación de partida puede ser cualquiera de las 10 estaciones de las que constaba el ferrocarril y, la de llegada, cualquiera de las 9 restantes.

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 10 \cdot 9 = 90$ billetes distintos.

b) La estación de partida puede ser cualquiera de las 13 estaciones de las que consta el ferrocarril y, la de llegada, cualquiera de las 12 restantes.

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 13 \cdot 12 = 156$ billetes distintos.

Por tanto, habrá que imprimir 156 – 90 = 66 billetes nuevos.

35. Calcula.

a) $V_{7,5}$

b) $V_{6,1}$

c) $V_{12,3}$

d) $V_{20,5}$

e) $VR_{2,5}$

f) $VR_{3,4}$

a) $V_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

b) $V_{6,1} = 6$

c) $V_{12,3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

d) $V_{20,5} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1\,860\,480$

e) $VR_{2,5} = 2^5 = 32$

f) $V_{R3,4} = {}^{34} = 81$

36. **¿De cuántas maneras pueden aparcar 4 coches en 7 plazas de garaje diferentes?**

Para cada ordenación se eligen 4 plazas de las 7 disponibles.

Entonces de 7 elementos hay que elegir 4 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 7 elementos tomados de 4 en 4.

$V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Hay 840 maneras de aparcar diferentes.

37. **Una expedición de alta montaña está formada por 10 alpinistas, 4 expertos y 6 novatos.**

a) **¿De cuántas maneras pueden formar una cordada de 3 personas?**

b) **Si la cordada la tiene que encabezar un alpinista experto, ¿cuántas cordadas diferentes pueden formar?**

a) Para cada cordada se eligen 3 alpinistas de los 10 disponibles.

Entonces de 10 elementos hay que elegir 3 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3.

$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Hay 720 cordadas de tres personas diferentes.

b) De 4 expertos hay que seleccionar 1 para encabezar la cordada.

Entonces hay 4 formas diferentes de encabezar la cordada.

De los 9 restantes alpinistas hay que elegir 2 para la cordada.

Entonces de 9 elementos hay que elegir 2 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 9 elementos tomados de 2 en 2.

$V_{9,2} = 9 \cdot 8 = 72$

Hay 72 formas diferentes de elegir a los dos alpinistas.

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 4 \cdot 72 = 288$ cordadas diferentes encabezadas por un alpinista experto.

38. **La profesora de lengua quiere organizar una obra de teatro en la que haya 5 personajes masculinos y 3 femeninos. En la clase hay 10 chicas y 13 chicos.**

a) **¿De cuántas maneras puede repartir los papeles masculinos entre los chicos?**

b) **¿Y los femeninos entre las chicas?**

c) **¿Cuántos repartos globales diferentes puede organizar?**

a) Para la obra se eligen 5 chicos de los 13 disponibles.

Entonces de 13 elementos hay que elegir 5 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 13 elementos tomados de 5 en 5.

$V_{13,5} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 154\,440$

Hay 154 440 maneras diferentes de repartir los papeles masculinos entre los chicos.

b) Para la obra se eligen 3 chicas de las 10 disponibles.

Entonces de 10 elementos hay que elegir 3 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3.

$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Hay 720 maneras diferentes de repartir los papeles femeninos entre las chicas.

c) Aplicando el principio de multiplicación, se podrán organizar $N = 154\,440 \cdot 720 = 111\,196\,800$ repartos globales.

39. **El consejo asesor de una gran empresa está formado por 15 consejeros. El consejo ejecutivo se elige entre los miembros del consejo asesor y está formado por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un asesor. Todos son elegibles y no pueden ocupar dos puestos. ¿De cuántas maneras distintas puede constituirse el consejo ejecutivo?**

De los 15 miembros del consejo asesor hay que elegir 4 para el consejo ejecutivo.

Entonces de 15 elementos hay que elegir 4 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 15 elementos tomados de 4 en 4.

$V_{15,\,4} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32\ 760$

Hay 32 760 formas diferentes de constituir el consejo directivo.

40. **¿Cuántos números de cinco cifras hay formados exclusivamente por las cifras impares?**

a) ¿Cuántos de ellos no tienen ninguna cifra repetida?

b) ¿Cuántos de ellos tienen alguna cifra repetida?

c) ¿Cuántos tienen la misma cifra al principio y al final del número?

d) ¿Cuántos son capicúas?

Hay que seleccionar 5 cifras de entre 5 cifras impares que existen.

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 5 en 5.

$VR_{5,\,5} = 5^5 = 3125$

Se pueden formar 3125 números diferentes formados exclusivamente por las cifras impares.

a) De las 5 cifras impares hay que elegir 5. Entonces de 5 elementos hay que elegir 5 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 5 en 5.

$V_{5,\,5} = P_5 = 5! = 120$

Se pueden formar 120 números diferentes formados por las cifras impares y sin repetir ninguna cifra.

b) Hay 3125 – 120 = 3005 números diferentes formados exclusivamente por las cifras impares con alguna cifra repetida.

c) La última cifra del número tiene que ser la misma que la primera. Por tanto, de las 5 cifras impares hay que elegir 4. Entonces de 5 elementos hay que elegir 4 y el orden es determinante.

Se trata de calcular variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 4 en 4.

$VR_{5,4} = 5^4 = 625$

Hay 625 números diferentes con las cifras impares, tales que la primera cifra y la última sean iguales.

d) Los números capicúas de 5 cifras verifican que la primera y la última cifra son iguales, y la segunda y la cuarta también. Por tanto, de las 5 cifras impares hay que elegir 3. Entonces de 5 elementos hay que elegir 3 y el orden es determinante.

Se trata de calcular variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3.

$VR_{5,3} = 5^3 = 125$

Se pueden formar 125 números capicúas diferentes con las cifras impares.

41. **Calcula.**

a) P_3 **c)** P_{12} **e)** $PR_8^{2,3,3}$

b) P_6 **d)** P_8 **f)** $PR_{15}^{5,3,7}$

a) $P_3 = 3! = 6$

c) $P_{12} = 12! = 479\ 001\ 600$

e) $PR_8^{2,3,3} = \dfrac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = 560$

c) $P_6 = 6! = 720$

d) $P_8 = 8! = 40\ 320$

f) $PR_{15}^{5,3,7} = \dfrac{15!}{5!\cdot 3!\cdot 7!} = 360\ 360$

42. Utilizando exclusivamente las cifras pares 2, 4, 6 y 8, y sin que se repita ninguna.

a) ¿Cuántos números distintos de 4 cifras se pueden formar?

b) ¿Cuántos de ellos son mayores que 7000?

c) ¿Cuántos de ellos son menores que 5000?

a) Como hay 4 cifras para elegir y se quieren hacer grupos de 4 elementos diferentes, se trata de calcular permutaciones de orden 4. Hay $P_4 = 4! = 24$ números distintos de 4 cifras utilizando las cifras pares.

b) Si el número ha de ser mayor de 7000 la primera cifra debe ser 8. Por tanto, se trata de calcular permutaciones de orden 3. Hay $P_3 = 3! = 6$ números distintos mayores que 7000.

c) Si el número ha de ser menor que 5000 la primera cifra debe ser 2 o 4. Por tanto, para cada caso se trata de calcular permutaciones de orden 3. Hay $2 \cdot P_3 = 2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$ números distintos menores que 5000.

43. La palabra *HOUSEMAID* no tiene ninguna letra repetida y además contiene 5 vocales. Si utilizamos una sola vez cada una de sus letras:

a) ¿Cuántas palabras distintas podemos formar?

b) ¿Cuántas tienen las 5 vocales juntas al principio?

c) ¿En cuántas las vocales ocupan las posiciones impares y las consonantes, las pares?

d) ¿Cuántas empiezan por consonante?

e) ¿Cuántas empiezan y terminan por consonante?

a) Como *HOUSEMAID* tiene 9 letras, se quieren hacer grupos de 9 elementos sin repetir ninguno e influye el orden. Se trata de calcular las permutaciones de orden 9.

$P_9 = 9! = 362\,880$

Se pueden formar 362 880 palabras distintas.

b) Para ordenar las vocales hay que elegir 5 diferentes de las 5 disponibles y el orden es determinante.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 5.

$P_5 = 5! = 120$

Se pueden formar 120 grupos distintos.

Para ordenar las consonantes hay que elegir 4 diferentes de las 4 disponibles y el orden es determinante.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 4.

$P_4 = 4! = 24$

Se pueden formar 24 grupos distintos.

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 120 \cdot 24 = 2880$ palabras diferentes.

c) Las vocales pueden ocupar cualquiera de los 5 lugares impares que hay. Se trata de calcular las permutaciones de orden 5: $P_5 = 5! = 120$

Las consonantes pueden ocupar cualquiera de los 4 lugares pares que hay. Se trata de calcular las permutaciones de orden 4: $P_4 = 4! = 24$

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 120 \cdot 24 = 2880$ palabras diferentes en las que las vocales ocupen los lugares impares y las consonantes los pares.

d) La primera letra puede ser cualquiera de las 4 consonantes disponibles.

Para ordenar el resto de letras hay que elegir 8 diferentes de las 8 que quedan disponibles y el orden es determinante.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 8.

$P_8 = 8! = 40\,320$

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 4 \cdot 40\,320 = 161\,280$ palabras diferentes en las que la primera letra es una consonante.

e) La primera letra puede ser cualquiera de las 4 consonantes disponibles y, la última, cualquiera de las 3 consonantes restantes.

Para ordenar el resto de letras hay que elegir 7 diferentes de las 7 que quedan disponibles y el orden es determinante.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 7.

$P_7 = 7! = 5\,040$

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 4 \cdot 3 \cdot 5040 = 60\,480$ palabras diferentes en las que la primera y la última letra sea una consonante.

44. En la lotería de Navidad hay 100 000 números, desde el 00 000 hasta el 99 999. ¿Cuántos números distintos hay que tengan 3 veces la cifra 3 y 2 veces la cifra 2?

Se trata de calcular las permutaciones con repetición de 5 elementos en los que uno se repite 3 veces y otro 2.

$$PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Hay 10 números distintos que tengan 3 veces la cifra 3 y 2 veces la cifra 2.

45. Con las letras de la palabra *ANAGRAMA*, ¿cuántas palabras, con o sin significado, puedes formar?

a) ¿Cuántas empiezan y terminan por *A*?

b) ¿Cuántas tienen las letras *A* en la misma posición que la palabra *ANAGRAMA*?

Se quieren hacer grupos de 8 elementos en los que uno se repite 4 veces y los otros 4 una vez, e influye el orden.

Son permutaciones con repetición de 8 elementos en los que uno se repite 4 veces, y los otros cuatro, 1 vez.

$$PR_8^{4,1,1,1,1} = \frac{8!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 1680$$

Se pueden formar 1680 palabras diferentes, con o sin significado, con las letras de la palabra *ANAGRAMA*.

a) La primera letra y la última deben ser una *A*. Para ordenar el resto de letras, se quieren hacer grupos de 6 elementos en los que uno se repite 2 veces y los otros cuatro, 1 vez, e influye el orden.

Se trata de calcular las permutaciones con repetición de 6 elementos en los que uno se repite 2 veces y los otros cuatro, 1 vez.

$$PR_6^{2,1,1,1,1} = \frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 360$$

Se pueden formar 360 palabras diferentes, con o sin significado, con las letras de la palabra *ANAGRAMA* que empiezan y terminan por *A*..

b) Las letras *A* se fijan en la misma posición que en la palabra *ANAGRAMA*. Para ordenar el resto de letras hay que elegir 4 diferentes de las 4 que quedan disponibles y el orden es determinante.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 4.

$P_4 = 4! = 24$

Se pueden formar 24 palabras diferentes, con o sin significado, con las *A* en la misma posición que en la palabra *ANAGRAMA*.

46. Calcula.

a) $C_{5,3}$

b) $C_{8,6}$

c) $C_{7,2}$

d) $C_{10,9}$

a) $C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

b) $C_{8,6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$

c) $C_{7,2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$

d) $C_{10,9} = \frac{10!}{9! \cdot 1!} = 10$

47. Antes del inicio de una reunión, sus 10 asistentes se dan la mano entre sí. ¿Cuántos choques de mano se producen?

De 10 asistentes hay que seleccionar 2 diferentes sin importar el orden de esos 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 10 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{10,2} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$$

Se producen 45 choques de manos en total.

48. Alberto, Belén, Carlos y Diana quieren jugar al pádel en partidos dobles.

a) ¿Cuántos equipos distintos pueden formarse?

b) Si los equipos han de ser mixtos, ¿cuántos equipos distintos se pueden formar?

a) De 4 jugadores hay que seleccionar 2 diferentes sin importar el orden de esos 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Se pueden formar 6 equipos diferentes.

b) Para cada equipo, de 2 hombres hay que seleccionar uno y de 2 mujeres hay que seleccionar una.

$C_{2,1} \cdot C_{2,1} = 2 \cdot 2 = 4$

Se pueden formar 4 equipos mixtos diferentes.

49. ¿Qué valor corresponde al número $\binom{6}{4}$?

A. 24 | **C. 1**

B. 15 | **D. 6**

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

La respuesta correcta es la B.

50. Encuentra otro número combinatorio que valga lo mismo que:

a) $\binom{7}{3}$ **c)** $\binom{5}{1}$

b) $\binom{8}{8}$ **d)** $\binom{20}{16}$

a) $\binom{7}{3} = \binom{7}{7-3} = \binom{7}{4}$

c) $\binom{5}{1} = \binom{5}{5-1} = \binom{5}{4}$

b) $\binom{8}{8} = \binom{8}{8-8} = \binom{8}{0}$

d) $\binom{20}{16} = \binom{20}{20-16} = \binom{20}{4}$

51. Comprueba que se cumplen las igualdades:

a) $\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{5}$

b) $\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$

a) $\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{5} \Rightarrow \frac{8!}{4! \cdot 4!} + \frac{8!}{4! \cdot 5!} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} \Rightarrow 70 + 56 = 126$

b) $\binom{9}{4} = \binom{9}{5} \Rightarrow \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} \Rightarrow 126 = 126$

52. Una baraja española consta de 40 cartas, 10 cartas de cada palo: oros, copas, espadas y bastos.

a) ¿Cuántas manos diferentes de 4 cartas se pueden formar?

b) ¿En cuántas de ellas las 4 cartas son de oros?

c) ¿En cuántas dos cartas son de oros, y dos, de copas?

a) De 40 cartas hay que seleccionar 4 diferentes sin importar el orden de esas 4.

Se trata de calcular las combinaciones de 40 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{40,4} = \frac{40!}{4! \cdot 36!} = 91\,390$$

Se pueden formar 91 390 manos diferentes.

b) De 10 cartas de oros hay que seleccionar 4 diferentes sin importar el orden de esas 4.

Se trata de calcular las combinaciones de 10 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$

Las cuatro cartas son de oros en 210 manos.

c) De 10 cartas de oros hay que elegir 2 diferentes sin importar el orden de esas 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 10 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$$

Hay 45 manos en las que las dos cartas son de oros.

De 10 cartas de copas hay que elegir 2 diferentes sin importar el orden de esas 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 10 elementos tomados de 2 en 2.

Hay 45 manos en las que las dos cartas son de copas.

Aplicando el principio de multiplicación, habrá $N = 45 \cdot 45 = 2025$ manos en las que dos cartas sean de copas y dos de oros.

53. En un torneo de tenis participan 5 hombres y 4 mujeres. ¿Cuántos partidos se pueden organizar en las modalidades?

a) Individual masculino.

b) Individual femenino.

c) Dobles masculinos.

d) Dobles femeninos.

e) Dobles mixtos.

a) De 5 hombres hay que elegir 2 diferentes sin importar el orden de esos 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 5 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Se pueden organizar 10 partidos individuales masculinos diferentes.

b) De 4 mujeres que elegir 2 diferentes sin importar el orden de esas 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Se pueden organizar 6 partidos individuales femeninos diferentes.

c) Para formar el primer equipo, de 5 hombres hay que seleccionar 2 diferentes sin importar el orden de esos 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 5 elementos tomados de 2 en 2: $C_{5,2} = 10$

El primer equipo se puede formar de 10 formas diferentes.

Para formar el segundo equipo, de los 3 hombres que quedan hay que seleccionar 2 diferentes sin importar el orden de esos 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 3 elementos tomados de 2 en 2: $C_{3,2} = 3$

El segundo equipo se puede formar de 3 formas diferentes.

Aplicando el principio de multiplicación $N = 10 \cdot 3 = 300$, pero en ellos se está incluyendo dos veces cada partido porque una pareja puede estar en el primer equipo o en el segundo.

Por tanto, habrá $\frac{C_{5,2} \cdot C_{3,2}}{P_2} = \frac{10 \cdot 3}{2!} = 15$ partidos dobles masculinos diferentes.

d) Para formar el primer equipo, de 4 mujeres hay que seleccionar 2 diferentes sin importar el orden de esas 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2: $C_{4,2} = 6$

El primer equipo se puede formar de 6 formas diferentes.

Para formar el segundo equipo, hay que seleccionar a las 2 mujeres que quedan. Hay una única manera de formar el segundo equipo.

Aplicando el principio de multiplicación $N = 6 \cdot 1 = 6$, pero en ellos se está incluyendo dos veces cada partido porque una pareja puede estar en el primer equipo o en el segundo.

Por tanto, habrá $\frac{C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{P_2} = \frac{6 \cdot 1}{2!} = 3$ partidos dobles femeninos diferentes.

e) Para formar el primer equipo, de 5 hombres hay que seleccionar uno y de 4 mujeres hay que seleccionar una.

El primer equipo se puede formar de $C_{5,1} \cdot C_{4,1} = 5 \cdot 4 = 20$ formas diferentes.

Para formar el segundo equipo, de los 4 hombres que quedan hay que seleccionar uno y de 3 mujeres que quedan hay que seleccionar una.

El segundo equipo se puede formar de $C_{4,1} \cdot C_{3,1} = 4 \cdot 3 = 12$ formas diferentes.

Aplicando el principio de multiplicación $N = 20 \cdot 12 = 240$, pero en ellos se está incluyendo dos veces cada partido porque una pareja puede estar en el primer equipo o en el segundo.

Por tanto, habrá $\frac{C_{5,1} \cdot C_{4,1} \cdot C_{4,1} \cdot C_{3,1}}{P_2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{2!} = 120$ partidos mixtos diferentes.

54. Actividad resuelta.

55. **Encuentra el valor de *x* para que se cumplan las igualdades.**

a) $\binom{x}{4}=\binom{x}{5}$ b) $\binom{10}{4}+\binom{10}{x}=\binom{11}{x}$

a) $\binom{x}{4}=\binom{x}{5}\Rightarrow \dfrac{x!}{4!\cdot(x-4)!}=\dfrac{x!}{5!\cdot(x-5)!}\Rightarrow 4!\cdot(x-4)\cdot(x-5)!=5\cdot 4!\cdot(x-5)!\Rightarrow x-4=5\Rightarrow\ x=5+4=9$

b) $\binom{10}{4}+\binom{10}{x}=\binom{11}{x}\Rightarrow\binom{10}{4}=\binom{11}{x}-\binom{10}{x}\Rightarrow\binom{10}{4}=\dfrac{11!}{x!\cdot(11-x)!}-\dfrac{10!}{x!\cdot(10-x)!}\Rightarrow\binom{10}{4}=\dfrac{11\cdot 10!}{x!\cdot(11-x)!}-\dfrac{10!\cdot(11-x)}{x!\cdot(11-x)!}\Rightarrow$

$\Rightarrow\binom{10}{4}=\dfrac{10!\cdot(11-11+x)}{x!\cdot(11-x)!}\Rightarrow\binom{10}{4}=\dfrac{10!\cdot x}{x!\cdot(11-x)!}\Rightarrow\binom{10}{4}=\dfrac{10!}{(x-1)!\cdot(11-x)!}\Rightarrow$

$\Rightarrow\binom{10}{4}=\binom{10}{x-1}\Rightarrow x-1=4\Rightarrow x=5$

Como $\binom{10}{4}=\binom{10}{6}\Rightarrow\binom{10}{6}=\binom{10}{x-1}\Rightarrow x-1=6\Rightarrow x=7$

56. **Escribe en función de *m* el valor de los siguientes números combinatorios.**

a) $\binom{m+2}{m}$ b) $\binom{m}{m-2}$

a) $\binom{m+2}{m}=\dfrac{(m+2)!}{m!\cdot 2!}=\dfrac{(m+2)\cdot(m+1)\cdot m!}{m!\cdot 2!}=\dfrac{(m+2)\cdot(m+1)}{2!}=\dfrac{m^2+3m+2}{2}$

b) $\binom{m}{m-2}=\dfrac{m!}{(m-2)!\cdot 2!}=\dfrac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)!}{(m-2)!\cdot 2!}=\dfrac{m\cdot(m-1)}{2!}=\dfrac{m^2-m}{2}$

57. **Utiliza las propiedades de los números combinatorios para encontrar el valor de las incógnitas.**

a) $\binom{m}{5}=\binom{m}{8}$ c) $\binom{8}{n}+\binom{m}{4}=\binom{p}{4}$

b) $\binom{12}{n}=\binom{m}{7}$ d) $\binom{m}{n}+\binom{m}{6}=\binom{12}{6}$

a) $\binom{m}{5}=\binom{m}{8}\Rightarrow m=5+8=13$

c) $\binom{8}{n}+\binom{m}{4}=\binom{p}{4}\Rightarrow m=8,\ n=4-1=3,\ p=8+1=9$

b) $\binom{12}{n}=\binom{m}{7}\Rightarrow m=12,\ n=12-7=5$

d) $\binom{m}{n}+\binom{m}{6}=\binom{12}{6}\Rightarrow m=12-1=11,\ n=6-1=5$

58. **Aplica las propiedades de los números combinatorios para calcular las siguientes sumas.**

a) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$ b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}$ c) $\binom{5}{0}+\binom{5}{2}+\binom{5}{4}$

a) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{2}+\binom{5}{1}+\binom{5}{0}=2\cdot\left[\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}\right]=2\cdot(1+5+10)=32$

b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=1+5+\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=1+5+10=16$

c) $\binom{5}{0}+\binom{5}{2}+\binom{5}{4}=\binom{5}{0}+\binom{5}{2}+\binom{5}{1}=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=16$

59. Una urna contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener si…?

a) … se sacan tres bolas sucesivamente?

b) … se sacan de una en una, y tras cada extracción, se vuelve a introducir la bola en la urna?

c) … se sacan tres bolas simultáneamente?

a) De las 10 bolas hay que extraer 3 sucesivamente. Entonces de 10 elementos hay que elegir 3 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3.

$V_{10,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Se pueden obtener 720 resultados diferentes.

b) De las 10 bolas hay que extraer 3 con reemplazamiento. Entonces de 10 elementos hay que elegir 3, los elementos pueden repetirse y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3.

$VR_{10,\,3} = 10^3 = 1000$

Se pueden obtener 1000 resultados diferentes.

c) De 10 bolas hay que elegir 3 diferentes sin importar el orden de esas 3.

Se trata de calcular las combinaciones de 10 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$$

Se pueden obtener 120 resultados diferentes.

60. ¿Cuántas palabras distintas, con o sin significado se pueden formar con las letras de estas palabras?

a) LIBELULA **b) CACATUA** **c) ANACONDA**

a) Se quieren hacer grupos de 8 elementos en los que uno se repite 3 veces y los otros 5 una vez, e influye el orden.

Son permutaciones con repetición de 8 elementos en los que uno se repite 3 veces y los otros cinco, 1 vez.

$$PR_8^{3,1,1,1,1,1} = \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 6720$$

Se pueden formar 6720 palabras diferentes, con o sin significado, con las letras de la palabra LIBELULA.

b) Se quieren hacer grupos de 7 elementos en los que uno se repite 3 veces, otro 2 veces, y los otros dos, 1 vez, e influye el orden.

Son permutaciones con repetición de 7 elementos en los que uno se repite 3 veces, otro 2 veces, y los otros dos, 1 vez.

$$PR_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 420$$

Se pueden formar 420 palabras diferentes, con o sin significado, con las letras de la palabra CACATUA.

c) Se quieren hacer grupos de 8 elementos en los que uno se repite 3 veces, otro, 2 veces, y los otros tres, 1 vez, e influye el orden.

Son permutaciones con repetición de 8 elementos en los que uno se repite 3 veces, otro, 2 veces, y los otros tres, 1 vez.

$$PR_8^{3,2,1,1,1} = \frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 3360$$

Se pueden formar 3360 palabras diferentes, con o sin significado, con las letras de la palabra ANACONDA.

61. Un estudiante debe resolver en un examen 8 problemas de 10 propuestos.

a) ¿De cuántas formas puede hacer la selección?

b) Si debe resolver obligatoriamente los 4 primeros. ¿De cuántas formas puede seleccionar ahora los problemas?

c) Debe responder obligatoriamente 3 de los 5 primeros problemas. ¿De cuántas maneras puede hacer la selección del examen ahora?

a) De 10 problemas propuestos hay que elegir 8 diferentes sin importar el orden de esos 8. Se trata de calcular las combinaciones de 10 elementos tomados de 8 en 8.

$$C_{10,8} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$$

La selección se puede hacer de 45 formas diferentes.

b) Si debe resolver obligatoriamente los 4 primeros problemas, de los 6 problemas restantes hay que elegir 4 diferentes sin importar el orden de esos 4. Se trata de calcular las combinaciones de 6 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

La selección se puede hacer de 15 formas diferentes.

c) Si tiene que contestar 8 preguntas de 10 obligatoriamente tendrá que escoger 3 de los 5 primeros problemas, pues únicamente podrá dejar sin contestar 2 problemas en total. Por tanto, habrá 45 formas diferentes.

62. La diagonal de un polígono une dos de sus vértices no consecutivos. Un triángulo no tiene ninguna diagonal, un cuadrado tiene dos, un pentágono 5…

a) ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

b) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de *n* lados?

a) Un decágono tiene 10 vértices. Hay $C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$ uniones posibles de 2 vértices distintos, consecutivos o no. Si de estas 45 uniones posibles eliminamos las que corresponden a vértices consecutivos, se obtendrá el número de diagonales de un decágono.

Como un polígono tiene tantas uniones de vértices consecutivos como lados tiene, entonces un decágono tendrá 45 – 10 = 35 diagonales.

b) Hay $C_{n,2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$ uniones posibles de 2 vértices distintos, consecutivos o no.

De estas uniones posibles eliminamos las que corresponden a vértices consecutivos. Como un polígono de *n* lados tiene *n* uniones de vértices consecutivos, entonces un polígono de *n* lados tendrá:

$$\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1) - 2n}{2} = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} \text{ diagonales.}$$

63. La diagonal de un poliedro es la recta que une dos vértices no pertenecientes a la misma cara. ¿Cuántas diagonales tiene un dodecaedro?

Un dodecaedro tiene 12 caras, 20 vértices y 30 aristas.

Hay $C_{20,2} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = 190$ uniones posibles de 2 vértices distintos, pertenecientes o no a la misma cara. Si de estas 190 uniones posibles eliminamos las que corresponden a las aristas y a las diagonales de una cara, se obtendrá el número de diagonales de un dodecaedro.

Un dodecaedro está formado por caras que son pentágonos regulares. Cada cara tendrá $\frac{5^2 - 3 \cdot 5}{2} = 5$ diagonales.

Por tanto, un dodecaedro tendrá 190 – 30 – 12 · 5 = 100 diagonales.

64. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila 5 chicos y 3 chicas? ¿Y si no puede haber dos chicas juntas?

Hay que elegir 8 personas diferentes de las 8 disponibles y el orden es determinante. Se trata de calcular las permutaciones de orden 8.

$P_8 = 8! = 40\,320$

Se pueden colocar de 40 320 maneras distintas.

Para colocar en fila 5 chicos y 3 chicas, sin que haya dos chicas juntas, se debe dar la situación *AOAOAOAOAOA*, donde *O* representa el lugar donde se sienta un chico y *A* las posiciones donde podrían situarse las chicas.

En total hay 6 posiciones en las que las 3 chicas se podrían situar para que no hubiera dos de ellas juntas. De estas 6 posiciones disponibles hay que elegir 3 donde se vayan a colocar las chicas. Por tanto, hay $C_{6,3}$ formas de seleccionar las posiciones para las chicas. Como hay 3 chicas, en cada una de estas posiciones se pueden sentar de P_3 maneras. Por tanto, las chicas se pueden sentar de $C_{6,3} \cdot P_3$ maneras distintas.

Como los chicos se pueden sentar de P_5 formas, entonces hay $P_5 \cdot C_{6,3} \cdot P_3 = = 14\,400$ formas de colocar a 5 chicos y 3 chicas, de forma que no haya dos chicas juntas.

65. Dos hermanas mellizas tienen 5 faldas y 4 blusas que comparten. Esta tarde deciden salir juntas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden vestirse si ambas llevan falda y blusa?

Una de las hermanas podrá elegir una falda de las 5 disponibles y una blusa de las 4 disponibles. Aplicando el principio de multiplicación, una hermana se podrá vestir de $5 \cdot 4 = 20$ formas diferentes.

La otra hermana podrá elegir una falda de las 4 restantes y una blusa de las 3 restantes. Aplicando el principio de multiplicación, la otra hermana se podrá vestir de $4 \cdot 3 = 12$ formas diferentes.

Las hermanas se podrán vestir de $20 \cdot 12 = 240$ formas diferentes.

66. Cuatro amigos, dos chicos y dos chicas, van juntos al teatro y sacan cuatro entradas consecutivas en una misma fila.

a) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse?

b) ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse si se sientan de forma alterna chico – chica?

c) ¿De cuántas si las chicas deciden estar juntas? ¿Y si tanto las chicas como los chicos están juntos?

a) Hay que elegir 4 personas diferentes de las 4 disponibles y el orden es determinante.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 4.

$P_4 = 4! = 24$

Los cuatro amigos se pueden sentar de 24 maneras distintas.

b) Para ordenar a las chicas hay que elegir 2 diferentes de las 2 disponibles y el orden es determinante.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 2: $P_2 = 2! = 2$

Para ordenar a los chicos hay que elegir 2 diferentes de las 2 disponibles y el orden es determinante.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 2: $P_2 = 2! = 2$

Como el primero que se puede sentar en la fila puede ser chico o chica, por el principio de la multiplicación, hay $N = 2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ formas diferentes.

c) Si las chicas deciden estar juntas se pueden considerar como una sola y quedan 3 personas para colocar: $P_3 = 3! = 6$

Pero hay dos formas de colocar a las dos chicas: $P_2 = 2! = 2$

Por el principio de la multiplicación habrá $N = 6 \cdot 2 = 12$ formas de sentarse los 4 amigos si las chicas deciden estar juntas.

Si tanto los chicos como las chicas deciden estar juntas se pueden considerar como un solo chico y una sola chica, respectivamente, y quedan 2 personas para colocar: $P_2 = 2! = 2$

Pero hay $P_2 = 2! = 2$ formas de colocar a las dos chicas y otras $P_2 = 2! = 2$ formas de colocar a los chicos.

Por el principio de la multiplicación habrá $N = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ formas de sentarse los 4 amigos si tanto los chicos como las chicas deciden estar juntos.

67. Actividad resuelta.

68. Si en una administración de loterías pides un número al azar, ¿qué es más probable?

a) Que el número no tenga ninguna cifra repetida.

b) Que tenga al menos una repetida.

a) De las 10 cifras disponibles hay que elegir 5 distintas.

Entonces de 10 elementos hay que elegir 5 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 5 en 5.

$V_{10,\,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$

Existen 30 240 números que no tienen ninguna cifra repetida.

b) Hallamos la cantidad de números de lotería que existen en total.

De las 10 cifras disponibles hay que elegir 5 que pueden ser iguales o diferentes.

Entonces de 10 elementos hay que elegir 10 y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 5 en 5.

$VR_{10,\,5} = 10^5 = 100\,000$

Existen 100 000 números en total.

De los 100 000 números, 30 240 no tienen ninguna cifra repetida. Por tanto, habrá 100 000 – 30 240 = 69 760 números en los que haya, al menos, una cifra repetida.

Existen 30 240 números sin ninguna cifra repetida y 69 760 números con, al menos, una cifra repetida.

Por tanto, al pedir un número al azar en una administración de lotería, es más probable que el número tenga alguna cifra repetida.

69. Se extraen 3 cartas de una baraja de 40 naipes.

a) ¿Cuántas resultados distintos podemos obtener?

b) ¿En cuántos de ellos habrá 3 ases?

c) ¿En cuántos habrá dos ases y un rey?

d) ¿En cuántos no habrá ningún as?

a) De los 40 naipes que hay en la baraja hay que elegir 3 diferentes sin importar el orden de esos 3.

Se trata de calcular las combinaciones de 40 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{40,3} = \frac{40!}{3! \cdot 37!} = 9880$$

Se pueden obtener 9880 resultados distintos.

b) De los 4 ases que hay en la baraja hay que elegir 3 diferentes sin importar el orden de esos 3.

Se trata de calcular las combinaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

En 4 resultados distintos habrá 3 ases.

c) De los 4 ases que hay en la baraja hay que elegir 2 diferentes sin importar el orden de esos 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

En 6 resultados distintos habrá 2 ases.

De los 4 reyes que hay en la baraja hay que elegir 1. Hay 4 maneras diferentes de elegir un rey de la baraja.

Aplicando el principio de multiplicación, en $N = 6 \cdot 4 = 24$ resultados distintos habrá dos ases y un rey.

d) De los 36 naipes que hay en la baraja que no son ases hay que elegir 3 diferentes sin importar el orden de esos 3.

Se trata de calcular las combinaciones de 36 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{36,3} = \frac{36!}{3! \cdot 33!} = 7140$$

En 7140 resultados distintos no habrá ningún as.

70. Cada apuesta de la bonoloto consiste en marcar 6 números entre el 1 y el 49.

a) ¿Cuántas apuestas distintas se pueden hacer?

b) Cada apuesta cuesta 0,50 €. ¿Cuánto dinero hay que jugar para tener la certeza de acertar la combinación ganadora?

c) El promedio de los 10 mejores premios repartidos en este juego es 4 879 272,82 €. ¿Crees que es rentable invertir en ese juego?

d) Analiza otro juego de azar y compara tus conclusiones con las de tu compañero.

a) De los 49 números que hay en una apuesta de la bonoloto hay que elegir 6 diferentes sin importar el orden de esos 6.

Se trata de calcular las combinaciones de 49 elementos tomados de 6 en 6.

$$C_{49,6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13\,983\,816$$

Se pueden hacer 13 983 816 apuestas distintas.

b) 13 983 816 · 0,50 = 6 991 908 € hay que jugar para tener la certeza de acertar la combinación ganadora.

c) No es rentable invertir en este juego porque, para tener la certeza de acertar la combinación ganadora, hay que invertir mucho más dinero que el que se obtiene, de media, de premio.

d) Respuesta libre.

71. ¿Cuántos números de seis cifras se puede formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5 que sean múltiplos de 5? ¿Y qué sean múltiplos de 2?

Los múltiplos de 5 son los números que acaban en 0 o en 5. En ambos casos la primera cifra no puede ser un 0, porque en ese caso el número no sería de 6 cifras. Por tanto, puede ser cualquiera de los otros 5 dígitos disponibles. Las 4 cifras restantes pueden ser cualquiera de los 6 dígitos disponibles. Aplicando el principio de multiplicación, se pueden formar $N = 5 \cdot 6^4 \cdot 2 = 12\,960$ números distintos con las cifras 0, 1, 2, 3, 4 y 5 que sean múltiplos de 5.

Los múltiplos de 2 son los números que acaban en 0, en 2 o en 4. En todos los casos la primera cifra no puede ser un 0, porque en ese caso el número no sería de 6 cifras. Por tanto, puede ser cualquiera de los otros 5 dígitos disponibles. Las 4 cifras restantes pueden ser cualquiera de los 6 dígitos disponibles. Aplicando el principio de multiplicación, se pueden formar $N = 5 \cdot 6^4 \cdot 3 = 19\,440$ números distintos con las cifras 0, 1, 2, 3, 4 y 5 que sean múltiplos de 2.

72. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en un restaurante 6 personas en una mesa circular?

Las 6 personas se pueden sentar de (6 – 1)! = 120 maneras distintas en una mesa circular.

73. La profesora de lengua manda a cada uno de sus 25 alumnos leer 3 libros de una lista de 6. ¿Puede ocurrir que no haya dos alumnos que hayan seleccionado los mismos libros?

Calculamos el número de combinaciones distintas que se pueden hacer eligiendo 3 libros de los 6 disponibles.

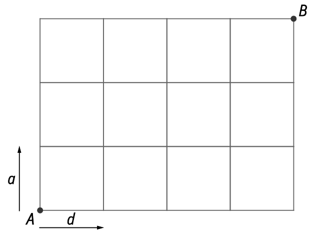
Se trata de calcular las combinaciones de 6 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Se pueden hacer 20 selecciones distintas de 3 libros. Por tanto, obligatoriamente habrá dos alumnos que hayan elegido los mismos libros, porque hay 20 combinaciones distintas y son 25 alumnos.

74. **Nos podemos desplazar sobre una cuadrícula moviéndonos hacia la derecha o hacia arriba.**

¿Cuántos itinerarios diferentes podemos tomar para llegar desde el punto *A* al punto *B*?



Para llegar desde el punto *A* hasta el punto *B*, con cualquier itinerario, hay que desplazarse 4 casillas a la derecha y 3 hacia arriba.

El número de itinerarios posibles son las permutaciones con repetición de 7 elementos, en los que uno se repite 4 veces y otro 3.

$$PR_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$$

Hay 35 itinerarios diferentes de *A* a *B*.

75. **Los ordenadores operan en sistema binario. Solo utilizan los dígitos 0 y 1. Cuando se introdujo el código ISO se usaban 8 celdas (bits) ocupadas por 0 y 1 para formar los distintos símbolos. Cada conjunto de 8 bits es un octeto o byte.**

a) **¿Cuántos octetos diferentes se pueden formar?**

b) **¿Cuántos están formados por 4 ceros y 4 unos?**

c) **¿Cuántos tienen más unos que ceros?**

a) Se trata de calcular las variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 8 en 8.

$VR_{2,\,8} = 2^8 = 256$ octetos

b) El número de octetos formados por 4 ceros y 4 unos son las permutaciones con repetición de 8 elementos, en los que cada uno se repite 4 veces.

$PR_8^{4,4} = \dfrac{8!}{4!\cdot 4!} = 70$ octetos.

c) Los octetos que tienen más unos que ceros son aquellos formados por 5 unos y 3 ceros, 6 unos y 2 ceros, 7 unos y 1 cero u 8 unos.

$PR_8^{5,3} + PR_8^{6,2} + PR_8^{7,1} + PR_8^{8,0} = \dfrac{8!}{5!\cdot 3!} + \dfrac{8!}{6!\cdot 2!} + \dfrac{8!}{7!\cdot 1!} + \dfrac{8!}{8!\cdot 0!} = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$ octetos.

76. **Coloca en orden alfabético las 120 palabras de 5 letras formadas con las letras de la palabra NEPAL. ¿Cuál es la última letra de la que ocupa el lugar 86º?**

A. ***N*** **B.** ***E*** **C.** ***P*** **D.** ***L***

Ordenamos las letras de la palabra NEPAL: *AELNP*.

En primer lugar calculamos el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra NEPAL que empiecen por *A*. Como NEPAL tiene 5 letras, y la primera letra ha de ser *A*, se quieren hacer grupos de 4 elementos distintos y el orden es determinante. Se trata pues de calcular permutaciones de orden 4: $P_4 = 4! = 24$. Existen 24 palabras que empiecen por A.

De igual forma se concluye que existen 24 palabras que empiezan por *E* y otras 24 que empiezan por *L*.

Por tanto, hay 72 palabras que empiezan por *A*, *E* o *L*. Luego, la palabra que ocupa el lugar 86 empieza por *N*.

De las palabras que empiezan por *N*, hay $P_3 = 3! = 6$ palabras que empiezan por *NA* y otras 6 que empiezan por *NE*. Por tanto, hay 12 palabras que empiecen por *NA* o *NE*.

En total, y ordenadas alfabéticamente, hay 84 palabras que empiezan por *A*, *E*, *L*, *NA* y *NE*. Por tanto, la palabra que ocupa la posición 85 es *NLAEP* y, la que ocupa el lugar 86, es *NLAPE*.

La respuesta correcta es la B.

77. **¿Qué cifra ocupa el lugar 2010 en el desarrollo decimal de $x = 0{,}1234567891011\ldots998999$?**

A. **5** **B.** **6** **C.** **7** **D.** **8**

En el desarrollo decimal de *x* los números de un dígito ocupan las 9 primeras posiciones, los números de dos dígitos las siguientes 90 · 2 = 180 posiciones y, los números de tres dígitos, las siguientes 900 · 3 = 2700 posiciones. Por tanto, la cifra que ocupa el lugar 2010 corresponde a un dígito de un número de tres cifras.

Como 2010 – (180 + 9) = 1821, la cifra que ocupa el lugar 2010 del desarrollo decimal de *x* será el dígito que ocupa el lugar 1821 de los números de tres cifras. Además, como 1821 : 3 = 607, la cifra que ocupa el lugar 2010 del desarrollo decimal de *x* será el último dígito del número que ocupa la posición 607 de los números de tres cifras. Como 100 ocupa la posición 1 de los números de tres cifras, 101 ocupa la posición 2 de los números de tres dígitos…entonces 606 será el número que ocupa la posición 607 de los números de tres cifras.

La respuesta correcta es la B.

78. En un aula hay 9 asientos en fila que van a ser ocupados por 6 estudiantes y 3 profesores. Los profesores llegan antes y deciden ocupar los asientos de manera que cada uno esté entre dos estudiantes. ¿De cuántas formas diferentes pueden elegir sus asientos los tres profesores?

A. 12 **B. 36** **C. 60** **D. 84**

Para colocar en fila 6 estudiantes y 3 profesores, de forma que cada profesor esté entre dos alumnos, se debe dar la situación *EPEPEPEPEPE*, donde *E* representa el lugar donde se sienta un estudiante y *P* las posiciones donde podrían situarse los profesores.

En total hay 5 posiciones en las que los 3 profesores se podrían situar para que no hubiera dos de ellos juntos. De estas 5 posiciones disponibles hay que elegir 3 donde se vayan a colocar los profesores. Por tanto, hay $C_{5,3}$ formas de seleccionar las posiciones para los profesores. Como hay 3 profesores, en cada una de estas posiciones se pueden sentar de P_3 maneras.

Por tanto, los profesores se pueden sentar de $C_{5,3} \cdot P_3 = 10 \cdot 6 = 60$ maneras distintas.

La respuesta correcta es la C.

79. Un niño tiene una caja de 96 piezas. Cada una es, o bien de plástico, o bien de madera; pequeña, mediana o grande; azul, verde, roja o amarilla, y puede ser un círculo, un hexágono, un cuadrado o un triángulo. ¿Cuántas piezas se diferencian del "círculo rojo de plástico mediano" en exactamente dos características?

A. 29 **B. 39** **C. 48** **D. 56**

Hay $1 \cdot 2 = 2$ piezas distintas con las características "círculo rojo", $3 \cdot 2 = 6$ piezas distintas con las características "círculo plástico", $3 \cdot 1 = 3$ piezas distintas con las características "círculo mediano", $3 \cdot 2 = 6$ piezas distintas con las características "rojo plástico", $3 \cdot 1 = 3$ piezas distintas con las características "rojo mediano" y $3 \cdot 3 = 9$ piezas distintas con las características "plástico mediano".

En total, habrá $2 + 6 + 3 + 6 + 3 + 9 = 29$ piezas que se diferencian en exactamente dos características del "círculo rojo de plástico mediano".

La respuesta correcta es la A.

80. ¿Cuántos números de 3 cifras tienen estas en orden creciente o en orden decreciente?

A. 168 **B. 204** **C. 216** **D. 240**

Orden creciente

Como el orden es creciente no puede intervenir la cifra 0.

Existen 7 números en orden creciente de la forma 12*x*, 6 números en orden creciente de la forma 13*x*, 5 números en orden creciente de la forma 14*x*, 4 números en orden creciente de la forma 15*x*, 3 números en orden creciente de la forma 16*x*, 2 números en orden creciente de la forma 17*x* y 1 número en orden creciente de la forma 18*x*.

Por tanto, hay $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ números de 3 cifras en orden creciente que empiecen por 1.

Razonando de igual forma se concluye que existen $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ números de 3 cifras en orden creciente que empiezan por 2; $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ números de 3 cifras en orden creciente que empiezan por 3; $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ números de 3 cifras en orden creciente que empiezan por 4; $3 + 2 + 1 = 6$ números de 3 cifras en orden creciente que empiezan por 5; $2 + 1 = 3$ números de 3 cifras en orden creciente que empiezan por 6 y 1 número de 3 cifras en orden creciente que empieza por 7.

En total, hay 84 números de 3 cifras en orden creciente.

Orden decreciente

En orden creciente existen los 84 números anteriores escritos al revés, más aquellos números que incluyan el 0. Existen 8 números de la forma 9*x*0; 7 números de la forma 8*x*0; 6 números de la forma 7*x*0; 5 números de la forma 6*x*0; 4 números de la forma 5*x*0; 3 números de la forma 4*x*0; 2 números de la forma 3*x*0 y un número de la forma 2*x*0.

Por tanto, hay $84 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 120$ números de 3 cifras en orden decreciente.

En total, hay $84 + 120 = 204$ números de 3 cifras en orden creciente o decreciente.

La respuesta correcta es la B.

Busca la solución correcta

81. ¿Cuántos números entre el 0000 y el 9999 tienen al menos una vez la cifra 3?

- **Solución A.**

  Si tiene que haber un 3, este puede estar en cuatro posiciones distintas.

  Se supone que está en la de las unidades, se tienen que ocupar las otras tres posiciones y se dispone de los 10 dígitos. Las posibilidades son: $VR_{10,\,3} = 10^3 = 1000$. Como el 3 puede estar en 4 posiciones, el número de posibilidades totales será: $4 \cdot VR_{10,\,3} = 10^3 = 4000$ números.

- **Solución B.**

  Se cuentan cuántos números de los 10 000 no tienen ningún 3. El resto tendrá algún 3.

  Números sin 3: Se dispone de 9 dígitos para ocupar 4 lugares y se pueden repetir: $VR_{9,\,4} = 9^4 = 6561$ posibilidades. Por tanto, la cantidad de números que sí llevan al menos un 3 será: 10 000 – 6561 = 3439 números.

Elige la solución correcta razonando tu respuesta.

La solución A es incorrecta porque hay varios resultados que se han contado dos o más veces. Por ejemplo, el número 5233 es un número que contiene al menos un 3. Pero este número se ha contabilizado en los números que contienen un 3 en la cifra de las unidades y también en los números que contienen un 3 en la cifra de las decenas.

El recuento se debería haber hecho de la siguiente forma:

Números que contienen 4 treses: 1

Números que contienen 3 treses: $9 \cdot C_{4,3} = 36$

Números que contienen 2 treses: $9 \cdot 9 \cdot C_{4,2} = 486$

Números que contienen 1 tres: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot C_{4,1} = 2916$

En total hay 1 + 36 + 486 + 2916 = 3439 números que llevan al menos un 3.

La respuesta B es correcta.

PONTE A PRUEBA

Contando rectángulos

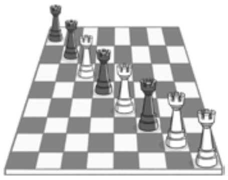
Actividad resuelta.

Combinatoria y ajedrez. El problema de las ocho torres

En el juego del ajedrez una torre se puede mover en horizontal o en vertical cualquier número de casillas y come a cualquier pieza de distinto color cuya posición pueda alcanzar.

El problema de las 8 torres consiste en colocar 8 torres de tal forma que ninguna pueda comer a otra.

La solución más simple es la que puedes observar en la ilustración, pero, ¿exactamente, de cuántas formas se pueden colocar las 8 piezas para que no se coman entre sí?



Cada torre debe estar en una fila y en una columna diferente.

Colocamos la primera torre en una fila del tablero. Hay 8 posiciones que puede ocupar. Colocamos la segunda torre en otra fila del tablero. Esta torre puede ocupar cualquier casilla de esta fila, exceptuando la casilla correspondiente a la columna en la cual está la primera torre. Por tanto, puede ocupar 7 posiciones diferentes.

Razonando de igual modo con el resto de torres, se concluye que se trata de calcular las permutaciones de orden 8.

Existen $P_8 = 8! = 40\ 320$ posiciones diferentes en las que las torres no se pueden comer entre sí.

Un nuevo lenguaje de programación.

Un grupo de chicos ha ideado un lenguaje de programación al que han llamado TREAX. Las palabras reservadas que sirven para establecer órdenes de forma automática son las que se obtienen al permutar las letras de TREAX y se clasifican en:

Tipo de orden	Empiezan por	Acaban en
Instrucciones aritméticas	**Consonante**	**Consonante**
Instrucciones algebraicas	***A***	**Consonante**
Instrucciones condicionales	***E***	***X***
Instrucciones iterativas	***E***	**Consonante distinta de *X***
Funciones y procedimientos	**Vocal**	**Vocal**

1. ¿Cuántas palabras reservadas diferentes tiene este lenguaje?

Como TREAX tiene 5 letras, se quieren hacer grupos de 5 elementos distintos y el orden es determinante.

Se trata de calcular permutaciones de orden 5:

$P_5 = 5! = 120$

Hay reservadas 120 palabras distintas para este lenguaje.

2. Calcula el número de órdenes de cada tipo que se pueden establecer.

Aritméticas: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 36$ órdenes

Algebraicas: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$ órdenes

Condicionales: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ órdenes

Iterativas: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ órdenes

Funciones: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$ órdenes

En total se pueden establecer 84 órdenes.

3. ¿Existen palabras reservadas no utilizadas en ninguna de las órdenes? En caso afirmativo, calcula su número y descríbelas.

Como en total se pueden hacer 120 palabras y únicamente se utilizan 84, entonces no se utilizan $120 - 84 = 36$ palabras.

Coinciden con las palabras que empiezan por consonante y acaban por vocal.

El problema de la coincidencia.

Leonhard Euler, en 1779, escribió un artículo titulado *Una cuestión interesante de la teoría de las combinaciones*. Esta cuestión está basada en un viejo juego de azar de origen francés, llamado *Rencontre* (coincidencia). Las reglas son: un jugador baraja las 13 cartas de un palo de una baraja francesa. Luego las levanta de una en una, diciendo uno al levantar la primera, dos al levantar la segunda, etc. Gana si la carta coincide con el número que ha dicho. Euler lo planteó utilizando letras: "Dada una serie de *n* letras *a*, *b, c*, *d*, *e*,… ¿De cuántas maneras se pueden colocar sin que ninguna ocupe la posición que inicialmente ocupaba?"

1. ¿De cuántas maneras no hay coincidencias con solo tres letras: *a*, *b*, *c*?

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Existen $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes de colocar las tres letras.

Para hallar el número de combinaciones en las que no hay coincidencias, restaremos al número total de colocaciones el número de combinaciones que fijan alguna letra.

Si fijamos la letra *a*, debemos permutar los otros 2 elementos en los 2 lugares restantes. Esto se puede hacer de 2! formas distintas. Lo mismo ocurriría si fijamos cualquiera de las otras letras. Por tanto, existen $C_{3,1} \cdot 2!$ maneras de fijar una letra.

Sin embargo, las permutaciones que fijan *a* y *b* han sido contabilizadas tanto en las que fijan *a* como en las que fijan *b* y, por tanto, han sido contadas 2 veces. Igual ocurre con las permutaciones que fijan *a* y *c* y *b* y *c*. Como hay $C_{3,2}$ formas de elegir 2 letras distintas de las 3 existentes, y el número de permutaciones que fijan 2 letras es 1!, entonces habrá que restar $C_{3,2} \cdot 1!$.

Además las permutaciones que fijan las tres letras han sido contabilizadas tres veces, una vez en cada una de las que fijan cada una de las letras. Sin embargo, también se han descontado tres veces, una en la permutación que fija *a* y *b*, otra en la que fija *b* y *c* y otra en las que fija *a* y *c*. Por tanto, se deben añadir una vez. Como hay $C_{3,3} = 1$ formas de elegir tres letras distintas, y hay una única permutación que fija tres letras, entonces habrá que sumar $C_{3,3} \cdot 1$.

Por tanto, no hay coincidencias con solo tres letras en:

$$3! - (C_{3,1} \cdot 2! - C_{3,2} \cdot 1! + C_{3,3} \cdot 0!) = 3! - \left(\binom{3}{1}\cdot 2! - \binom{3}{2}\cdot 1! + \binom{3}{3}\cdot 0!\right) = 6 - (6 - 3 + 1) = 2 \text{ maneras}$$

La respuesta correcta es la B.

2. ¿De cuántas maneras no hay coincidencias con solo cuatro letras: *a*, *b*, *c*, *d*?

Existen $P_4 = 4! = 24$ formas diferentes de colocar las tres letras.

Para hallar el número de combinaciones en las que no hay coincidencias, restaremos al número total de colocaciones el número de combinaciones que fijan alguna letra.

Si fijamos la letra *a*, debemos permutar los otros 3 elementos en los 3 lugares restantes. Esto se puede hacer de 3! formas distintas. Lo mismo ocurriría si fijamos cualquiera de las otras letras. Por tanto, existen $C_{4,1} \cdot 3!$ maneras de fijar una letra.

Sin embargo, las permutaciones que fijan *a* y *b* han sido contabilizadas tanto en las que fijan *a* como en las que fijan *b* y, por tanto, han sido contadas 2 veces. Igual ocurre con las permutaciones que fijan dos letras cualesquiera. Como hay $C_{4,2}$ formas de elegir 2 letras distintas de las 4 existentes, y el número de permutaciones que fijan 2 letras es 2!, entonces habrá que restar $C_{4,2} \cdot 2!$

Además las permutaciones que fijan tres letras han sido contabilizadas tres veces, una vez en cada una de las que fijan cada una de las letras. Sin embargo, también se han descontado tres veces, una en la permutación que fija *a* y *b*, otra en la que fija *b* y *c* y otra en las que fija *a* y *c*. Por tanto, se deben añadir una vez. Como hay $C_{4,3}$ formas de elegir tres letras distintas, y hay una única permutación que fija tres letras, entonces habrá que sumar $C_{4,3} \cdot 1$.

Razonando de igual forma para las permutaciones que fijan 4 letras, se concluye que no hay coincidencias con cuatro letras en:

$$4! - (C_{4,1} \cdot 3! - C_{4,2} \cdot 2! + C_{4,3} \cdot 1! - C_{4,4} \cdot 0!) = 4! - \left(\binom{4}{1}\cdot 3! - \binom{4}{2}\cdot 2! + \binom{4}{3}\cdot 1! - \binom{4}{4}\cdot 0!\right) = 24 - (24 - 12 + 4 - 1) = 9$$

¿Y si son cinco letras: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*?

Razonando de igual forma que en los casos anteriores, se deduce que no hay coincidencias con cinco letras en:

$$5! - (C_{5,1} \cdot 4! - C_{5,2} \cdot 3! + C_{5,3} \cdot 2! - C_{5,4} \cdot 1! + C_{5,5} \cdot 0!) = 5! - \left(\binom{5}{1}\cdot 4! - \binom{5}{2}\cdot 3! + \binom{5}{3}\cdot 2! - \binom{5}{4}\cdot 1! + \binom{5}{5}\cdot 0!\right) = 120 -$$

$(120 - 60 + 20 - 5 + 1) = 44$ maneras.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuántos resultados distintos puedes obtener al lanzar dos dados de distinto color?

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 2 en 2.

$VR_{6,2} = 6^2 = 36$

Se pueden obtener 36 resultados distintos al lanzar dos dados de distinto color.

2. Un salón tiene un sofá de tres plazas, y otro, de dos plazas.

a) ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 5 personas?

b) Si hay tres hombres y dos mujeres, ¿de cuántas maneras pueden sentarse estando los tres hombres juntos?

a) Para el sofá de tres plazas, de 5 personas hay que seleccionar 3 diferentes y el orden es determinante.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3.

$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

En el sofá de tres plazas se pueden sentar de 60 formas diferentes.

Para el sofá de dos plazas, de las 2 personas restantes hay que seleccionar a las dos. Por tanto, en el sofá de dos plazas se pueden sentar de dos formas distintas.

Aplicando el principio de multiplicación hay $N = 60 \cdot 2 = 120$ formas diferentes de sentar a 5 personas en un sofá de tres plazas y otro de dos.

b) Si los tres hombres deben estar juntos entonces se tienen que sentar en el sofá de tres plazas.

Se trata de calcular las permutaciones de orden 3.

$P_3 = 3! = 6$

Hay 6 formas diferentes de sentar a los tres hombres en el sofá de tres plazas.

Las dos mujeres tienen que sentarse en el sofá de dos plazas. Hay 2 formas diferentes de sentar a las mujeres en el sofá de 2 plazas.

Aplicando el principio de multiplicación hay $N = 6 \cdot 2 = 12$ formas diferentes de sentar a los 3 hombres juntos.

3. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6:

a) ¿Cuántos números de 4 cifras pueden formarse?

b) ¿Cuántos tienen las 4 cifras distintas?

c) ¿Cuántas empiezan y terminan en cifra impar?

a) Hay que seleccionar 4 cifras de entre 6, pero una misma cifra puede estar repetida y el orden influye.

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 4 en 4.

$VR_{6,4} = 6^4 = 1296$

Se pueden formar 1296 números de 4 cifras.

b) Hay que seleccionar 4 cifras de entre 6, pero una misma cifra no puede estar repetida y el orden influye.

Se trata de calcular las variaciones sin repetición de 6 elementos tomados de 4 en 4.

$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Se pueden formar 360 números de 4 cifras distintas.

c) La primera cifra y la última cifra pueden ser cualquiera de las 3 cifras impares disponibles.

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

$VR_{3,2} = 3^2 = 9$

Las dos cifras centrales pueden ser cualquiera de las 6 cifras disponibles.

Se trata de calcular las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 2 en 2.

$VR_{6,2} = 6^2 = 36$

Aplicando el principio de multiplicación hay $N = 9 \cdot 36 = 324$ números diferentes.

4. ¿Cuántas palabras, con o sin significado, se pueden formar con las letras de la palabra TEGUCIGALPA?

Se quieren hacer grupos de 11 elementos en los que dos se repiten 2 veces y los otros 9 una vez, e influye el orden.

Son permutaciones con repetición de 11 elementos en los que 2 se repiten 11 veces y los otros 9 una vez.

$$PR_{11}^{2,2,1,1,1,1,1,1,1} = \frac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 9\,979\,200$$

Se pueden formar 9 979 200 palabras diferentes, con o sin significado, con las letras de la palabra *TEGUCIGALPA.*

5. Un equipo de voleibol consta de 10 jugadores, 4 zagueros, 4 delanteros y 2 líberos.

a) ¿Cuántas alineaciones distintas de 6 jugadores pueden hacerse?

b) ¿En cuántas alineaciones juegan simultáneamente los dos líberos?

c) El entrenador quiere jugar con 2 zagueros, un líbero y 3 delanteros. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

a) De 10 jugadores del equipo hay que elegir 6 diferentes sin importar el orden de esos 6.

Se trata de calcular las combinaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$$

Se pueden hacer 210 alineaciones diferentes.

b) Si los dos líberos han de jugar, entonces de los 8 jugadores restantes hay que elegir 4 diferentes sin importar el orden de esos 4.

Se trata de calcular las combinaciones de 8 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = 70$$

En 70 alineaciones diferentes juegan simultáneamente los dos líberos.

c) De 4 zagueros hay que seleccionar 2 diferentes sin importar el orden de esos 2.

Se trata de calcular las combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$$

Los zagueros se pueden seleccionar de 6 formas diferentes.

De 2 líberos hay que seleccionar 1 sin importar el orden.

Se trata de calcular las combinaciones de 2 elementos tomados de 1 en 1.

$$C_{2,1} = \frac{2!}{1!\cdot 1!} = 2$$

Los líberos se pueden seleccionar de 2 formas diferentes.

De 4 delanteros hay que seleccionar 3 diferentes sin importar el orden de esos 3.

Se trata de calcular las combinaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$$

Los delanteros se pueden seleccionar de 4 formas diferentes.

Aplicando el principio de multiplicación, se pueden formar $N = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ equipos diferentes.