6 Aplicaciones de la trigonometría

LEE Y COMPRENDE

El relato narra cómo se calculó la medida de la Tierra para establecer una medida de longitud universal: el metro. ¿Cómo se llevó a cabo?

El cálculo de la medida de la Tierra se llevó a cabo mediante el método de la triangulación. Con este método se pudo calcular la medida del cuadrante de todo el meridiano y, con ello, calcular el tamaño de la Tierra.

¿Qué es la triangulación? ¿En qué se basa?

La triangulación es el uso de la geometría de los triángulos para determinar posiciones de puntos, distancias o áreas. Se basa en un teorema elemental de la geometría: "Si se conocen los tres ángulos de un triángulo, más la longitud de uno cualquiera de los lados, se puede calcular la longitud de los otros dos lados".

Como ves, la base de todo este proceso es la resolución de triángulos. ¿Qué crees que es la geodesia?

La geodesia es la ciencia que estudia la forma y dimensiones de la Tierra y las posiciones sobre la misma.

INVESTIGA Y REFLEXIONA

Las herramientas de medida de los ángulos tienen que ser muy precisas. ¿Qué instrumentos utilizan los topógrafos en la actualidad para hacer este tipo de medidas? ¿Qué popular herramienta tecnológica nos proporciona en la actualidad la distancia entre lugares?

Los topógrafos utilizan la brújula, el transito, el teodolito, el taquímetro…

El GPS es una popular herramienta tecnológica que nos proporciona la distancia entre lugares.

Y TÚ, ¿QUÉ OPINAS?

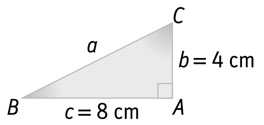
Todas las herramientas que utilizamos en la actualidad para calcular distancias son posibles gracias a la creatividad de personas como Hipatia, Tales, Eratóstenes, Delambre, … ¿Crees que es imprescindible la creatividad para realizar descubrimientos científicos que ayuden a la evolución de la sociedad? ¿Qué otras cualidades crees que son necesarias?

Respuesta libre.

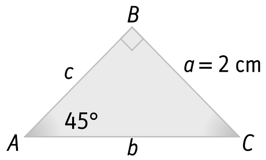
Actividades propuestas

1. Resuelve estos triángulos rectángulos.

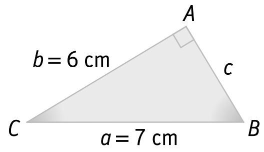
a)



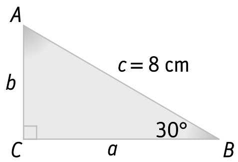
b)



c)



d)



a) $a = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16+64} = 8{,}94$ cm

$\text{tg } \widehat{C} = \dfrac{8}{4} = 2 \Rightarrow \widehat{C} = \text{arctg } 2 = 63^\circ\ 26'\ 6''$

$\widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 63^\circ\ 26'\ 6'' = 26^\circ\ 33'\ 54''$

b) $\widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\text{sen } 45^\circ = \dfrac{2}{b} \Rightarrow b = \dfrac{2}{\text{sen } 45^\circ} = 2{,}83$ cm

$\text{tg } 45^\circ = \dfrac{2}{c} \Rightarrow c = \dfrac{2}{\text{tg } 45^\circ} = 2$ cm

c) $c = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{49-36} = 3{,}61$ cm

$\cos \widehat{C} = \dfrac{6}{7} = 0{,}86 \Rightarrow \widehat{C} = \arccos 0{,}86 = 31^\circ\ 10''$

$\widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 31^\circ\ 10'' = 58^\circ\ 59'\ 50''$

d) $\widehat{A} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\cos 30^\circ = \dfrac{a}{8} \Rightarrow a = 8 \cdot \cos 30^\circ = 6{,}93$ cm

$\text{sen } 30^\circ = \dfrac{b}{8} \Rightarrow b = 8 \cdot \text{sen } 30^\circ = 4$ cm

2. Resuelve estos triángulos rectángulos.

a) $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 43^\circ$, $a = 5$ **cm**

b) $\widehat{B} = 90^\circ$, $a = 8$ **cm**, $c = 6$ **cm**

c) $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 52^\circ$, $a = 10$ **cm**

d) $\widehat{C} = 90^\circ$, $a = 5$ **cm**, $c = 13$ **cm**

a) $\widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$

$\text{sen } 43^\circ = \dfrac{c}{5} \Rightarrow c = 5 \cdot \text{sen } 43^\circ = 3{,}41$ cm

$\cos 43^\circ = \dfrac{b}{5} \Rightarrow b = 5 \cdot \cos 43^\circ = 3{,}66$ cm

b) $b = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = 10$ cm

$\cos \widehat{B} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6 \Rightarrow \widehat{B} = \arccos 0{,}6 = 53^\circ\ 7'\ 49''$

$\widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 53^\circ\ 7'\ 49'' = 36^\circ\ 52'\ 11''$

c) $\widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

$\text{sen } 52^\circ = \dfrac{b}{10} \Rightarrow b = 10 \cdot \text{sen } 52^\circ = 7{,}88$ cm

$\cos 52^\circ = \dfrac{c}{10} \Rightarrow c = 10 \cdot \cos 52^\circ = 6{,}16$ cm

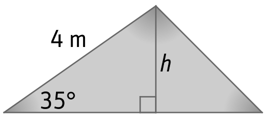
d) $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169-25} = 12$ cm

$\text{tg } \widehat{B} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arctg } 2{,}4 = 67^\circ\ 22''\ 48''$

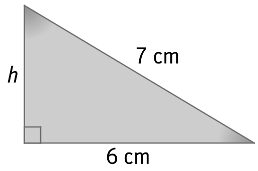
$\widehat{A} = 180^\circ - 90^\circ - 67^\circ\ 22'\ 48'' = 22^\circ\ 37'\ 12''$

3. Calcula la altura *h* en estos triángulos.

a)



b)



a) sen 35º = $\frac{h}{4}$ $\Rightarrow$ h = 4 · sen 35º = 2,29 cm

b) h = $\sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{49 - 36} = 3{,}61$ cm

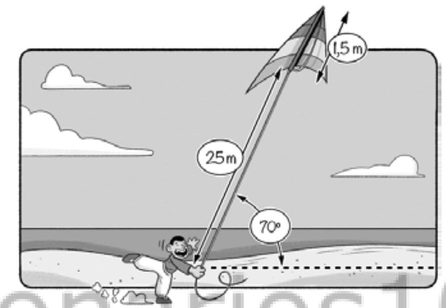
4. Desde un pozo situado a 200 m del pie del edificio se ve la antena de la azotea bajo un ángulo de 60º. ¿A qué altura se encuentra el extremo de la antena?

Llamamos *h* a la altura a la que se encuentra el extremo de la antena.

tg 60º = $\frac{h}{200}$ $\Rightarrow h$ = 200 · tg 60º = 346,41

El extremo de la antena se encuentra a 346,41 m.

5. ¿Qué altura alcanza la cometa?



Llamamos *h* a la altura que alcanza la cometa.

La hipotenusa del triángulo es H = 25 + 1,5 = 26,5 m

sen 70º = $\frac{h}{26{,}5}$ $\Rightarrow h$ = 26,5 · sen 70º = 24,9

La cometa alcanza una altura de 24,9 m.

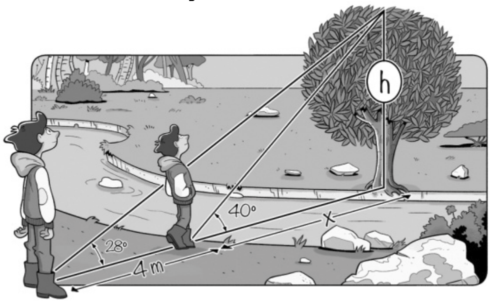
6. Se ha colocado un proyector sobre un trípode de 1,2 m y a una distancia de 5 m de la pantalla medida en el horizontal. La imagen proyectada está a 3 m del suelo. ¿Qué inclinación sobre la horizontal tiene el foco del proyector?

Llamamos α al ángulo que forma el foco del proyector con la horizontal.

tg α = $\frac{3 - 1{,}2}{5} = \frac{1{,}8}{5}$ = 0,36 $\Rightarrow$ α = arctg 0,36 = 19º 47´56´´

7. Actividad resuelta.

8. Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40º, y si se retrocede 4 m, se ve bajo un ángulo de 28º. Calcula la altura del árbol y la anchura del río.



tg 40º = $\dfrac{h}{x}$ $\Rightarrow h = x \cdot$ tg 40º = 0,84x

tg 28º = $\dfrac{h}{x+4}$ $\Rightarrow h = (x + 4)\cdot$ tg 28º = $(x + 4)\cdot$ 0,53 = 0,53x + 2,12

Igualando ambas expresiones:

0,84x = 0,53x + 2,12 $\Rightarrow$ 0,31x = 2,12 $\Rightarrow$ x = 6,84 m.$\Rightarrow$ h = 5,75 m.

9. Una escalera de 6 m de longitud está apoyada sobre la ventana de un edificio situada a 4,5 m del suelo. Si bascula sobre su base, se apoya en una farola de 3,20 m situada en la misma acera.

a) ¿Con qué ángulo de inclinación está apoyada la escalera sobre la ventana? ¿Y si se apoya sobre la farola?

b) Calcula la distancia entre la fachada del edificio y la farola.

a) Llamamos α y β a los ángulos de inclinación de la escalera sobre la fachada y sobre la farola, respectivamente.

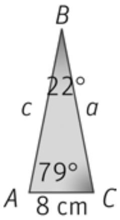
sen α = $\dfrac{4,5}{6}$ = 0,75 $\Rightarrow$ α = arcsen 0,75 = 48º 35´ 25´´ sen β = $\dfrac{3,20}{6}$ = 0,53 $\Rightarrow$ α = arcsen 0,53 = 32º 20´´

b) Llamamos x a la distancia del pie de la escalera al edificio e y a la distancia del pie de la escalera a la farola.

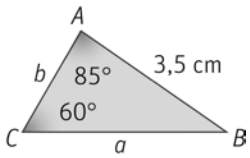
$x = \sqrt{6^2 - 4,5^2} = 3,97$ m e $y = \sqrt{6^2 - 3,2^2} = 5,08$ m $\Rightarrow$ La distancia es 3,97 + 5,08 = 9,05 m.

10. Calcula el lado desconocido en los siguientes triángulos.

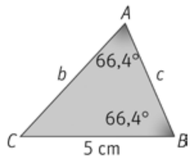
a)



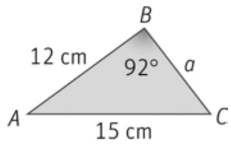
b)



c)



d)



Aplicando el teorema del seno:

a) $\widehat{A}$ = 180º – 22º – 79º = 79º

$$\frac{8}{\text{sen}\,22^\circ} = \frac{a}{\text{sen}\,79^\circ} \Rightarrow a = \frac{8 \cdot \text{sen}\,79^\circ}{\text{sen}\,22^\circ} = 20,96 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{\text{sen}\,22^\circ} = \frac{c}{\text{sen}\,79^\circ} \Rightarrow c = \frac{8 \cdot \text{sen}\,79^\circ}{\text{sen}\,22^\circ} = 20,96 \text{ cm}$$

b) $\widehat{A}$ = 180º – 85º – 60º = 35º

$$\frac{3,5}{\text{sen}\,60^\circ} = \frac{a}{\text{sen}\,85^\circ} \Rightarrow a = \frac{3,5 \cdot \text{sen}\,85^\circ}{\text{sen}\,60^\circ} = 4,03 \text{ cm}$$

$$\frac{3,5}{\text{sen}\,60^\circ} = \frac{b}{\text{sen}\,35^\circ} \Rightarrow b = \frac{3,5 \cdot \text{sen}\,35^\circ}{\text{sen}\,60^\circ} = 2,32 \text{ cm}$$

c) $\widehat{C}$ = 180º – 2 · 66,4º = 47,2º

$$\frac{5}{\text{sen}\,66,4^\circ} = \frac{b}{\text{sen}\,66,4^\circ} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \text{sen}\,66,4^\circ}{\text{sen}\,66,4^\circ} = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{\text{sen}\,66,4^\circ} = \frac{c}{\text{sen}\,47,2^\circ} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot \text{sen}\,47,2^\circ}{\text{sen}\,66,4^\circ} = 4 \text{ cm}$$

d) $\dfrac{15}{\text{sen}\,92^\circ} = \dfrac{12}{\text{sen}\,\widehat{C}} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{C} = 0,8 \Rightarrow \widehat{C}$ = 53º 7´ 48´´

$\widehat{A}$ = 180º – 92º – 53º 7´ 48´´ = 34º 52´ 12´´ = 34,87º

$$\frac{a}{\text{sen}\,34,87^\circ} = \frac{15}{\text{sen}\,92^\circ} \Rightarrow a = \frac{15 \cdot \text{sen}\,34,87^\circ}{\text{sen}\,92^\circ} = 8,58 \text{ cm}$$

11. Halla el lado *a* de los triángulos en cada caso.

a) $\hat{A}$ **= 38º;** $\hat{B}$ **= 80º; *b* = 5 cm**

b) $\hat{C}$ **= 110º; *b* = 6,5 cm; *c* = 10,25 cm**

c) $\hat{C}$ **= 51º;** $\hat{B}$ **= 70º; *c* = 4,96 cm**

Aplicando el teorema del seno:

a) $\dfrac{5}{\text{sen}\,80^\circ} = \dfrac{a}{\text{sen}\,38^\circ} \Rightarrow a = \dfrac{5 \cdot \text{sen}\,38^\circ}{\text{sen}\,80^\circ} = 3{,}13\,\text{cm}$

b) $\dfrac{10{,}25}{\text{sen}\,110^\circ} = \dfrac{6{,}5}{\text{sen}\,\hat{B}} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{B} = 0{,}596 \Rightarrow \hat{B}$ = arcsen 0,596 = 36,58º $\Rightarrow \hat{A}$ = 180º – 110º – 36,58º = 33,42º

$\dfrac{10{,}25}{\text{sen}\,110^\circ} = \dfrac{a}{\text{sen}\,33{,}42^\circ} \Rightarrow a = \dfrac{10{,}25 \cdot \text{sen}\,33{,}42^\circ}{\text{sen}\,110^\circ} = 6\,\text{cm}$

c) $\hat{A}$ = 180º – 70º – 51º = 59º

$\dfrac{4{,}96}{\text{sen}\,51^\circ} = \dfrac{a}{\text{sen}\,59^\circ} \Rightarrow a = \dfrac{4{,}96 \cdot \text{sen}\,59^\circ}{\text{sen}\,51^\circ} = 5{,}47\,\text{cm}$

12. Calcula los ángulos restantes de los siguientes triángulos.

a) $\hat{A}$ **= 65º; *a* = 14 cm; *c* = 15 cm**

b) $\hat{C}$ **= 41º; *b* = 6 cm; *c* = 6 cm**

a) Aplicando el teorema del seno:

$\dfrac{14}{\text{sen}\,65^\circ} = \dfrac{15}{\text{sen}\,\hat{C}} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{15 \cdot \text{sen}\,65^\circ}{14} = 0{,}886 \Rightarrow \hat{C}$ = arcsen 0,886 = 62º = 40º 21´ 0,47´´

$\hat{B}$ = 180º – 65º – 40º 21´ 0,47´´ = 52º 38´ 59,53´´

$\dfrac{14}{\text{sen}\,65^\circ} = \dfrac{\text{b}}{\text{sen}\,52^\circ 38'59{,}53''} \Rightarrow \text{b} = \dfrac{14 \cdot \text{sen}\,52^\circ 38'59{,}53''}{\text{sen}\,65^\circ} = 12{,}28\,\text{cm}$

b) Aplicando el teorema del seno:

$\dfrac{6}{\text{sen}\,41^\circ} = \dfrac{6}{\text{sen}\,\hat{B}} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{6 \cdot \text{sen}\,41^\circ}{6} \Rightarrow \hat{B} = 41^\circ$

$\hat{A}$ = 180º – 82º = 98º

$a = \dfrac{6\,\text{sen}\,98^\circ}{\text{sen}\,41^\circ} = 9{,}05\,\text{cm}$

13. Encuentra el tercer lado de un recinto triangular si dos de sus lados miden 100 m y 120 m y forman un ángulo de 60º.

Llamamos *a* al tercer lado del recinto triangular.

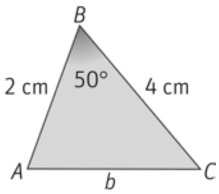
Aplicando el teorema del coseno:

$a^2 = 100^2 + 120^2 - 2 \cdot 100 \cdot 120 \cdot \cos 60^\circ = 12\,400 \Rightarrow a = 111{,}36$

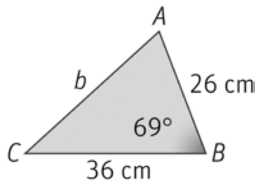
El tercer lado del recinto triangular mide 111,36 m.

14. Calcula el valor desconocido.

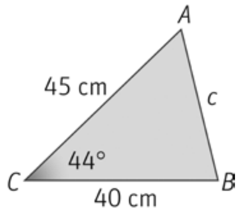
a)



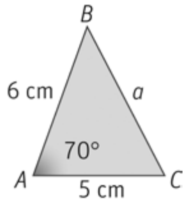
c)



b)



d)



Aplicando el teorema del coseno:

a) $b^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 50º = 9{,}72 \Rightarrow b = 3{,}12$ cm

b) $c^2 = 40^2 + 45^2 - 2 \cdot 40 \cdot 45 \cdot \cos 44º = 1035{,}38 \Rightarrow c = 32{,}18$ cm

c) $b^2 = 36^2 + 26^2 - 2 \cdot 36 \cdot 26 \cdot \cos 69º = 1301{,}14 \Rightarrow b = 36{,}07$ cm

d) $a^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos 70º = 40{,}48 \Rightarrow a = 6{,}36$ cm

15. Halla el ángulo $\widehat{A}$ en los siguientes triángulos.

a) ***a* = 9,85 cm, *b* = 6 cm, *c* = 5 cm** **b)** ***a* = 4 cm, *b* = 7 cm, *c* = 9,5 cm**

Aplicando el teorema del coseno:

a) $9{,}85^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = -0{,}6 \Rightarrow \widehat{A} = \arccos(-0{,}6) = 126º\ 52'\ 12''$

b) $4^2 = 7^2 + 9{,}5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9{,}5 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}927 \Rightarrow \widehat{A} = \arccos 0{,}927 = 22º\ 1'\ 41''$

16. Dos coches que se desplazan con velocidades constantes de 90 km/h y 100 km/h, respectivamente, toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 75º. ¿Qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 10 minutos de viaje?

El primer coche recorre $90 \cdot \frac{1}{6} = 15$ km en 10 minutos y, el segundo, $100 \cdot \frac{1}{6} = 16{,}67$ km.

Llamamos *x* a la distancia que habrá entre los coches a los 10 minutos y aplicando el teorema del coseno:

$x^2 = 15^2 + 16{,}67^2 - 2 \cdot 15 \cdot 16{,}67 \cdot \cos 75º = 373{,}45 \Rightarrow x = 19{,}32$

A los 10 minutos de viaje habrá 19,32 km de distancia entre los coches.

17. Si las piernas de un patinador mide 130 cm de largo cada una, ¿qué ángulo forman si al girar traza una circunferencia de diámetro 90 cm?

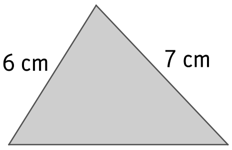
Llamamos α al ángulo que forman las piernas del patinador al trazar una circunferencia de diámetro 90 cm.

Aplicando el teorema del coseno:

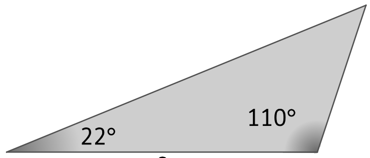
$90^2 = 130^2 + 130^2 - 2 \cdot 130 \cdot 130 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0{,}76 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}76 = 40º\ 32'\ 9''$

18. Resuelve los siguientes triángulos.

a)



b)



a) Llamamos a = 8 cm, b= 6 cm y c = 7 cm.

Aplicando el teorema del coseno:

$8^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}25 \Rightarrow \widehat{A} = \text{arccos } 0{,}25 = 75º\ 31'\ 21''$

$6^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos \widehat{B} \Rightarrow \cos \widehat{B} = 0{,}688 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arccos } 0{,}688 = 46º\ 31'\ 41''$

$\widehat{C} = 180º - 75º\ 31'\ 21'' - 46º\ 31'\ 41'' = 57º\ 56'\ 58''$

b) Llamamos a = 8 cm, $\widehat{B}$ = 110º y $\widehat{C}$ = 22º.

$\widehat{A} = 180º - 110º - 22º = 48º$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{8}{\text{sen}\,48º} = \frac{b}{\text{sen}\,110º} \Rightarrow b = \frac{8 \cdot \text{sen}\,110º}{\text{sen}\,48º} = 10{,}12 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{\text{sen}\,48º} = \frac{c}{\text{sen}\,22º} \Rightarrow b = \frac{8 \cdot \text{sen}\,22º}{\text{sen}\,48º} = 4{,}03 \text{ cm}$$

19. Resuelve los siguientes triángulos y clasifícalos.

a) ***a* = 25 cm, *b* = 30 cm y $\widehat{C}$ = 38º**

b) ***a* = 15 cm, *b* = 55 cm y *c* = 45 cm**

a) Aplicando el teorema del coseno:

$c^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \cos 38º = 342{,}98 \Rightarrow c = 18{,}52$ cm

$25^2 = 30^2 + 18{,}52^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18{,}52 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}556 \Rightarrow \widehat{A} = \text{arccos } 0{,}556 = 56º\ 13'\ 13''$

$30^2 = 25^2 + 18{,}52^2 - 2 \cdot 25 \cdot 18{,}52 \cdot \cos \widehat{B} \Rightarrow \cos \widehat{B} = 0{,}073 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arccos } 0{,}073 = 85º\ 48'\ 49''$

Triángulo acutángulo escaleno.

b) Aplicando el teorema del coseno:

$15^2 = 55^2 + 45^2 - 2 \cdot 55 \cdot 45 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}9747 \Rightarrow \widehat{A} = 12º\ 54'\ 57''$

$55^2 = 15^2 + 45^2 - 2 \cdot 15 \cdot 45 \cdot \cos \widehat{B} \Rightarrow \cos \widehat{B} = -0{,}574 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arccos } -0{,}574 = 125º\ 1'\ 47''$

$\widehat{C} = 180º - 12º\ 54'\ 57'' - 125º\ 1'\ 47'' = 42º\ 3'\ 16''$

Triángulo obtusángulo escaleno.

20. Calcula el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 40 cm y 45 cm y el ángulo comprendido entre ellos, 44º.

Llamamos x a la medida del lado del triángulo.

Aplicando el teorema del coseno:

$x^2 = 40^2 + 45^2 - 2 \cdot 40 \cdot 45 \cdot \cos 44º = 1035{,}38 \Rightarrow x = 32{,}18$ cm

El perímetro del triángulo es P = 40 + 45 + 32,15 = 117,18 cm.

21. El lado de un polígono regular de 15 lados, mide 50 cm. Calcula el radio y la apotema.

$r = \dfrac{50}{2\,\text{sen}\left(\dfrac{180º}{15}\right)}$ = 120,24 cm

$a = \dfrac{50}{2\,\text{tg}\left(\dfrac{180º}{15}\right)}$ = 117,62 cm

22. Indica el número de lados de un polígono regular cuyo radio vale 24,27 cm y cuyo lado mide 15 cm.

Llamamos n al número de lados del polígono regular.

$24,27 = \dfrac{15}{2\,\text{sen}\left(\dfrac{180º}{n}\right)}$

$\text{sen}\left(\dfrac{180º}{n}\right) = 0,309 \Rightarrow \dfrac{180º}{n} = 18º \Rightarrow n = 10$

El polígono regular tiene 10 lados.

23. Halla el área de los siguientes triángulos.

a) a **= 15 cm,** b **= 24 cm,** c **= 15 cm** **b)** $\hat{A}$ **= 75º,** b **= 15 cm,** c **= 18 cm**

a) Por el teorema del coseno: $15^2 = 15^2 + 24^2 - 2 \cdot 15 \cdot 24 \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow \cos \hat{C} = 0,8 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } 0,8 = 36,87º$

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 24 \cdot \text{sen}\,36,87º = 108 \text{ cm}^2$

b) $S = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 18 \cdot \text{sen}\,75º = 130,40 \text{ cm}^2$

24. Calcula el perímetro y el área de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 8 y 4 cm y cuya altura mide 3 cm.

Llamamos x a la medida del lado oblicuo del trapecio rectángulo.

$x^2 = 3^2 + (8 - 4)^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

Entonces, $A = \dfrac{(8+4)\cdot 3}{2} = 18 \text{ cm}^2$ y $P = 8 + 5 + 3 + 4 = 20$ cm

25. Halla el área de un tetraedro de lado 5 cm.

El área de un tetraedro es la suma de cuatro triángulos equiláteros de lado 5 cm: $S = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \text{sen}\,60º = 43,30 \text{ cm}^2$

26. Calcula el área de un sector circular de radio 4 cm y cuyo arco mide 8 cm.

$8 = \dfrac{\pi \cdot 4 \cdot \alpha}{180º} \Rightarrow \alpha = 114,59º \Rightarrow A_{sector} = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 114,59º}{360º} = 16 \text{ cm}^2$

27. Halla el área de un eneágono regular de perímetro 63 cm.

El lado del eneágono mide $\dfrac{63}{9} = 7$ cm. Por tanto, la apotema medirá $a = \dfrac{7}{2\,\text{tg}\left(\dfrac{180º}{9}\right)} = 9,62$ cm.

El área del eneágono es $S = \dfrac{63 \cdot 9,62}{2} = 303,03 \text{ cm}^2$.

28. Calcula la superficie de un prisma de altura 5 cm y cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de catetos 2 cm.

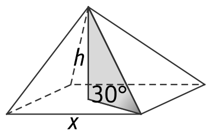
Llamamos x a la hipotenusa del triángulo rectángulo de la base: $x = \sqrt{2^2+2^2} = 2{,}83$ cm

$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2{,}83 = 34{,}15 \text{ cm}^2$ y $A_{\text{base}} = \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ cm}^2$

Por tanto, $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}} = 34{,}15 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 2 = 38{,}15 \text{ cm}^2$

29. El volumen de una pirámide es de 1000 m^3, su base es un cuadrado y el ángulo de las alturas laterales con la base es de 30º. ¿Cuál es la longitud del lado de la base? ¿Y la altura de la pirámide?

Llamamos x al lado del cuadrado de la base, d a la diagonal de la base y h a la altura de la pirámide.

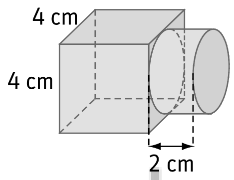


$d = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$ cm $\quad \text{tg}\,30º = \dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}x}{2}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}x}{2}} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{6}x}{6}$ cm

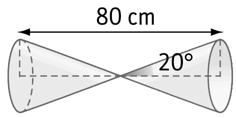
Entonces $V = \dfrac{x^2 \cdot \frac{\sqrt{6}x}{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}x^3}{18} \Rightarrow 1000 = \dfrac{\sqrt{6}x^3}{18} \Rightarrow 18\,000 = \sqrt{6}x^3 \Rightarrow x = 19{,}44$ cm $\Rightarrow h = 7{,}93$ cm

30. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos.

a)



b)



a) El volumen total es la suma de los volúmenes de un cubo de arista 4 cm y de un cilindro de radio 2 cm y altura 2 cm.

$V = 4^3 + \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = 89{,}13 \text{ cm}^3$

b) Llamamos r al radio de la base de un cono: $\text{tg } 20º = \dfrac{r}{40} \Rightarrow r = 40 \cdot \text{tg } 20º = 14{,}56$ cm

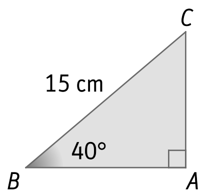
El volumen total es la suma de los volúmenes de dos conos de altura 40 cm y radio de la base 14,56 cm.

$V = 2 \cdot \dfrac{\pi \cdot 14{,}56^2 \cdot 40}{3} = 17\,759{,}93 \text{ cm}^3$

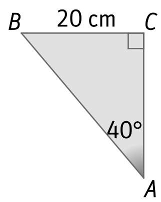
31. Actividad interactiva.

32. Calcula la medida de los ángulos y lados desconocidos.

a)



b)



a) $\widehat{C} = 180º - 90º - 40º = 50º$

$\text{sen } 40º = \dfrac{b}{15} \Rightarrow b = 15 \cdot \text{sen } 40º = 9{,}64$ cm

$\cos 40º = \dfrac{c}{15} \Rightarrow c = 15 \cdot \cos 40º = 11{,}49$ cm

b) $\widehat{A} = 180º - 90º - 40º = 60º$

$\text{sen } 40º = \dfrac{20}{c} \Rightarrow c = \dfrac{20}{\text{sen}\,40º} = 31{,}11$ cm

$\text{tg } 40º = \dfrac{20}{b} \Rightarrow b = \dfrac{20}{\text{tg}\,40º} = 23{,}84$ cm

33. Resuelve los triángulos sabiendo que $\widehat{B}$ es un ángulo recto.

a) $\widehat{C}$ = 65º, *a* = 22 cm

b) *c* = 15 cm, *b* = 18 cm

c) *a* = 20 cm, *c* = 20 cm

a) $\widehat{A} = 180º - 90º - 65º = 25º$

$\text{tg } 65º = \dfrac{c}{22} \Rightarrow c = 22 \cdot \text{tg } 65º = 47{,}18 \text{ cm}$ y $\cos 65º = \dfrac{22}{b} \Rightarrow b = \dfrac{22}{\cos 65º} = 52{,}06 \text{ cm}$

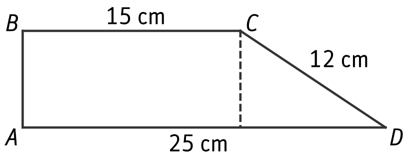
b) $a = \sqrt{18^2 - 15^2} = \sqrt{324 - 225} = 9{,}95 \text{ cm}$

$\text{sen } \widehat{C} = \dfrac{15}{18} = 0{,}833 \Rightarrow \widehat{B} = 56º\,26'\,34''$ y $\widehat{A} = 180º - 90º - \widehat{C} = 33º\,33'\,26''$

c) $b = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{400 + 400} = 28{,}28 \text{ cm}$

$\text{tg } \widehat{A} = \dfrac{20}{20} = 1 \Rightarrow \widehat{A} = \text{arctg } 1 = 45º$ y $\widehat{B} = 180º - 90º - 45º = 45º$

34. Un trapecio rectángulo tiene por bases 15 y 25 cm. El lado que no es perpendicular a las bases mide 12 cm. Calcula los ángulos del trapecio.

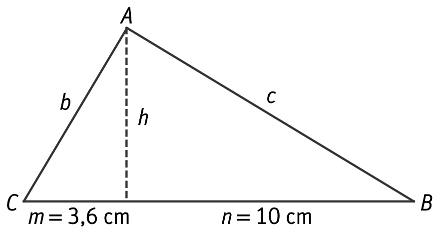


$\cos \widehat{D} = \dfrac{25 - 15}{12} = 0{,}833 \Rightarrow \widehat{D} = \text{arccos } 0{,}833 = 33º\,35'\,31''$

$\widehat{A} = \widehat{B} = 90º \quad \widehat{C} = 360º - 90º - 90º - 33º\,35'\,31'' = 146º\,24'\,29''$

35. Actividad resuelta.

36. Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre su hipotenusa valen *m* = 3,6 cm y *n* = 10 cm, respectivamente. Resuelve el triángulo.



Se calcula el lado *a* = 3,6 + 10 = 13,6 cm.

Aplicando el teorema de la altura: $h^2 = 3{,}6 \cdot 10 = 36 \Rightarrow h = 6$ cm

Se calculan los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$:

$\text{tg } \widehat{B} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arctg } 0{,}6 = 31º$

$\widehat{C} = 180º - 90º - 31º = 59º$

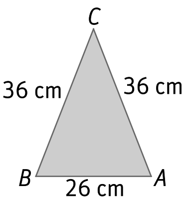
Se calculan los lados *b* y *c*:

$\cos 59º = \dfrac{3{,}6}{b} \Rightarrow b = \dfrac{3{,}6}{\cos 59º} = 6{,}99$

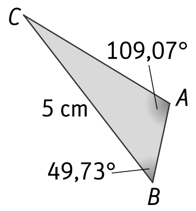
$c = \sqrt{13{,}6^2 - 6{,}99^2} = 11{,}67 \text{ cm}$

37. Resuelve los siguientes triángulos.

a)



b)



a) Aplicando el teorema del coseno:

$26^2 = 36^2 + 36^2 - 2 \cdot 36 \cdot 36 \cdot \cos \widehat{C} \Rightarrow \cos \widehat{C} = 0{,}739 \Rightarrow \widehat{C} = \text{arccos } 0{,}739 = 42^{\circ}\ 21'\ 13''$

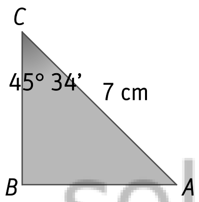
$36^2 = 26^2 + 36^2 - 2 \cdot 26 \cdot 36 \cdot \cos \widehat{B} \Rightarrow \cos \widehat{B} = 0{,}361 \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A} = \text{arccos } 0{,}361 = 68^{\circ}\ 50'\ 18''$

b) $\widehat{C} = 180^{\circ} - 109{,}7^{\circ} - 49{,}73^{\circ} = 20{,}57^{\circ}$

$$\frac{5}{\text{sen}\,109{,}7^{\circ}} = \frac{b}{\text{sen}\,49{,}73^{\circ}} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \text{sen}\,49{,}73^{\circ}}{\text{sen}\,109{,}7^{\circ}} = 4{,}05 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{\text{sen}\,109{,}7^{\circ}} = \frac{c}{\text{sen}\,20{,}57^{\circ}} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot \text{sen}\,20{,}57^{\circ}}{\text{sen}\,109{,}7^{\circ}} = 1{,}87 \text{ cm}$$

38. Resuelve el triángulo. ¿De qué tipo es?



$\widehat{A} = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 45^{\circ}\ 34' = 44^{\circ}\ 26'$

$$\frac{7}{\text{sen}\,90^{\circ}} = \frac{c}{\text{sen}\,45^{\circ}\,34'} \Rightarrow c = \frac{7 \cdot \text{sen}\,45^{\circ}\,34'}{\text{sen}\,90^{\circ}} = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{7}{\text{sen}\,90^{\circ}} = \frac{a}{\text{sen}\,44^{\circ}\,26'} \Rightarrow a = \frac{7 \cdot \text{sen}\,44^{\circ}\,26'}{\text{sen}\,90^{\circ}} = 4{,}9 \text{ cm}$$

Es un triángulo rectángulo escaleno.

39. Resuelve estos triángulos y clasifícalos.

a) ***a*** **= 5 cm,** ***c*** **= 12 cm,** $\widehat{C}$ **= 120º**

b) ***a*** **= 20 cm,** ***b*** **= 12 cm,** $\widehat{C}$ **= 100º**

c) ***a*** **= 20 cm,** ***b*** **= 40 cm,** ***c*** **= 25**

d) $\widehat{B}$ **= 65º,** ***a*** **= 23 cm,** ***c*** **= 32 cm**

e) $\widehat{B}$ **= 32º,** $\widehat{A}$ **= 65º,** ***b*** **= 12 cm**

f) $\widehat{A}$ **= 38º,** ***b*** **= 12 cm,** ***a*** **= 16 cm**

a) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{12}{\text{sen}\,120^{\circ}} = \frac{5}{\text{sen}\,\widehat{A}} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{A} = \frac{5 \cdot \text{sen}\,120^{\circ}}{12} = 0{,}361 \Rightarrow \widehat{A} = \text{arcsen } 0{,}361 = 21^{\circ}\ 9'\ 42''$$

$\widehat{B} = 180^{\circ} - 120^{\circ} - 21^{\circ}\ 9'\ 42'' = 38^{\circ}\ 50'\ 18''$

$$\frac{12}{\text{sen}\,120^{\circ}} = \frac{b}{\text{sen}\,38^{\circ}\,50'\,18''} \Rightarrow b = \frac{12 \cdot \text{sen}\,38^{\circ}\,50'\,18''}{\text{sen}\,120^{\circ}} = 8{,}69 \text{ cm}$$

b) Aplicando el teorema del coseno:

$c^2 = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos 100^{\circ} = 627{,}35 \Rightarrow c = 25{,}05$ cm

$20^2 = 25{,}05^2 + 12^2 - 2 \cdot 25{,}05 \cdot 12 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}618 \Rightarrow \widehat{A} = \text{arcos } 0{,}618 = 51^{\circ}\ 49'\ 47''$

$\widehat{B} = 180^{\circ} - 100^{\circ} - 51^{\circ}\ 49'\ 47'' = 28^{\circ}\ 10'\ 13''$

c) Aplicando el teorema del coseno:

$20^2 = 40^2 + 25^2 - 2 \cdot 40 \cdot 25 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}9125 \Rightarrow \widehat{A} = \text{arcos } 0{,}9125 = 24^{\circ}\ 8'\ 49''$

$40^2 = 20^2 + 25^2 - 2 \cdot 20 \cdot 25 \cdot \cos \widehat{B} \Rightarrow \cos \widehat{B} = -0{,}575 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arcos } (-0{,}575) = 125^{\circ}\ 5'\ 59''$

$\widehat{C} = 180^{\circ} - 24^{\circ}\ 8'\ 49'' - 125^{\circ}\ 5'\ 59'' = 30^{\circ}\ 45'\ 12''$

d) Aplicando el teorema del coseno:

$b^2 = 23^2 + 32^2 - 2 \cdot 23 \cdot 32 \cdot \cos 65^\circ = 930{,}91 \Rightarrow b = 30{,}51$ cm

$23^2 = 30{,}51^2 + 32^2 - 2 \cdot 30{,}51 \cdot 32 \cdot \cos \widehat{A} = 0{,}730 \Rightarrow \widehat{A} = 43^\circ\, 6'\, 49''$

$\widehat{B} = 180^\circ - 65^\circ - 43^\circ\, 6'\, 49'' = 71^\circ\, 53'\, 11''$

e) $\widehat{C} = 180^\circ - 32^\circ - 65^\circ = 83^\circ$ y aplicando el teorema del seno:

$\dfrac{12}{\operatorname{sen} 32^\circ} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} 65^\circ} \Rightarrow a = \dfrac{12 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ}{\operatorname{sen} 32^\circ} = 20{,}52 \text{ cm}$ $\quad$ $\dfrac{12}{\operatorname{sen} 32^\circ} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} 83^\circ} \Rightarrow c = \dfrac{12 \cdot \operatorname{sen} 83^\circ}{\operatorname{sen} 32^\circ} = 22{,}48 \text{ cm}$

f) Aplicando el teorema del seno:

$\dfrac{16}{\operatorname{sen} 38^\circ} = \dfrac{12}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{B} = \dfrac{12 \cdot \operatorname{sen} 38^\circ}{16} = 0{,}462 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arcsen } 0{,}462 = 27^\circ\, 30'\, 58''$

$\widehat{C} = 180^\circ - 38^\circ - 27^\circ\, 30'\, 58'' = 114^\circ\, 29'\, 2''$

$\dfrac{16}{\operatorname{sen} 38^\circ} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} 114^\circ\, 29'\, 2''} \Rightarrow c = \dfrac{16 \cdot \operatorname{sen} 114^\circ\, 29'\, 2''}{\operatorname{sen} 38^\circ} = 23{,}65 \text{ cm}$

Todos los triángulos son escalenos. Además los triángulos *a*), *b*), *c*), *f*) son obtusángulos, y el resto, acutángulos.

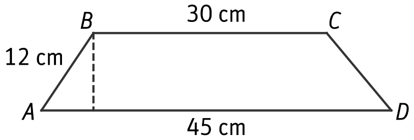
40. La diagonal de un rectángulo mide 25 m y forma con la base un ángulo de 43º 40´. Halla su perímetro y su área.

Llamamos *b* a la base del rectángulo y *h* a su altura.

$\cos 43^\circ\, 40' = \dfrac{b}{25} \Rightarrow b = 25 \cdot \cos 43^\circ\, 40' = 18{,}08$ m $\quad$ $\operatorname{sen} 43^\circ\, 40' = \dfrac{h}{25} \Rightarrow h = 25 \cdot \operatorname{sen} 43^\circ\, 40' = 17{,}26$ m

$P = 2 \cdot 18{,}08 + 2 \cdot 17{,}26 = 70{,}68$ m $\quad$ $A = 18{,}08 \cdot 17{,}26 = 312{,}0608 \text{ m}^2$

41. Un trapecio isósceles tiene por bases 30 y 45 cm. Los lados iguales miden 12 cm cada uno. Calcula los ángulos del trapecio.



$\operatorname{sen} \widehat{A} = \dfrac{\frac{45-30}{2}}{12} = 0{,}625 \Rightarrow \widehat{A} = \text{arcsen } 0{,}625 = 38^\circ\, 40'\, 56''$

$\widehat{A} = \widehat{D} = 38^\circ\, 40'\, 56''$ $\quad$ $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{360^\circ - 2 \cdot 38^\circ\, 40'\, 56''}{2} = 141^\circ\, 19'\, 4''$

42. El radio de un octógono regular mide 45 cm. Calcula la medida del lado y de la apotema y el área del octógono.

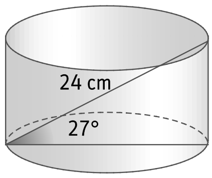
Llamamos *l* y *a* a la medida del lado y de la apotema, respectivamente.

$45 = \dfrac{l}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{8}\right)} \Rightarrow l = 45 \cdot 2 \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{8}\right) = 34{,}44$ cm $\quad a = \dfrac{34{,}44}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{8}\right)} = 41{,}57$ cm

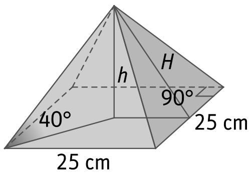
El área del octógono es $A = \dfrac{8 \cdot 34{,}44 \cdot 41{,}57}{2} = 5726{,}68 \text{ cm}^2$.

43. Calcula el área total y el volumen de los cuerpos.

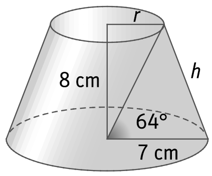
a)



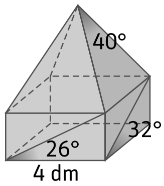
b)



c)



d)



a) Llamamos *h* a la altura del cilindro y *r* al radio de la base.

$\text{sen } 27^\circ = \dfrac{h}{24} \Rightarrow h = 24 \cdot \text{sen } 27^\circ = 10{,}9 \text{ cm}$ $\qquad \cos 27^\circ = \dfrac{2r}{24} \Rightarrow r = \dfrac{24 \cdot \cos 27^\circ}{2} = 10{,}69 \text{ cm}$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}} = 2 \cdot \pi \cdot 10{,}69 \cdot 10{,}9 + 2 \cdot \pi \cdot 10{,}69^2 = 732{,}12 + 718{,}02 = 1450{,}14 \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot 10{,}69^2 \cdot 10{,}9 = 3913{,}2 \text{ cm}^3$

b) Llamamos *d* a la diagonal de la base: $d = \sqrt{25^2 + 25^2} = 35{,}36 \text{ cm}$

$\text{tg } 40^\circ = \dfrac{h}{\dfrac{35{,}36}{2}} \Rightarrow h = \text{tg } 40^\circ \cdot \dfrac{35{,}36}{2} = 14{,}84 \text{ cm}$ $\qquad H = \sqrt{12{,}5^2 + 14{,}84^2} = 19{,}40 \text{ cm}$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 4 \cdot \dfrac{25 \cdot 19{,}4}{2} + 25^2 = 970 + 625 = 1595 \text{ cm}^2$ $\qquad V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{625 \cdot 14{,}84}{3} = 3091{,}67 \text{ cm}^3$

c) Llamamos *x* a la altura del cono deficiente.

$\text{tg } 64^\circ = \dfrac{8}{r} \Rightarrow r = \dfrac{8}{\text{tg} 64^\circ} = 3{,}9 \text{ cm}$ $\qquad h = \sqrt{8^2 + (7 - 3{,}9)^2} = 8{,}58 \text{ cm}$

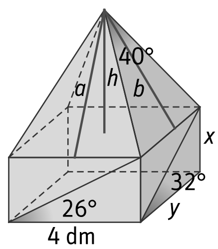
$\dfrac{7}{x+8} = \dfrac{3{,}9}{x} \Rightarrow 7x = 3{,}9x + 31{,}2 \Rightarrow 7x - 3{,}9x = 31{,}2 \Rightarrow 3{,}1x = 31{,}2 \Rightarrow x = \dfrac{31{,}2}{3{,}1} = 10{,}06 \text{ cm}$

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base inferior}} + A_{\text{base superior}} = \pi \cdot (3{,}9 + 7) \cdot 8{,}58 + \pi \cdot 7^2 + \pi \cdot 3{,}9^2 = 495{,}23 \text{ cm}^2$

$V = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono deficiente}} = \dfrac{\pi \cdot 7^2 \cdot (8 + 10{,}06)}{3} - \dfrac{\pi \cdot 3{,}9^2 \cdot 10{,}06}{3} = 926{,}71 - 160{,}23 = 766{,}48 \text{ cm}^3$

d) Llamamos *x* a la altura del ortoedro de la base, *y*, al largo, *a*, a la apotema de la pirámide de las caras cuya base mide 4 cm, *b*, a la apotema de la pirámide de las caras cuya base es *y*, y *h*, a la altura de la pirámide.

$\text{tg } 26^\circ = \dfrac{x}{4} \Rightarrow x = 4 \cdot \text{tg } 26^\circ = 1{,}95 \text{ cm}$ $\qquad \text{tg } 32^\circ = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1{,}95}{y} \Rightarrow y = \dfrac{1{,}95}{\text{tg} 32^\circ} = 3{,}12 \text{ cm}$



$\text{tg } 20^\circ = \dfrac{\dfrac{3{,}12}{2}}{b} = \dfrac{1{,}56}{b} \Rightarrow b = \dfrac{1{,}56}{\text{tg} 20^\circ} = 4{,}29 \text{ cm}$ $\qquad h = \sqrt{4{,}29^2 - 2^2} = 3{,}8 \text{ cm}$

$a = \sqrt{1{,}56^2 + 3{,}8^2} = 4{,}1 \text{ cm}$

$A_t = A_{l\text{ ortoedro}} + A_{\text{base}} + A_{l\text{ pirámide}} = (2 \cdot 4 \cdot 1{,}95 + 2 \cdot 3{,}12 \cdot 1{,}95) + 4 \cdot 3{,}12 + 2 \cdot \dfrac{4 \cdot 4{,}1}{2} + 2 \cdot \dfrac{3{,}12 \cdot 4{,}29}{2} = 70{,}03 \text{ cm}^2$

$V = V_{\text{ortoedro}} + V_{\text{pirámide}} = 4 \cdot 1{,}95 \cdot 3{,}12 + \dfrac{4 \cdot 3{,}12 \cdot 3{,}8}{3} = 40{,}14 \text{ cm}^3$

44. La generatriz de un cono mide 10 dm y el ángulo que forma esta con la altura del cono es de 36º. Calcula:

a) El área total.

b) El volumen del cono.

Llamamos *r* al radio del cono y *h* a su altura.

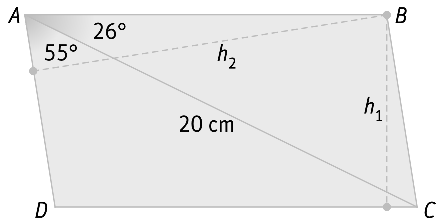
a) sen 36º = $\dfrac{r}{10} \Rightarrow r = 10 \cdot \text{sen } 36º = 5{,}88$ dm

$A_{\text{total}} = \pi \cdot 5{,}88^2 + \pi \cdot 5{,}88 \cdot 10 = 293{,}34 \text{ dm}^2$

b) cos 36º = $\dfrac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \cos 36º = 8{,}09$ dm

$V = \dfrac{\pi \cdot 5{,}88^2 \cdot 8{,}09}{3} = 292{,}91 \text{ cm}^3$

45. Calcula las dimensiones del paralelogramo y sus dos alturas h_1 y h_2.



$$\hat{D} = \hat{B} = \frac{360º - 2 \cdot (55º + 26º)}{2} = 99º$$

Aplicando el teorema del seno en el triángulo *ADC*:

$$\frac{20}{\text{sen } 99º} = \frac{\overline{CD}}{\text{sen } 55º} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{20 \cdot \text{sen } 55º}{\text{sen } 99º} = 16{,}59 \text{ cm} = \overline{AB} \text{ y } \frac{20}{\text{sen } 99º} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen } 26º} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{20 \cdot \text{sen } 26º}{\text{sen } 99º} = 8{,}88 \text{ cm} = \overline{BC}$$

Calculamos las alturas h_1 y h_2:

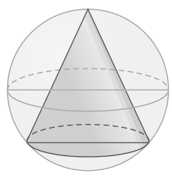
sen (55º + 26º) = $\dfrac{h_1}{8{,}88} \Rightarrow h_1 = 8{,}77$ y sen (55º + 26º) = $\dfrac{h_2}{16{,}59} \Rightarrow h_2 = 16{,}39$ cm

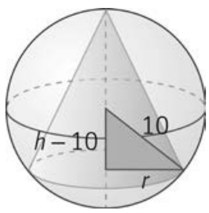
46. Junto a un compañero, encontrad una fórmula que proporcione el área de un polígono regular en función del número de lados, *n*, y la medida de su lado *a*. Aplícala para obtener las áreas de cuatro polígonos regulares.

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{n \cdot a \cdot \dfrac{a}{2\,\text{tg}\left(\dfrac{180º}{n}\right)}}{2} = \frac{na^2}{4\,\text{tg}\left(\dfrac{180º}{n}\right)}$$

Respuesta abierta.

47. En una esfera de 10 cm de radio se inscribe un cono, tal y como aparece en la figura. Halla el volumen del cono si el área de su base es de 50 cm².





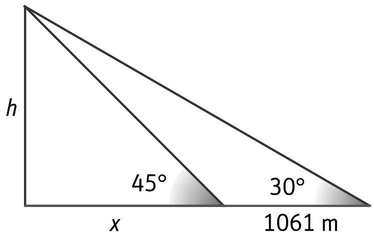
El área de la base del cono es $A_b = \pi \cdot r^2 \Rightarrow 50 = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = 3{,}99$ cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado:

$r^2 + (h - 10)^2 = 10^2 \Rightarrow (h - 10)^2 = 100 - r^2 \Rightarrow h = 10 + \sqrt{100 - r^2} = 19{,}17$ cm

El volumen del cono es $V = \dfrac{50 \cdot 19{,}17}{3} = 319{,}5 \text{ cm}^3$.

48. Desde un lugar situado cerca de una montaña se observa su cumbre con un ángulo de elevación de 45º. Si se retrocede 1061 metros, el ángulo es de 30º. Calcula la altura de la montaña.



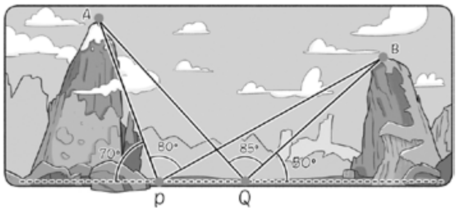
$$\text{tg}\,45^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\,\text{tg}\,45^\circ = x$$

$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{h}{x+1061} \Rightarrow h = \text{tg}\,30^\circ \cdot (x+1061) = 0{,}58x + 612{,}57$$

Igualando: $x = 0{,}58x + 612{,}57 \Rightarrow 0{,}42x = 612{,}57 \Rightarrow x = 1458{,}5$ m

49. Se quiere calcular la distancia que separa las cimas de dos montañas. Para ello, se fijan dos puntos *P* y *Q* distantes entre sí 50 m y que forman los ángulos que aparecen en la figura.

¿Cuál es la distancia entre las dos cimas?



Llamamos $x = \overline{PB}$, $y = \overline{AP}$ y $d = \overline{AB}$

Aplicando el teorema del seno en el triángulo *BPQ*:

$$\frac{x}{\text{sen}\,130^\circ} = \frac{50}{\text{sen}\,20^\circ} \Rightarrow x = \frac{50\cdot \text{sen}\,130^\circ}{\text{sen}\,20^\circ} = 111{,}99 \text{ m}$$

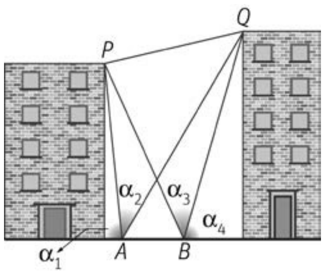
Aplicando el teorema del seno en el triángulo *APQ*:

$$\frac{y}{\text{sen}\,45^\circ} = \frac{50}{\text{sen}\,25^\circ} \Rightarrow y = \frac{50\cdot \text{sen}\,45^\circ}{\text{sen}\,25^\circ} = 83{,}66 \text{ m}$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo *PAB*:

$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 80^\circ = 111{,}99^2 + 83{,}66^2 - 2 \cdot 111{,}99 \cdot 83{,}66 \cdot \cos 80^\circ = 16\,286{,}91 \Rightarrow d = 127{,}62$ m

50. Calcula la distancia *PQ* sabiendo que:



$\overline{AB}$ = 16 m

α_1 = 84º 30´

α_2 = 36º

α_3 = 40º 30

α_4 = 76º

Llamamos $x = \overline{AQ}$, $y = \overline{AP}$ y $d = \overline{PQ}$

Aplicando el teorema del seno en el triángulo *QAB*:

$$\frac{x}{\text{sen}\,104^\circ} = \frac{16}{\text{sen}\,16^\circ 30'} \Rightarrow x = \frac{16\cdot \text{sen}\,104^\circ}{\text{sen}\,16^\circ 30'} = 54{,}66 \text{ m}$$

Aplicando el teorema del seno en el triángulo *APB*:

$$\frac{y}{\text{sen}\,63^\circ 30'} = \frac{16}{\text{sen}\,21^\circ} \Rightarrow y = \frac{16\cdot \text{sen}\,63^\circ 30'}{\text{sen}\,21^\circ} = 39{,}96 \text{ m}$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo *APQ*:

$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 36^\circ = 54{,}66^2 + 39{,}96^2 - 2 \cdot 54{,}66 \cdot 39{,}96 \cdot \cos 36^\circ = 1050{,}39 \Rightarrow d = 32{,}41$ m

51. Actividad resuelta.

52. Dos puntos *A* y *B* de la esfera terrestre están situados en un mismo paralelo de latitud 48º *N* y sus longitudes respectivas son de 160º *E* y 80º *E*. Calcula las distancias que los separan sobre el paralelo común y sobre el círculo máximo de la esfera que pasa por los dos puntos.

Radio de la Tierra: *R* = 6371 km.

Calculamos la medida en grados del arco *AB*: 160º – 80º = 80º

Hallamos el radio, *r*, del paralelo de la esfera terrestre de latitud 48º:

$r = 6371 \cdot \cos 48º = 4263{,}03$ km

La distancia de *A* a *B* sobre el arco que determinan estos dos puntos en el paralelo en el que están situados es:

$L = \dfrac{\pi \cdot 4263{,}03 \cdot 80º}{180º} = 5952{,}3127$ km

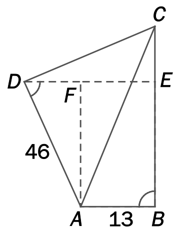
La distancia de *A* a *B* sobre el arco de circunferencia máxima que determinan estos dos puntos es:

$L = \dfrac{\pi \cdot 6371 \cdot 48º}{180º} = 5337{,}36$ km

53. En el cuadrilátero *ABCD*, el ángulo $\widehat{A}$ mide 120º; los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ son ángulos rectos, $\overline{AB} = 13$ y $\overline{AD} = 46$. La longitud *AC* es:

A. 60 **B. 62** **C. 64** **D. 65**

$\widehat{C} = 360º - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{D} = 360º - 120º - 90º - 90º = 60º$ y $\overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + 46^2$



Trazamos por *D* una paralela a *AB*. Se construye el triángulo rectángulo *DEC*.

$\widehat{EDC} = 180º - \widehat{E} - \widehat{C} = 180º - 90º - 60º = 30º \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{D} - \widehat{EDC} = 90º - 30º = 60º$

$\overline{DF} = 46 \cdot \cos \widehat{ADE} = 46 \cdot \cos 60º = 23 \Rightarrow \overline{DE} = \overline{DF} + \overline{FE} = \overline{DF} + \overline{AB} = 23 + 13 = 36$

$\cos \widehat{EDC} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{DC}} \Rightarrow \cos 30º = \dfrac{36}{\overline{DC}} \Rightarrow \overline{DC} = \dfrac{36}{\cos 30º} = 41{,}57$

Por tanto, $\overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + 46^2 = 41{,}57^2 + 46^2 = 3844{,}06 \Rightarrow \overline{AC} = 62$

La respuesta correcta es la B.

54. ¿Cuántos triángulos de área 10 tienen por vértices los puntos (5cos α, 5senα), (–5, 0) y (5, 0)?

A. 0 **B. 2** **C. 4** **D. 6**

Tomamos como base del triángulo el segmento de extremos (–5, 0) y (5, 0).

El área de este triángulo es $A = \dfrac{10 \cdot h}{2}$, donde *h* es la altura del triángulo.

Si *A* = 10, entonces $10 = \dfrac{10 \cdot h}{2} \Rightarrow h = 2$. Por tanto, la ordenada en el origen de la altura debe ser 2 o –2.

Luego 5sen α = 2 o 5sen α = –2.

Calculamos los ángulos α, 0º < α < 360º, tales que 5sen α = 2 o 5sen α = –2.

Si $5\,\text{sen}\,\alpha = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\,\dfrac{2}{5} = \begin{cases} 23{,}58º \\ 156{,}42º \end{cases}$

Si $5\,\text{sen}\,\alpha = -2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\left(-\dfrac{2}{5}\right) = \begin{cases} 156{,}42º \\ 336{,}42º \end{cases}$

Hay en total cuatro valores que cumplen que 5sen α = 2 o 5sen α = –2, con 0º < α < 360º.

La respuesta correcta es la C.

Encuentra el error

55. Los lados de un triángulo miden a = 12 cm, b = 15 cm y c = 25 cm. Calcula la medida del ángulo $\hat{A}$ y la medida del ángulo $\hat{C}$.

Aplicando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow 12^2 = 15^2 + 25^2 - 2\cdot 15\cdot 25\cos\hat{A} \Rightarrow 144 = 225 + 625 - 750\cos\hat{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 144 = 100\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{144}{100} = 1{,}44$$

Como el coseno ha salido mayor que 1, no se puede calcular $\hat{A}$ y, por tanto, los datos no se corresponden con ningún triángulo.

Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \Rightarrow 25^2 = 12^2 + 15^2 - 2\cdot 12\cdot 15\cos\hat{C} \Rightarrow 625 = 144 + 225 - 360\cos\hat{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 360\cos\hat{C} = -256 \Rightarrow \cos\hat{C} = -\frac{256}{360} < 0$$

Como el coseno ha salido negativo, no se puede calcular $\hat{C}$ y, por tanto, los datos no se corresponden con ningún triángulo.

¿Dónde está el error?

En la primera aplicación del teorema del coseno, el error está al resolver la ecuación:

$$144 = 225 + 625 - 750\cos\hat{A} \Rightarrow 144 - 225 - 625 = -750\cos\hat{A} \Rightarrow -706 = -750\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{706}{750} = 0{,}94$$

Por tanto, $\hat{A}$ = arccos 0,94 = 19º 56´ 54´´

En la segunda aplicación del teorema del coseno, el error está al decidir que no existen ángulos cuyo coseno sea negativo:

$$\cos\hat{C} = -\frac{256}{360} = -0{,}71 \Rightarrow \hat{C} = \arccos(-0{,}71) = 135º\ 14´\ 6´´$$

PONTE A PRUEBA

El cuadro

Actividad resuelta.

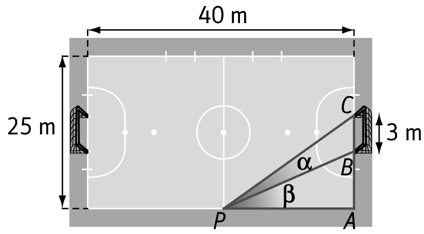
Tiro a gol

Olga entrena para la competición de fútbol femenino. El campo donde entrena es un rectángulo de dimensiones 40 m x 25 m y el ancho de la portería es de 3 m.

El entrenador le ha pedido que se coloque justo en *P*, que es el punto medio de la banda. Olga quiere saber qué ángulo α de tiro a gol tiene ese punto.

1. Busca dos triángulos rectángulos, en los que intervenga, de alguna forma, el ángulo α e indica el valor de sus catetos.

Se forman dos triángulos rectángulos, *PAB* y *PAC*, en los que de alguna forma interviene el ángulo α.



Triángulo *PAB*: *AP* = 20 m y *AB*: $\frac{25}{2}-\frac{3}{2}$ = 11 m

Triángulo *PAC*: *AP* = 20 m y *AC*: $\frac{25}{2}+\frac{3}{2}$ = 14 m

2. Con la ayuda de estos triángulos, calcula el valor de α como diferencia de dos ángulos agudos de ellos.

$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{14}{20} \Rightarrow \alpha + \beta = \text{arctg}\,\dfrac{14}{20} = 34^\circ\, 59'\, 31''$ y $\text{tg}\,\beta = \dfrac{11}{20} \Rightarrow \beta = \text{arctg}\,\dfrac{11}{20} = 28^\circ\, 48'\, 39''$

Entonces $\alpha = 34^\circ\, 59'\, 31'' - 28^\circ\, 48'\, 39'' = 6^\circ\, 10'\, 52''$

3. Si se coloca en otro punto *Q* situado a 10 m del córner, ¿tiene mayor o menor ángulo de tiro que en *P*?

Triángulo *QAB*: $AQ = 10$ m y *B*: $\dfrac{25}{2} - \dfrac{3}{2} = 11$ m Triángulo *QAC*: $AQ = 10$ m y *AC*: $\dfrac{25}{2} + \dfrac{3}{2} = 14$ m

$\text{tg}\left(\widehat{AQB} + \widehat{BQC}\right) = \dfrac{14}{10} \Rightarrow \widehat{AQB} + \widehat{BQC} = 54^\circ\, 27'\, 44''$ y $\text{tg}\,\widehat{AQB} = \dfrac{11}{10} \Rightarrow \widehat{AQB} = 47^\circ\, 43'\, 35''$

Entonces $\widehat{BQC} = 54^\circ\, 27'\, 44'' - 47^\circ\, 43'\, 35'' = 6^\circ\, 44'\, 9''$. El ángulo de tiro es mayor en *Q* que en *P*.

Las agujas del reloj

Las agujas del reloj de la estación de trenes miden 30 y 25 cm respectivamente. Se considera el triángulo que tiene los vértices en el centro del reloj y en los extremos las agujas.

1. Expresa el área del triángulo en función del ángulo α que forman las agujas.

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 25 \cdot 30 \cdot \text{sen}\,\alpha$

2. ¿Cuál es el área del triángulo a las 3 en punto? ¿Y a las 8 en punto?

A las 3 en punto forman un ángulo de 90º, $S = 375$ cm^2. Y a las 8 en punto un ángulo de 120º, $S = 325$ cm^2

3. ¿Cuál es el área a las 12 y media?

A las 12 y media no se forma un triángulo porque los extremos de las agujas y el centro del reloj están alineados.

4. Si a una hora entre las 12 y las 12:30 el área del triángulo es de 375 cm^2, ¿qué hora es?

Como $375 = \dfrac{1}{2} \cdot 25 \cdot 30 \cdot \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, hay que hallar la hora, entre las 12 y las 12:30, en la que las agujas del reloj formen un ángulo de 90º. En un minuto la aguja de las horas avanza 0,5º y, la de los minutos, 6º.

Supongamos que son las 12 h x min, con $0 < x < 30$. En este caso la manecilla de las horas habrá avanzado $0{,}5x^\circ$ y, la de los minutos, $6x^\circ$. Se plantea la ecuación $6x - 0{,}5x = 90$, cuya solución es $x = 16{,}36$. Por tanto, son las 12 h 16,36 minutos. Es decir, las 12 h 16 min 22 s.

La pirámide

La pirámide del Museo de Louvre, en París, tiene una base cuadrada de lado 35 m y caras laterales que son triángulos isósceles cuyo ángulos iguales miden 57,8º.

1. El tercer ángulo de cada cara lateral es…

A. 14,5º **B. 64,4º** **C. 72,2º** **D. 122,2º**

El tercer ángulo de cada cara lateral es de $180^\circ - 2 \cdot 57{,}8^\circ = 64{,}4^\circ$.

La respuesta correcta es la B.

2. ¿Cuánto mide la arista lateral?

A. 27,8 m **B. 32,8m** **C. 35m** **D. 37,3 m**

Llamamos *x* a la medida de la arista lateral.

$\cos 57{,}8^\circ = \dfrac{17{,}5}{x} \Rightarrow x = \dfrac{17{,}5}{\cos 57{,}8^\circ} = 32{,}84$ m

La respuesta correcta es la B.

3. Halla el área de cada cara lateral y del total de la pirámide.

Llamamos *a* a la apotema de la cara lateral: $a = \sqrt{32{,}84^2 - 17{,}5^2} = 27{,}79$ m

El área de una cara lateral será $A = \dfrac{35 \cdot 27{,}79}{2} = 486{,}33\ \text{m}^2$ y, el área lateral, $A_{\text{lateral}} = 4 \cdot 486{,}33 = 1945{,}32\ \text{m}^2$.

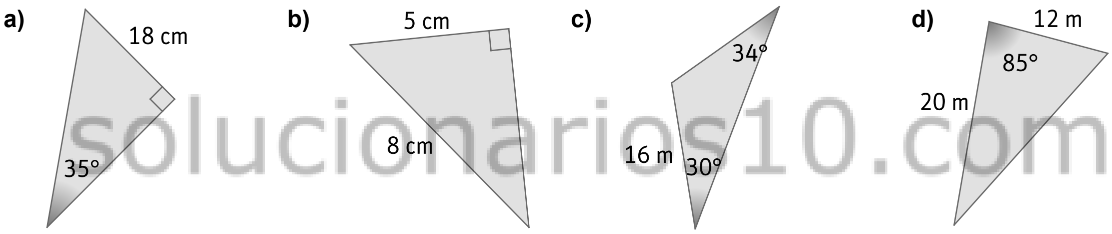
Entonces, $A_{total} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 1945{,}32 + 35^2 = 3170{,}32\ \text{m}^2$.

4. Calcula la altura y el volumen de la pirámide.

Llamamos *h* a la altura de la pirámide: $h = \sqrt{27{,}79^2 - 17{,}5^2} = 21{,}6\ \text{m} \Rightarrow V = \dfrac{35^2 \cdot 21{,}6}{3} = 8820\ \text{m}^3$

AUTOEVALUACIÓN

1. Resuelve los siguientes triángulos.



a) $\widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

$\text{sen } 35^\circ = \dfrac{18}{b} \Rightarrow b = \dfrac{18}{\text{sen } 35^\circ} = 31{,}38$ cm

$\text{tg } 35^\circ = \dfrac{18}{c} \Rightarrow c = \dfrac{18}{\text{tg } 35^\circ} = 25{,}71$ cm

b) $a = \sqrt{8^2 - 5^2} = 6{,}25$ cm

$\dfrac{8}{\text{sen } 90^\circ} = \dfrac{6{,}25}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{C} = 0{,}78 \Rightarrow \widehat{C} = 51{,}26^\circ$

$\widehat{A} = 180^\circ - 90^\circ - 51{,}26^\circ = 38{,}74^\circ$

c) $\widehat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 34^\circ = 116^\circ$

$\dfrac{16}{\text{sen } 34^\circ} = \dfrac{a}{\text{sen } 30^\circ} \Rightarrow a = \dfrac{16 \cdot \text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 34^\circ} = 14{,}31$ cm

$\dfrac{16}{\text{sen } 34^\circ} = \dfrac{c}{\text{sen } 116^\circ} \Rightarrow c = \dfrac{16 \cdot \text{sen } 116^\circ}{\text{sen } 34^\circ} = 25{,}72$ cm

d) $c^2 = 12^2 + 20^2 - 2 \cdot 12 \cdot 20 \cos 85^\circ = 502{,}17 \Rightarrow c = 22{,}41$

$\dfrac{22{,}41}{\text{sen } 85^\circ} = \dfrac{20}{\text{sen } \widehat{B}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = 0{,}889 \Rightarrow \widehat{B} = 62{,}75^\circ$

$\widehat{A} = 180^\circ - 85^\circ - 62{,}75^\circ = 32{,}25^\circ$

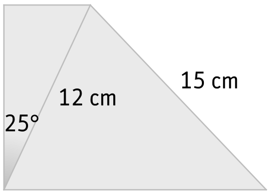
2. Calcula el área del triángulo de lados 15, 25 y 30 cm, respectivamente.

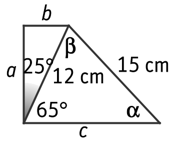
Llamando α al ángulo comprendido entre los lados de 25 y 30 cm, y aplicando el teorema del coseno:

$15^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0{,}867 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}867 = 29{,}89^\circ$

Por tanto, $A = \dfrac{1}{2} \cdot 25 \cdot 30 \cdot \text{sen } 29{,}89^\circ = 186{,}88\ \text{cm}^2$.

3. Halla la medida de los lados desconocidos de este trapecio rectángulo. Calcula el área del trapecio.





sen 25º = $\frac{b}{12}$ $\Rightarrow b = 12 \cdot \text{sen } 25º = 5{,}07$ cm y cos 25º = $\frac{a}{12}$ $\Rightarrow a = 12 \cdot \cos 25º = 10{,}88$ cm

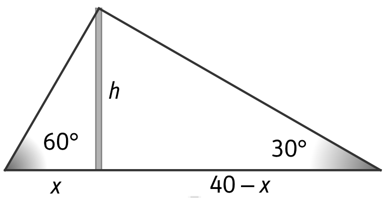
Aplicando el teorema del seno $\frac{12}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{15}{\text{sen}\,65º} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{12 \cdot \text{sen}\,65º}{15} = 0{,}725 \Rightarrow \alpha = \text{arsen } 0{,}725 = 46º\ 28'\ 8''$

$\beta = 180º - 65º - 46º\ 28'\ 8'' = 68º\ 31'\ 52''$

Aplicando el teorema del coseno: $c^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot \cos 68º\ 31'\ 52'' = 237{,}24 \Rightarrow c = 15{,}4$ cm

A = $\frac{(5{,}07 + 15{,}4) \cdot 10{,}88}{2} = 111{,}36\ \text{cm}^2$

4. Para que una antena permanezca vertical se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base. La distancia entre los anclajes es de 40 m y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30º y 60º, respectivamente. Halla la altura de la antena.

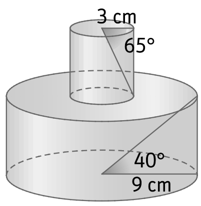


tg 60º = $\frac{h}{x}$ $\Rightarrow h = x \cdot \text{tg } 60º = 1{,}732x$

tg 30º = $\frac{h}{40 - x}$ $\Rightarrow h = (40 - x) \cdot \text{tg } 30º = 23{,}08 - 0{,}577x$

Igualando: $1{,}732x = 23{,}08 - 0{,}577x \Rightarrow x = 10$ m $\Rightarrow h = 17{,}32$ m

5. Calcula el área y el volumen del cuerpo geométrico.



Llamamos h a la altura del cilindro inferior y x a la del superior.

tg 40º = $\frac{h}{9} \Rightarrow h = 9 \cdot \text{tg } 40º = 7{,}55$ cm y tg 65º = $\frac{x}{3} \Rightarrow x = 3 \cdot \text{tg } 65º = 6{,}43$ cm

$A_{\text{total}} = A_{\text{cilindro inferiror}} + A_{\text{lateral cilindro superior}} = 2 \cdot \pi \cdot 9^2 + 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 7{,}55 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6{,}43 = 1057{,}08\ \text{cm}^2$

$V = V_{\text{cilindro inferiror}} + V_{\text{cilindro superior}} = \pi \cdot 9^2 \cdot 7{,}55 + \pi \cdot 3^2 \cdot 6{,}43 = 2103{,}04\ \text{cm}^3$

6. La luna tiene una superficie de 38 000 000 km² y se encuentra a 380 000 km de la Tierra. ¿Qué ángulo ocupa en el cielo?

Llamamos r al radio de la luna: $38\,000\,000 = 4\pi r^2 \Rightarrow r = 1739$ km

Llamando α al ángulo que ocupa la luna en el cielo, y aplicando el teorema del coseno:

$3478^2 = 380\,000^2 + 380\,000^2 - 2 \cdot 380\,000^2 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}999\,958 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } 0{,}999\,958 = 31'\ 30''$