

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Escribe estos enunciados en forma de una ecuación con dos incógnitas.

- a) Un número más el doble de otro es 12.
- b) La diferencia de dos números es 25.
- c) Un número excede a otro en 40.
- d) La mitad de la suma de dos números es 15.

a) $x + 2y = 12$

b) $x - y = 25$

c) $x - y = 40$

d) $\frac{x + y}{2} = 15$

5.2 El triple de la suma de dos números es 18. Escribe la ecuación correspondiente y calcula al menos tres posibles soluciones.

La ecuación del problema es: $(3x + y) = 18$.

Si $x = 1 \Rightarrow 3(1 + y) = 18 \Rightarrow 1 + y = 6 \Rightarrow y = 5$

Si $x = 2 \Rightarrow 3(2 + y) = 18 \Rightarrow 2 + y = 6 \Rightarrow y = 4$

Si $x = 3 \Rightarrow 3(3 + y) = 18 \Rightarrow 3 + y = 6 \Rightarrow y = 3$

5.3 La diferencia de dos números naturales es 5 y ambos son menores que 12. ¿Qué números pueden ser? Escribe las posibles soluciones en una tabla.

x e y son dos números naturales y las condiciones son: $x - y = 5$ y $x < 12$.

Las soluciones son:

x	11	10	9	8	7	6
y	6	5	4	3	2	1

5.4 La suma de las edades de dos hermanos es 12 y el doble de la edad de uno menos la del otro es 3. Plantea el sistema de ecuaciones y comprueba si alguna de estas parejas es solución del sistema.

$$x = 6, y = 6; x = 5, y = 9; x = 5, y = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right\} \text{La solución correcta es } x = 5, y = 7.$$

5.5 Indica de qué tipo son estos sistemas según el número de soluciones que tienen.

a)
$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x + 9 = 6y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Se comparan los coeficientes de las variables y los términos independientes.

a) $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{-3}{-9} \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado porque tiene infinitas soluciones.

b) $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow$ El sistema es compatible determinado porque tiene una única solución.

5.6 Explica las transformaciones que se han hecho en las siguientes ecuaciones para pasar de un sistema a otro. ¿Son sistemas equivalentes?

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 26 \\ 9x - 6y = 0 \end{cases}$$

Utiliza la regla de la suma para resolver el sistema.

La primera ecuación se multiplica por 2, y la segunda, por 3.

Estas ecuaciones son equivalentes a las anteriores, puesto que si multiplicamos toda la ecuación por un mismo número, resulta una ecuación equivalente a la dada.

Resolución del sistema:

Se suma 2y a la segunda ecuación: $3x - 2y + 2y = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3}y$

Se sustituye en la primera ecuación: $2 \cdot \frac{2}{3}y + 3y = 13 \Rightarrow y = 3$

Se sustituye el valor calculado en la segunda ecuación: $3x - 2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow x = 2$

5.7 Resuelve los siguientes sistemas sumando o restando ecuaciones.

a)
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$$

a) Se suman las dos ecuaciones: $2x = 8 \Rightarrow x = 4$.

Si se sustituye en la primera ecuación: $y = -2$.

b) Se restan las dos ecuaciones: $-2x = 6 \Rightarrow x = -3$.

Si se sustituye en la primera ecuación: $y = -\frac{19}{3}$.

5.8 Escribe un sistema equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 25 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$$

Se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por 2.

$$\begin{cases} 15x - 10y = 125 \\ 2x + 10y = 20 \end{cases}$$

5.9 Resuelve los siguientes sistemas lineales por los tres métodos algebraicos estudiados.

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{2y}{3} = 5 \\ \frac{x}{2} + y = 5 \end{cases}$

a) Método de reducción: $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 6 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}$

Método de igualación: $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2+y}{4} \\ x = 7-3y \end{cases} \Rightarrow \frac{2+y}{4} = 7-3y \Rightarrow 2+y = 28-12y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{1}$

Método de sustitución: $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (4x - 2) \\ x + 3(4x - 2) = 7 \end{cases} \Rightarrow 13x = 13 \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}$

b) Método de reducción: $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20x + 5y = +40 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 4 \end{matrix}$

Método de igualación: $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-8+y}{4} \\ x = -21+5y \end{cases} \Rightarrow \frac{-8+y}{4} = -21+5y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{4}{-1}$

Método de sustitución: $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 8 \\ x - 5(4x + 8) = -21 \end{cases} \Rightarrow -19x = 19 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 4 \end{matrix}$

c) Método de reducción: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = -1 \end{matrix}$

Método de igualación: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+y}{2} \\ x = \frac{5-3y}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{5+y}{2} = \frac{5-3y}{4} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-1}{2}$

Método de sustitución: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x + 3(2x - 5) = 5 \end{cases} \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = -1 \end{matrix}$

d) Método de reducción: $\begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{2y}{3} = 5 \\ \frac{x}{2} + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 8y = 60 \\ -4x - 8y = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 3 \end{matrix}$

Método de igualación: $\begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{2y}{3} = 5 \\ \frac{x}{2} + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{60-8y}{9} \\ x = 10-2y \end{cases} \Rightarrow \frac{60-8y}{9} = 10-2y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$

Método de sustitución: $\begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{2y}{3} = 5 \\ \frac{x}{2} + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{60-9x}{8} \\ x + 2\left(\frac{60-9x}{8}\right) = 10 \end{cases} \Rightarrow -5x = -20 \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 3 \end{matrix}$

5.10 Escribe las ecuaciones de los siguientes sistemas de modo que puedas aplicar el método que consideres más conveniente para resolverlos.

a) $\begin{cases} 2(2x - 1) + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2(x - 3) + 4(-3y + 1) = 14 \\ 4(-2x + 1) - (y + 4) = 16 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - 2 + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 18x - 3y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 22x = 22 \Rightarrow x = 1 \\ -y = 7 - 6 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2(x - 3) + 4(-3y + 1) = 14 \\ 4(-2x + 1) - (y + 4) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 12y = 4 \\ -8x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x - 48y = 16 \\ -8x - y = 16 \\ \hline -47y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

5.11 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y después comprueba la solución.

a) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$

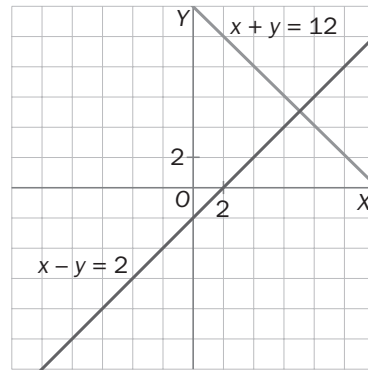
Se hace una tabla de valores para cada ecuación y se representan en un eje de coordenadas.

a) $y = 12 - x$

$y = x - 2$

x	y
12	0
0	12
6	6
7	5

x	y
0	-2
2	0
6	4
7	5

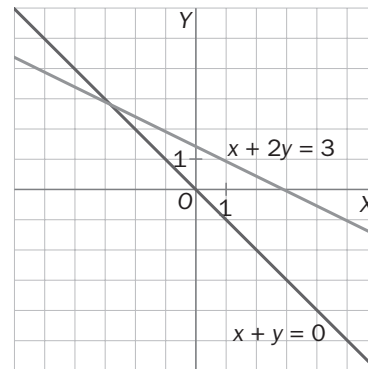


b) $y = \frac{x - 3}{2}$

$y = -x$

x	y
3	0
-3	3
1	1

x	y
3	-3
-3	3
-1	1



5.12 Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles, y compruébalo después representando gráficamente cada uno.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}$

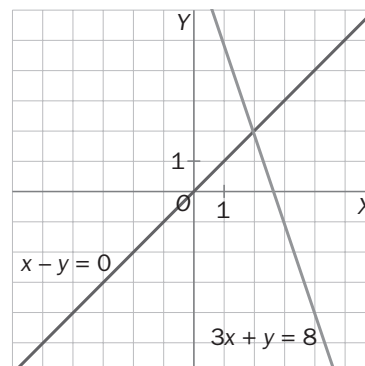
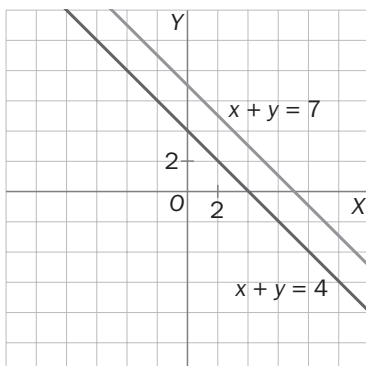
b) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - y = 0 \end{cases}$

a) Es un sistema incompatible,

ya que $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{4}{7}$.

b) Es un sistema compatible determinado,

ya que $\frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{8}{0}$.



5.13 Señala de qué tipo son las ecuaciones que forman los siguientes sistemas y resuélvelos.

$$a) \begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 8x = y^2 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

a) La primera ecuación es de segundo grado y la segunda es de primer grado.

$$\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow 4y^2 + 2y^2 = 6 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} x = 2, & y = -1 \\ x = -2, & y = 1 \end{matrix}$$

b) La primera ecuación es de segundo grado y la segunda es de primer grado.

$$\begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-x + 1)^2 - 2x^2 + x = 6 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x = -5 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = -1$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = -1, \text{ y si } x = -1 \Rightarrow y = -3$$

c) La primera ecuación es de segundo grado y la segunda es de primer grado.

$$\begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 2x + 1)^2 - x(2x - 1) = 6 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-x + 1)^2 - 2x^2 + x = 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + x = 6 \end{matrix}$$

$$x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

No tiene solución.

d) La primera ecuación es de segundo grado y la segunda es de primer grado.

$$\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x(1 - 3x) = 5 \\ y = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = -4$$

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow y = -14, \text{ y si } x = -4 \Rightarrow y = 13$$

5.14 Señala de qué tipo son las dos ecuaciones que forman el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Resuelve el sistema por reducción y comprueba la validez de las soluciones obtenidas.

Las dos ecuaciones que forman el sistema son de segundo grado.

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \end{matrix}$$

5.15 Marta y Anka leyeron el año pasado 20 libros entre las dos. Si Anka leyó el triple de obras que Marta, ¿cuántos libros leyó cada una?

Libros leídos por Marta: x

Libros leídos por Anka: y

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x = y \end{cases} \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5. \text{ Por tanto, Marta leyó 5 libros, y Anka, 15.}$$

5.16 La suma de las superficies de dos salas cuadradas del Museo de Cera es de 1300 m², y su diferencia es de 500 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?

Dimensiones de las salas: x, y

$$\text{Sistema de ecuaciones: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ x^2 - y^2 = 500 \end{cases}$$

Se suman las ecuaciones: $2x^2 = 1800 \Rightarrow \text{Área de una sala: } x^2 = 900 \Rightarrow \text{Medida del lado: } x = 30 \text{ m}$

Se restan las ecuaciones: $2y^2 = 800 \Rightarrow \text{Área de la otra sala: } y^2 = 400 \Rightarrow \text{Medida del lado: } y = 20 \text{ m}$

5.17 Un hotel tiene habitaciones sencillas y dobles. En total tiene 100 habitaciones y 174 camas.

¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

Se designan por d las habitaciones dobles y por s las habitaciones sencillas.

Sistema de ecuaciones: $d + s = 100 \Rightarrow 2d + s = 174$

Solución del sistema: 26 habitaciones simples y 74 habitaciones dobles

5.18 En el centro de la plaza de un pueblo han formado con baldosas un rombo de 42 m² de superficie. Calcula la medida de sus diagonales si sabemos que suman 20 metros.

Se llama D a la diagonal mayor y d a la diagonal menor.

Para calcular el área de un rombo se halla la mitad del producto de las dos diagonales.

$$\begin{cases} 42 = \frac{D \cdot d}{2} \\ D + d = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 84 = D \cdot d \\ D = 20 - d \end{cases} \Rightarrow 84 = (20 - d) \cdot d \Rightarrow d = 14 \text{ y } d = 6$$

El valor de la diagonal menor es $d = 6$, y $D = 14$.

El valor $d = 14$ no es válido.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.19 Los grupos de 4.º A y 4.º B van a ir de excursión en dos autobuses diferentes. Si en el del A suben 3 alumnos del B, los dos autocares llevarán el mismo número de estudiantes. En cambio, si seis alumnos de 4.º A suben al autocar de 4.º B, este tendrá el doble de estudiantes que el otro. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

Se designa con x al número de alumnos de 4.º A e y al número de alumnos de 4.º B.

$$\begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ 2(x - 6) = y + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ 2x - 12 = y + 6 \end{cases} \Rightarrow 2x - 12 = x + 6 + 6 \Rightarrow x = 24 \text{ e } y = 30$$

En el grupo de 4.º A hay 24 alumnos, y en el de 4.º B, 30.

5.20 Laura ha ido al quiosco y, para pagar, solo lleva monedas de uno y cinco céntimos.

a) El periódico cuesta 1 euro, y ella ha reunido el importe exacto con 32 monedas. ¿Cuántas ha entregado de cada tipo?

Se llama x al número de monedas de 1 céntimo e y al número de monedas de 5 céntimos.

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 5 \cdot y = 100 \\ x + y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 - y + 5y = 100 \\ x = 32 - y \end{cases} \Rightarrow y = 17 \text{ y } x = 15$$

Laura ha entregado 17 monedas de 5 céntimos y 15 monedas de 1 céntimo.

b) ¿Podría pagar también una revista que cuesta 1,20 euros con 32 monedas?

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 5 \cdot y = 120 \\ x + y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 - y + 5y = 120 \\ x = 32 - y \end{cases} \Rightarrow y = 22 \text{ y } x = 10$$

Sí podría pagarla, con 22 monedas de 5 céntimos y 10 monedas de 1 céntimo.

5.27 Dadas las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 5y = -13$

b) $-3x + 2y = 8$

Forma la tabla de valores asociada a cada una y encuentra alguna solución común a ambas ecuaciones.

La tabla asociada a la ecuación $4x - 5y = -13$ es:

x	y
-2	1
3	5

La tabla asociada a la ecuación $-3x + 2y = 8$ es:

x	y
-2	1
0	4

La solución del sistema es: $x = -2; y = 1$.

Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales

5.28 Indica, sin resolverlos, el número de soluciones de los siguientes sistemas y clasifícalos.

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ -3x + 7y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ -3x + 15y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -6x + 2y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{5}{6}x - y = 7 \\ -\frac{5}{3}x + 2y = -2 \end{cases}$

a) $\frac{5}{-3} \neq \frac{-4}{7} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

b) $\frac{1}{-3} = \frac{-5}{15} = \frac{-4}{12} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

c) $\frac{-6}{3} = \frac{2}{-1} \neq \frac{5}{4} \Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $\frac{\frac{5}{6}}{-5} = \frac{-1}{2} \neq \frac{7}{-2} \Rightarrow$ Sistema incompatible

5.29 Halla la solución de los siguientes sistemas lineales por el método de sustitución despejando la incógnita cuyo coeficiente es 1.

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(7 - 3y) - y = 2 \\ x = 7 - 3y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x + 3(2x - 5) = 5 \end{cases}$

$28 - 12y - y = 2$

$4x + 6x - 15 = 5$

Solución: $y = 2$

Solución: $x = 2$

$x = 1$

$y = -1$

5.30 Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de igualación.

a) $\begin{cases} x - 5y = -8 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 5y = -8 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 + 5y \\ x = -3y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + 4y}{3} \\ x = \frac{9 + 2y}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow -8 + 5y = -3y$

$\Rightarrow \frac{-5 + 4y}{3} = \frac{9 + 2y}{5} \Rightarrow -25 + 20y = 27 + 6$

$\Rightarrow y = 1$ y $x = -3$

$\Rightarrow y = -2$ y $x = 1$

5.31 Resuelve estos sistemas de ecuaciones utilizando el método de reducción.

$$a) \begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow -9y = -6 \\ \Rightarrow y = \frac{2}{3} \text{ y } x = \frac{11}{9}$$

$$b) \begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 10x + 6y = -2 \end{cases} \\ \Rightarrow 18x = -36 \\ \Rightarrow y = -2 \text{ y } x = 3$$

5.32 Escribe las ecuaciones de los siguientes sistemas en la forma $ax + by = c$ y resuélvelos por el método que consideres más conveniente en cada caso.

$$a) \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ -\frac{x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ -\frac{x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 10y = 90 \\ -3x + 25y = -180 \\ +15y = -90 \end{cases} \\ \Rightarrow y = -6 \\ x = 10$$

$$c) \begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = -2 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} -12x - 8y = -4 \\ 12x - 18y = 30 \\ -26y = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 8x + 15y = 100 \end{cases} \\ \Rightarrow 8(y + 1) + 15y = 100 \Rightarrow 23y = 92 \\ y = 4 \text{ y } x = 5$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 24 \\ 4x = 24 \end{cases} \\ x = 6 \text{ e } y = 4$$

5.33 Resuelve los siguientes sistemas y señala cuáles son equivalentes.

$$a) \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 7x + y = 5 \\ -x + 5y = -11 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -x + 3y = -7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 4y = 9 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 10 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \\ 10x = 10 \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -2$$

$$c) \begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -x + 3y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -5x + 15y = -35 \end{cases} \\ 17y = -34 \Rightarrow y = -2 \text{ y } x = 1$$

$$b) \begin{cases} 7x + y = 5 \\ -x + 5y = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + y = 5 \\ -7x + 35y = -77 \end{cases} \\ 36y = -72 \Rightarrow y = -2 \text{ y } x = 1$$

$$d) \begin{cases} x + 4y = 9 \\ -3x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 12y = 27 \\ -3x + y = -1 \end{cases} \\ 13y = 26 \Rightarrow y = 2 \text{ y } x = 1$$

a, b y c son equivalentes por tener la misma solución.

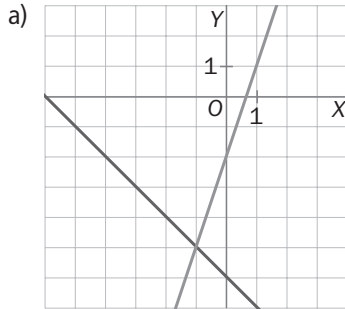
Resolución gráfica de sistemas

5.34 Cada una de estas tablas está asociada a una ecuación.

x	1	2
y	1	4

x	-3	-4
y	-3	-2

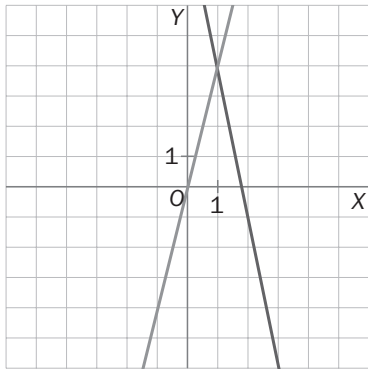
- a) Representa los valores de ambas en los mismos ejes de coordenadas para obtener las rectas correspondientes a cada una.
 b) Averigua la solución del sistema a partir de la representación gráfica.



- b) La solución es el punto donde se intersecan las dos rectas, es decir: $x = -1$, $y = -5$.

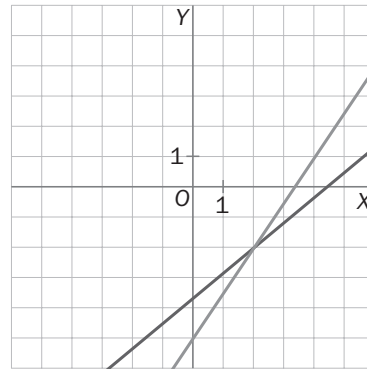
5.35 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 5x + y = 9 \end{cases}$$



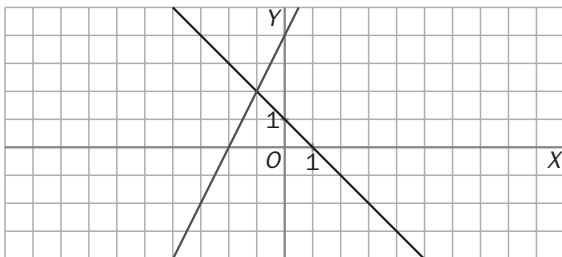
La solución es: $x = 1$, $y = 4$.

b)
$$\begin{cases} -3x + 2y = -10 \\ 5x - 6y = 22 \end{cases}$$



La solución es: $x = 2$, $y = -2$.

5.36 Escribe el sistema de ecuaciones correspondiente a la siguiente representación gráfica e indica su solución.



La ecuación explícita de una recta es: $y = mx + n$.

La primera recta pasa por los puntos:

$$\begin{aligned} (1, 0) &\rightarrow 0 = m + n \\ (0, 1) &\rightarrow 1 = n \end{aligned} \Rightarrow m = -n = -1 \Rightarrow y = -x + 1$$

La segunda recta pasa por los puntos:

$$\begin{aligned} (-2, 0) &\rightarrow 0 = -2m + n \\ (0, 4) &\rightarrow 4 = n \end{aligned} \Rightarrow -2m = -n = -4 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 2x + 4$$

Por tanto, el sistema buscado es:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

5.37 Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles, y compruébalo después representando gráficamente cada uno.

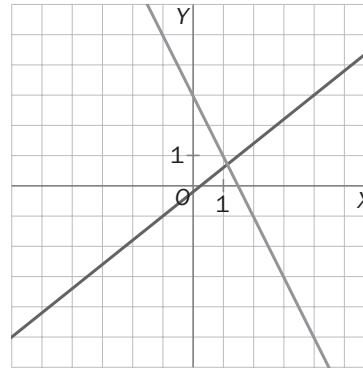
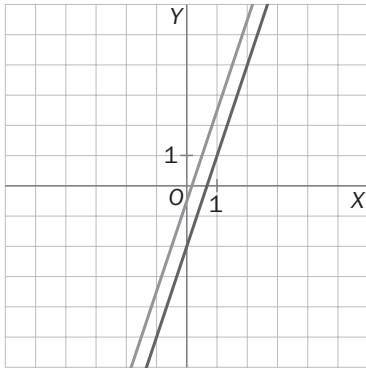
a)
$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Para ello hemos de buscar si existe proporcionalidad entre los coeficientes y los términos independientes de las ecuaciones de los sistemas:

a) $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow$ Sistema incompatible

b) $\frac{4}{2} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado



Sistemas de ecuaciones de segundo grado

5.38 Señala de qué tipo es cada una de las ecuaciones de los siguientes sistemas y resuélvelos por sustitución.

a)
$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy = 11 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

a) La primera ecuación es de 2.º grado, y la segunda es lineal o de 1.º grado.

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy = 11 \\ 5x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4xy = 11 \\ y = 7 - 5x \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 4x(7 - 5x) = 11 \Rightarrow -17x^2 + 28x - 11 = 0$$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = \frac{11}{17}$ $x_2 = 1$

$$y_1 = \frac{64}{17} \quad y_2 = 2$$

b) La primera ecuación es de 2.º grado, y la segunda es lineal o de 1.º grado:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ y = 5 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 - x(5 - x) + (5 - x)^2 = 7 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = 3$ $x_2 = 2$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = 3$$

5.39 Resuelve los siguientes sistemas de primero y segundo grado por sustitución.

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - 7y = 500 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - 7y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = 500 + 7y \end{cases} \Rightarrow (500 + 7y)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 - 140y + 4998 = 0$

\Rightarrow No tiene solución real.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 52 \\ y = 8 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 + (8 - x)^2 + x(8 - x) = 52 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = 6$ $x_2 = 2$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = 6$$

5.40 Escribe el sistema de ecuaciones asociado a cada una de las siguientes situaciones.

- a) La suma de dos números es 14 y la suma de los cuadrados de esos números es 100.
 b) Dos números cuyo producto es 12 y la suma de sus cuadrados es 25.
 c) Dos números cuya suma es 18, y la de sus inversos, $\frac{9}{40}$.

$$a) \begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 18 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{40} \end{cases}$$

5.41 Resuelve los sistemas de ecuaciones planteados en la actividad anterior y comprueba que las soluciones cumplen las condiciones del enunciado.

$$a) \begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - x \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (14 - x)^2 = 100 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = 8$ $x_2 = 6$
 $y_1 = 6$ $y_2 = 8$

Se comprueba: $6 + 8 = 14$, y $6^2 + 8^2 = 100$.

$$b) \begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{144}{x^2} = 25 \Rightarrow x^4 + 25x^2 + 144 = 0$$

Se hace el cambio de variable $x^2 = t \Rightarrow t^2 + 25t + 144 = 0 \Rightarrow t_1 = 16$, y $t_2 = 9$

Se deshace el cambio de variable $t_1 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

$$t_2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Se sustituye en $y = \frac{12}{x}$. Las soluciones son: $x_1 = 4$ $x_2 = -4$ $x_3 = 3$ $x_4 = -3$
 $y_1 = 3$ $y_2 = -3$ $y_3 = 4$ $y_4 = -4$

Se comprueba: $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$.

$$c) \begin{cases} x + y = 18 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{40} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 - x \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{40} \end{cases} \Rightarrow 40(18 - x) + 40x = 9x(18 - x) \Rightarrow x^2 - 18x + 80 = 0$$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado y sus dos soluciones son: $x_1 = 8$ $x_2 = 10$
 $y_1 = 10$ $y_2 = 8$

Se comprueba: $8 + 10 = 18$, y $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{5 + 4}{40} = \frac{9}{40}$.

5.42 Indica si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a) $-3x + y = 5$ es equivalente a $6x - 2y = -10$.

b) El sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones.

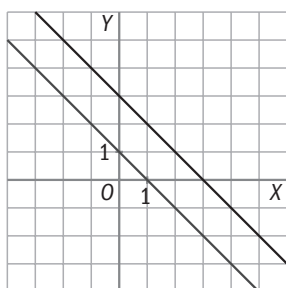
c) En la representación gráfica del sistema $\begin{cases} -x + 5y = -4 \\ 3x - 15y = 12 \end{cases}$ tan solo aparece una recta.

a) Verdadera, ya que si multiplicamos por -2 la ecuación $-3x + y = 5$, obtenemos la ecuación $6x - 2y = -10$.

b) Falsa, ya que $\frac{2}{5} = \frac{5}{5} \neq \frac{1}{2}$ implica que el sistema es incompatible y, por tanto, no tiene solución.

c) Verdadera, ya que la 2.ª ecuación del sistema se obtiene multiplicando por -3 la 1.ª ecuación, y, por tanto, ambas ecuaciones son equivalentes.

5.43 Observa las dos rectas correspondientes a un sistema de ecuaciones. ¿Cómo han de ser los coeficientes de las incógnitas en ambas ecuaciones?



Si las ecuaciones de ambas rectas son $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, se ha de verificar que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ para que las rectas sean paralelas como en el dibujo.

5.44 Dado el sistema: $\begin{cases} ax + 4y = 7 \\ x + ay = 5 \end{cases}$

Calcula un valor de a para que el sistema:

a) No tenga solución.

b) Disponga de infinitas soluciones.

c) Tenga una solución.

a) $\frac{a}{1} = \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$. Si $a = -2$ y $a = 2$, el sistema es incompatible y, por tanto, no tiene solución.

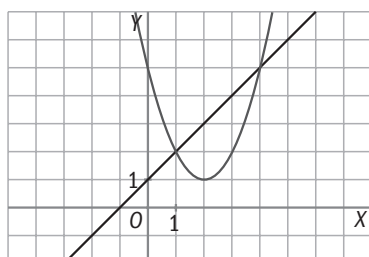
b) $\frac{a}{1} = \frac{4}{a} = \frac{7}{5}$. Por el apartado a es imposible que se verifique la igualdad anterior, y, por tanto, no existe valor de a para el cual el sistema tenga infinitas soluciones.

c) $\frac{a}{1} \neq \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 \neq 4 \Rightarrow a \neq \pm 2$. Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$, entonces el sistema tiene una única solución.

5.45 Las dos gráficas siguientes representan las ecuaciones de un sistema.

a) ¿Es un sistema de primero o de segundo grado? Razona tu respuesta.

b) ¿Cuáles son las soluciones del sistema?



a) Es un sistema de segundo grado, ya que en la gráfica aparece representada una parábola.

b) Las soluciones del sistema son los puntos en los que se cruzan las dos funciones representadas: $P_1 = (1, 2)$, y $P_2 = (4, 5)$.

- 5.46 Pedro y María van todos los miércoles de compras al mercadillo. Los dos han comprado en el mismo puesto. María ha adquirido 2 camisetas y un pantalón por un total de 22 euros, y Pedro ha pagado 39 euros por 3 camisetas y 2 pantalones. ¿Cuál es el precio de cada camiseta y de cada pantalón?

$x \equiv$ precio de una camiseta

$y \equiv$ precio de un pantalón

$$\begin{cases} 2x + y = 22 \\ 3x + 2y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -44 \\ 3x + 2y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -5 \rightarrow x = 5 \\ 3x + 2y = 39 \rightarrow 3 \cdot 5 + 2y = 39 \rightarrow 2y = 24 \rightarrow y = \frac{24}{2} = 12 \end{cases}$$

El precio de cada camiseta es de 5 €, y el de cada pantalón, de 12 €.

- 5.47 Un examen final consta de 20 preguntas de elección múltiple. Cada respuesta correcta es puntuada con 3 puntos, y se resta un punto por cada una incorrecta.

Un alumno ha respondido a todas las preguntas y ha obtenido 36 puntos. ¿Cuántas preguntas respondió de manera correcta y cuántas de forma errónea?

$x \equiv$ n.º de respuestas correctas

$y \equiv$ n.º de respuestas incorrectas

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x - y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \rightarrow 14 + y = 20 \rightarrow y = 20 - 14 = 6 \\ 4x = 56 \rightarrow x = \frac{56}{4} = 14 \end{cases}$$

Respondió 14 preguntas de manera correcta y 6 de manera incorrecta.

- 5.48 Laura se ha fijado en las señales de tráfico que hay en el camino que va desde su casa hasta el polideportivo. Ha comprobado que todas tienen forma de triángulo o cuadrilátero. Si en total hay 9 señales y entre todas reúnen 32 ángulos, ¿cuántas hay de cada tipo?

$x \equiv$ n.º de triángulos

$y \equiv$ n.º de cuadriláteros

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 3x + 4y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -27 \\ 3x + 4y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 3x + 4y = 32 \rightarrow 3x + 20 = 32 \rightarrow x = \frac{12}{3} = 4 \end{cases}$$

Hay 4 triángulos y 5 cuadriláteros.

- 5.49



$x \equiv$ número de euros de la chica

$y \equiv$ número de euros del chico

$$\begin{cases} 3(x - 5) = y + 5 \\ x + 6 = y - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 20 \\ x - y = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 20 \rightarrow 48 - y = 20 \rightarrow y = 28 \\ 2x = 32 \rightarrow x = 16 \end{cases}$$

La chica tiene 16 euros, y el chico, 28.

- 5.50 Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 euros el kilogramo, con pasta de mayor calidad, de 0,40 euros el kilogramo, para conseguir 50 kilogramos de pasta de 0,31 euros el kilogramo.

¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?

$x \equiv$ n.º de kg de papel de baja calidad

$y \equiv$ n.º de kg de papel de mayor calidad

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0,25x + 0,4y = 0,31 \cdot 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 25x + 40y = 1550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25x - 25y = -1250 \\ 25x + 40y = 1550 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 15y = 300 \rightarrow y = \frac{300}{15} = 20 \\ 25x + 40y = 1550 \rightarrow 25x + 800 = 1550 \rightarrow 25x = 750 \rightarrow x = 30 \end{cases}$$

Utiliza 30 kg de papel de baja calidad y 20 kg del de mayor calidad.

- 5.51 Utilizando la regla de la división, averigua el dividendo y el divisor de la misma sabiendo que el cociente es 2; el resto, 7, y que el producto de ambos es igual a 490.

$$\left. \begin{array}{l} D = 2d + 7 \\ D \cdot d = 490 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (2d + 7)d = 490 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 490 = 0 \\ d = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 490}}{4} = \begin{cases} 14 \\ -17,5 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d = 14 \\ D = 35 \end{array} \right\}$$

El resultado $d = -17,5$ no es entero, por eso no lo consideramos.

- 5.52 Si el largo de un rectángulo fuese 4 centímetros más corto, y el ancho, 3 centímetros más largo, la figura obtenida sería un cuadrado cuya área sería igual que la del rectángulo inicial. ¿Qué área tendría el cuadrado?

$x \equiv$ longitud del largo del rectángulo

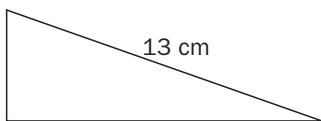
$y \equiv$ longitud del ancho del rectángulo

$$\begin{cases} x - 4 = y + 3 \\ xy = (x - 4)(y + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ xy = xy + 3x - 4y - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = -21 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -9 \rightarrow y = 9 \\ 3x - 4y = 12 \rightarrow 3x - 36 = 12 \rightarrow 3x = 48 \rightarrow x = 16 \end{cases}$$

El área del cuadrado es: $(x - 4)(y + 3) = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$.

- 5.53 La profesora de Tecnología quiere partir un listón de madera de 24 centímetros de longitud en tres trozos para construir una escuadra, de manera que el trozo de mayor longitud mida 13 centímetros.

¿Cuál es la longitud de los otros trozos?



Por el teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 169$

$$\begin{cases} x + y + 13 = 24 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 - x \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (11 - x)^2 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 121 + x^2 - 22x = 169 \Rightarrow x^2 - 11x - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{11 + 5}{2} = 8 \rightarrow y_1 = 11 - 8 = 3 \\ x_2 = \frac{11 - 5}{2} = 3 \rightarrow y_2 = 11 - 3 = 8 \end{cases}$$

Las longitudes de los trozos han de ser 3 y 8 cm.

5.54



x = edad actual del nieto

y = edad del nieto hace tres años

$$\begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = y \end{cases} \Rightarrow x + 3 = (x - 3)^2 \Rightarrow x + 3 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

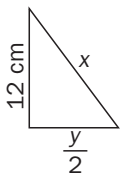
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 6, \text{ y } x_2 = 1 \text{ (no válida)}$$

La edad actual del nieto es de 6 años.

5.55 De un triángulo isósceles sabemos que su perímetro es 36 centímetros y que la altura asociada al lado desigual mide 12 centímetros. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

x = longitud de los lados iguales, e y = longitud del lado desigual



Por el teorema de Pitágoras: $12^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 576$

$$\begin{cases} 2x + y = 36 \\ 4x^2 - y^2 = 576 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 - 2x \\ 4x^2 - y^2 = 576 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - 1296 - 4x^2 + 144x = 576$$

$$144x = 1872 \Rightarrow x = 13 \quad \text{e} \quad y = 36 - 2 \cdot 13 = 10$$

Los dos lados iguales miden 13 cm, y el lado desigual, 10 cm.

5.56 Una agricultora quiere comprobar cuál es el número de hectáreas de superficie que posee su terreno rectangular de cultivo. Sabe que la distancia máxima existente entre dos puntos del mismo es de 25 decámetros, y que la proporción entre el largo y el ancho es 4:3.

Si una hectárea equivale a 100 decámetros cuadrados, ¿cuántas hectáreas tiene la superficie?

La distancia máxima entre dos puntos del rectángulo corresponderá a la diagonal de este.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25^2 \\ 3x = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 625 \\ x = \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 625 \Rightarrow y^2 = 225 \Rightarrow y = 15 \text{ dam}$$

$$x = \frac{4}{3} \cdot 15 = 20 \text{ dam}$$

Solo consideramos las soluciones positivas.

$$\text{Área} = 15 \cdot 20 = 300 \text{ dam}^2 = 3 \text{ hectáreas}$$

5.57 Con la ayuda de los alumnos de varios centros escolares se están rehabilitando las casas de un pueblo abandonado. Ahora se ocupan de la remodelación de un depósito de 1000 m³ que abastece de agua potable al pueblo. Tiene forma de prisma cuadrangular tal que la altura es el cuadrado del lado de la base menos 6 metros.

Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.

$$\begin{cases} x^2 \cdot h = 1000 \\ h = x^2 - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (h + 15) \cdot h = 1000 \\ x^2 = h + 15 \end{cases} \Rightarrow h^2 + 15h - 1000 = 0 \Rightarrow h_1 = 25 \text{ y } h_2 = -40 \text{ (solución no válida)}$$

La base mide $2\sqrt{10}$ m, y la altura, 25 m.

$$x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10} \text{ m}$$

REFUERZO

Ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas

5.58 Traduce a ecuaciones los siguientes enunciados.

a) La suma de dos números es 10.

b) La diferencia de dos números es 10.

c) El producto de dos números es 24.

a) $x + y = 10$

b) $x - y = 10$

c) $x \cdot y = 24$

5.59 Relaciona cada ecuación con una de sus soluciones.

Ecuación	Solución
$4x - 5y = -13$	$(1, 6)$
$2x - y = 2$	$(-2, 1)$
$x - 7y = 22$	$(3, 4)$
$8x - y = 2$	$(1, -3)$

Sistemas de ecuaciones lineales

5.60 Dada la ecuación $3x - 4y = 5$, resuelve los sistemas que forma con cada una de las siguientes:

a) $3x + 4y = 7$

b) $-3x - 4y = 3$

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ -3x - 4y = 3 \end{cases}$

Se resuelve por reducción: $-8y = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$
 $x = 2$

Se resuelve por reducción: $-8y = 8 \Rightarrow y = -1$
 $x = \frac{1}{3}$

5.61 Resuelve los siguientes sistemas explicando en cada caso el método que utilizas.

a) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3t + 5m = 19 \\ 2t + 4m = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x - 5y = -40 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$ Método de reducción
 $19x = -19$

b) $\begin{cases} -3t + 5m = 19 \\ 2t + 4m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6t + 10m = 38 \\ 6t + 12m = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ t = -3 \end{cases}$ Método de reducción
 $22m = 44$

5.62 Escribe las ecuaciones de los siguientes sistemas en la forma $ax + by = c$ y señala, sin resolverlos, el número de soluciones de cada uno.

a) $\begin{cases} 3(x - 1) = 6y \\ -x = 2(2 - y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 2(1 - 2x) \\ 2x = 3(2 - y) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 6y = 2 \\ \frac{-x}{2} + 3y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3(x - 1) = 6y \\ -x = 2(2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 6y \\ -x = 4 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{-1} = \frac{-6}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ No tiene solución.

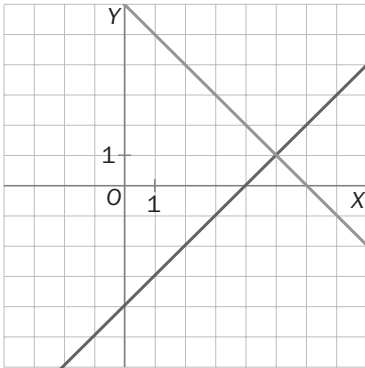
b) $\begin{cases} 3x - 5y = 2(1 - 2x) \\ 2x = 3(2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 2 - 4x \\ 2x = 6 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{2} \neq \frac{-5}{3} \Rightarrow$ Tiene solución única.

c) $\begin{cases} x - 6y = 2 \\ \frac{-x}{2} + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6y = 2 \\ -x + 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{-1} = \frac{-6}{6} = \frac{2}{-2} \Rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

5.63 Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles, y compruébalo después representando gráficamente cada uno.

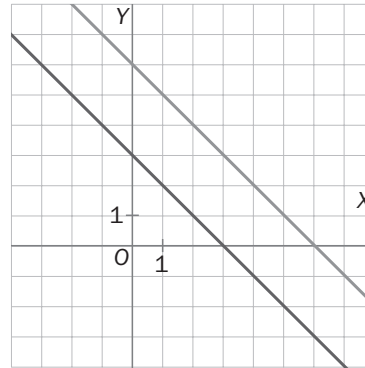
a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado



b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{6}{6} \Rightarrow$ Sistema incompatible



Sistemas de ecuaciones de segundo grado

5.64 Resuelve por sustitución el siguiente sistema de primero y segundo grado, y comprueba que la solución obtenida es correcta.

$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 90 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 + y \\ xy = 90 \end{cases} \Rightarrow (9 + y) \cdot y = 90 \Rightarrow 9y + y^2 = 90 \Rightarrow y^2 + 9y - 90 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 360}}{2} = \frac{-9 \pm 21}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{-9 + 21}{2} = 6 \rightarrow x_1 = 9 + 6 = 15 \\ y_2 = \frac{-9 - 21}{2} = -15 \rightarrow x_2 = 9 - 15 = -6 \end{cases}$

Solución 1: $x_1 = 15$ $y_1 = 6$

Solución 2: $x_2 = -6$ $y_2 = -15$

AMPLIACIÓN

5.65 De un rombo se sabe que su área es 120 cm², y que la proporción existente entre la diagonal mayor y la diagonal menor es 10:3.

Calcula la medida de las diagonales.

$\left. \begin{matrix} \frac{Dd}{2} = 120 \\ 3D = 10d \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} D \frac{3D}{10} = 240 \\ d = \frac{3D}{10} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} D^2 = 800 \Rightarrow D = 20\sqrt{2} \text{ cm} \\ d = \frac{3 \cdot 20\sqrt{2}}{10} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm} \end{cases}$

5.66 La siguiente figura muestra la posición que debe ocupar una escalera de bomberos sobre dos edificios. Calcula la longitud de la escalera y la posición sobre la que debe posarse en la acera.



$\begin{cases} y^2 = 30^2 + x^2 \\ y^2 = 20^2 + (50 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow 900 + x^2 = 400 + 2500 - 100x + x^2 \Rightarrow 100x = 2000 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$

$y^2 = 900 + 400 = 1300 \Rightarrow y = 36,06 \text{ m}$

La escalera debe medir 36,06 metros y estar situada a 20 metros de la primera casa.

5.67 Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando los mismos métodos que con dos ecuaciones.

$$a) \begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -5y + 3z = 19 \\ -12y - 4z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ -60y - 20z = 60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ 56z = 168 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ 5x - 15y + 20z = 25 \\ 5x - 5y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +17y - 21z = -29 \\ +7y - 6z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ +119y - 102z = -68 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ -45z = -135 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

5.68 Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 centímetros, y su área, 108 cm².

$$\left. \begin{matrix} x^2 + y^2 = 15^2 \\ xy = 108 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \left(\frac{108}{y}\right)^2 + y^2 = 15^2 \\ x = \frac{108}{y} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 108^2 + y^4 = 225y^2 \Rightarrow y^4 - 225y^2 + 11664 = 0$$

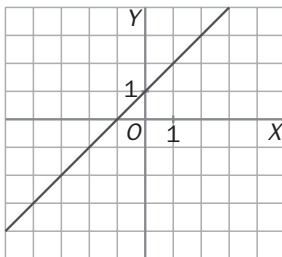
Cambio: $u = y^2$, $u^2 = y^4$

$$u^2 - 225u + 11664 = 0 \Rightarrow u = \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 4 \cdot 11664}}{2} = \frac{225 \pm 63}{2} \begin{cases} u = 144 \Rightarrow y = 12; x = 9 \\ u = 81 \Rightarrow y = 9; x = 12 \end{cases}$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas. El rectángulo tendrá por dimensiones 9 × 12 centímetros.

5.69 La gráfica muestra una de las ecuaciones de un sistema incompatible.

Halla la expresión de las dos ecuaciones del sistema sabiendo que la otra recta pasa por el punto (0, -2).



La recta pasa por los puntos de la siguiente tabla:

x	y
0	1
-1	0

Hallemos la ecuación de dicha recta, cuya ecuación explícita es: $y = mx + n$. Por tanto, al sustituir los valores de la anterior tabla en la ecuación obtenemos:

$$n = 1 \text{ y } 0 = -1m + n \rightarrow -m = -1 \rightarrow m = 1.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación explícita anterior, obtenemos: $y = x + 1 \Rightarrow -x + y = 1$.

Si el sistema debe ser incompatible, es debido a que las rectas que representan a sus ecuaciones son paralelas (no tienen puntos en común), y, por tanto, sus pendientes, es decir, m , han de ser iguales.

Además, la otra recta ha de pasar por el punto (0, -2). Por tanto:

$$y = mx + n \text{ con } m = 1 \Rightarrow y = 1x + n \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow -2 = n$$

La segunda ecuación del sistema es: $y = x - 2 \Leftrightarrow -x + y = -2$.

$$\text{Finalmente, el sistema buscado es: } \begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + y = -2 \end{cases}$$

5.70 De un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas sabemos que las dos ecuaciones tienen asociadas las siguientes tablas de valores:

x	y
-3	1
1	-1

x	y
-2	-7
3	3

- a) Halla las dos ecuaciones que forman dicho sistema.
 b) Resuelve el sistema de manera analítica aplicando alguno de los métodos.
 c) Resuélvelo gráficamente.

a) Cada una de las ecuaciones que forman el sistema son de la forma: $y = mx + n$.

De la primera tabla obtenemos, al sustituir en la ecuación:

$$\begin{cases} -7 = -2m + n \\ 3 = 3m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = -2m + n \rightarrow -7 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow n = -3 \\ -10 = -5m \rightarrow m = \frac{-10}{-5} = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - y = 3$$

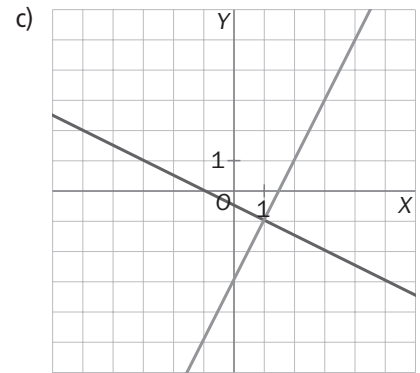
De la segunda tabla obtenemos, al sustituir en la ecuación:

$$\begin{cases} 1 = -3m + n \\ -1 = m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3m \rightarrow 1 = -3 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + n \rightarrow n = -\frac{1}{2} \\ 2 = -4m \rightarrow m = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 2y = -1$$

El sistema buscado es: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

b) Método de reducción:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \rightarrow 4 \cdot 1 - 2y = 6 \rightarrow -2y = 2 \rightarrow y = -1 \\ 5x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{5} = 1 \end{cases}$$



Para interpretar y resolver

5.71 Cinco animales

Cecilia quiere estudiar la evolución de las características físicas de cinco especies animales. Por eso ha observado de forma especial a un ejemplar de cada una de ellas.

Una de las variables que interesan para el estudio es la masa corporal de cada una a los 18 meses de vida, pero, inexplicablemente, en su libreta solo tiene estos datos.

Animales	Masa conjunta (kg)	Animales	Masa conjunta (kg)
Perro y gato	30	Gato y cerdo	93
Perro y pato	27	Gato y cabra	72
Perro y cerdo	107	Pato y cerdo	90
Perro y cabra	86	Pato y cabra	69
Gato y pato	13	Cerdo y cabra	149

Calcula la masa que tenía el cerdo en esa época.

Si se suman todos los valores ofrecidos por la tabla, se obtiene cuatro veces la masa de los cinco animales juntos.

$$\text{Así: Perro} + \text{Gato} + \text{Pato} + \text{Cerdo} + \text{Cabra} = \frac{30 + 27 + \dots + 149}{2} = \frac{736}{4} = 184$$

$$\text{Por tanto: Cerdo} = 184 - (\text{Perro} + \text{Gato}) - (\text{Pato} + \text{Cabra}) = 184 - 30 - 69 = 85 \text{ kg}$$

5.72 Fábrica de electrodomésticos

En una fábrica de electrodomésticos se montan lavadoras y lavavajillas. En ella hay 12 mecánicos que trabajan 7 horas diarias y que están capacitados para componer indistintamente lavadoras o lavavajillas. Observa el tiempo que se tarda en ensamblar cada electrodoméstico.

Lavadora	2 horas
Lavavajillas	3 horas

- a) Escribe el polinomio que determina el tiempo necesario para montar x lavadoras e y lavavajillas.
b) Escribe la ecuación que determina el número de lavadoras y de lavavajillas que se pueden armar en un día.
c) Los estudios de mercado muestran que se venden el doble de lavadoras que de lavavajillas. Calcula, en estas condiciones, cuántos electrodomésticos de cada clase se compondrán en un día.

a) $T = 2x + 3y$

b) $2x + 3y = 12 \cdot 7 = 84$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 84 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow 4y + 3y = 84 \Rightarrow y = 12 \text{ y } x = 24$. Se deberán montar 24 lavadoras y 12 lavavajillas.

AUTOEVALUACIÓN

5.A1 Halla dos números cuya suma sea 14, y su diferencia, 8.

Sean x e y los dos números $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 14 \rightarrow 11 + y = 14 \rightarrow y = 3 \\ 2x = 22 \rightarrow x = \frac{22}{2} = 11 \end{cases}$

Los números son 3 y 11.

5.A2 Encuentra la solución del sistema por sustitución.

$$\begin{cases} 5x + y = -9 \\ -3x + 4y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -9 - 5x \\ -3x + 4y = 10 \end{cases} \Rightarrow -3x + 4(-9 - 5x) = 10 \Rightarrow -3x - 36 - 20x = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -23x = 46 \Rightarrow x = \frac{46}{-23} = -2$$

$$y = -9 + 10 = 1$$

5.A3 Resuelve este sistema por igualación.

$$\begin{cases} 6x + 2y = -6 \\ 7x - 2y = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-6 - 6x}{2} \\ y = \frac{-20 - 7x}{-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-6 - 6x}{2} = \frac{-20 - 7x}{-2} \Rightarrow -2(-6 - 6x) = 2(-20 - 7x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 + 12x = -40 - 14x \Rightarrow 26x = -52 \Rightarrow x = \frac{-52}{26} = -2$$

$$y = \frac{-6 + 12}{2} = 3$$

5.A4 Halla la solución de este sistema por reducción.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases}$$

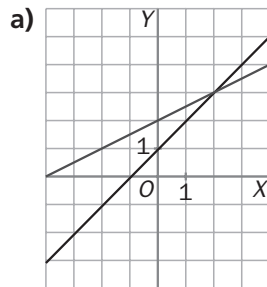
$$\begin{cases} 10x - 6y = 4 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{12} = 1 \\ 2x + 6y = 8 \rightarrow 2 + 6y = 6 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

5.A5 Halla el valor de los coeficientes de la ecuación $ax + by = 3$ para que $x = 1, y = 2$ y $x = -1, y = -8$ sean dos de sus soluciones.

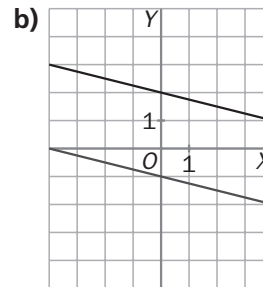
$$\begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -1; y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ -a - 8b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \rightarrow a - 2 = 3 \rightarrow a = 5 \\ -6b = 6 \rightarrow b = \frac{6}{-6} = -1 \end{cases}$$

Los coeficientes son: $a = 5$ y $b = -1$.

5.A6 Observa las siguientes representaciones gráficas y señala la solución de cada uno de los sistemas.



a) $x = 2$ e $y = 3$



b) El sistema es incompatible; no tiene solución.

5.A7 Resuelve el siguiente sistema de segundo grado por reducción.

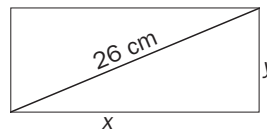
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ x^2 - 4y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ -3x^2 + 12y = -15 \end{cases} \Rightarrow 2y^2 + 12y = 14 \Rightarrow 2y^2 + 12y - 14 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \text{ e } y_2 = -7$$

$$\text{Si } y_1 = 1 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Si } y_2 = -7 \Rightarrow x = \sqrt{-23} \text{ (no es real).}$$

5.A8 La diagonal de un rectángulo mide 26 centímetros, y el perímetro, 68 centímetros. Halla los lados del rectángulo.



Por el teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 676$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 676 \\ 2x + 2y = 68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 676 \\ y = 34 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 34x + 240 = 0$$

$$\text{La solución es: } \begin{matrix} x_1 = 24 & x_2 = 10 \\ y_1 = 20 & y_2 = 24 \end{matrix}$$

La base mide 24 cm, y la altura, 10 cm (la otra solución válida del sistema corresponde al mismo rectángulo girado 90°).

MATETIEMPOS

Oro y plata

Se sabe que el oro y la plata pierden 5,1% y 9,5% de su peso al introducirlos en el agua. Nos dicen que una joya de 12 gramos es de oro puro, pero al introducirla en el agua pierde 0,7 grs. ¿Nos han engañado?

Sea x la cantidad existente de oro e y la cantidad de plata.

El peso de la joya será: $x + y = 12$, y la pérdida de peso al introducirla en el agua: $0,051x + 0,095y = 0,7$.

Si resolvemos el sistema planteado por sustitución, tenemos: $y = 12 - x$.

Luego: $0,051x + 0,095(12 - x) = 0,7 \Rightarrow 0,051x + 1,4 - 0,095x = 0,7$

$$-0,044x = -0,44 \Rightarrow x = 10$$

Luego la joya tiene 10 gramos de oro y 2 de plata, lo que indica que no es pura.