UNIDAD 4: Ecuaciones e inecuaciones

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 72

1. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones sin utilizar ningún método de resolución de ecuaciones:

a) $x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$

b) $3x^3 = 81 \Rightarrow x = 3$

c) $5(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$

d) $x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ó \quad x = 1$

e) $2^{x-1} = 256 \Rightarrow x = 9$

f) $(x+5)^x = 100\,000 \Rightarrow x = 5$

2. Comprueba que $x = 1$ es una solución de la ecuación $(3-x)^2 = x^2 + 3$.

Si sustituimos $x = 1$ en ambos términos de la ecuación, obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} (3-1)^2 & & 1^2+3 \\ 2^2 & & 1+3 \\ 4 & = & 4 \end{array}$$

Puesto que ambos valores son iguales, $x = 1$ es solución de la ecuación

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 73

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 1 + 3(x-2) = 4(x-3) + 2(1-x)$

$$2x - 1 + 3(x-2) = 4(x-3) + 2(1-x)$$
$$2x - 1 + 3x - 6 = 4x - 12 + 2 - 2x$$
$$2x + 3x - 4x + 2x = 1 + 6 - 12 + 2$$
$$3x = -3$$
$$x = \frac{-3}{3} \Rightarrow x = 1$$

b) $x - \frac{2x-3}{6} = \frac{5-x}{4} + 2$

$$\frac{12x}{12} - \frac{2(2x-3)}{12} = \frac{3(5-x)}{12} + \frac{24}{12}$$
$$12x - 2(2x-3) = 3(5-x) + 24$$
$$12x - 4x + 6 = 15 - 3x + 24$$
$$12x - 4x + 3x = 15 + 24 - 6$$

$$11x = 33$$

$$x = \frac{33}{11} \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

c) $\frac{2(3-x)}{5} - \frac{1-2x}{10} = x + \frac{3-2x}{2}$

$$\frac{4(3-x)}{10} - \frac{1-2x}{10} = \frac{10x}{10} + \frac{5(3-2x)}{10}$$

$$4(3-x) - 1 + 2x = 10x + 5(3-2x)$$

$$12 - 4x - 1 + 2x = 10x + 15 - 10x$$

$$-4x + 2x - 10x + 10x = 15 - 12 + 1$$

$$-2x = 4$$

$$x = \frac{4}{-2} \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

d) $\frac{3x}{4} - \frac{2(x+5)-3x}{6} - \frac{1+2x}{8} + x - \frac{1}{2} = 0$

$$\frac{3x}{4} - \frac{2x+10-3x}{6} - \frac{1+2x}{8} + x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3x}{4} - \frac{-x+10}{6} - \frac{1+2x}{8} + x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{18x}{24} - \frac{-4x+40}{24} - \frac{3+6x}{24} + \frac{24x}{24} - \frac{12}{24} = 0$$

$$18x + 4x - 40 - 3 - 6x + 24x - 12 = 0$$

$$18x + 4x - 6x + 24x = 40 + 3 + 12$$

$$40x = 55$$

$$x = \frac{55}{40} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{8}$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 74

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \end{cases}$$

b) $3x^2 - 13x - 10 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{13 \pm \sqrt{169+120}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{6} = \frac{13 \pm 17}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13+17}{6} = \frac{30}{6} = 5 \\ x_2 = \frac{13-17}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

c) $-x^2-2x+3=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{-2}=\frac{2\pm4}{-2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2+4}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3\\ x_2=\dfrac{2-4}{-2}=\dfrac{-2}{-2}=+1\end{cases}$$

d) $(x+2)(x-3)+6=0$

$x^2-3x+2x-6+6=0$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0;\quad x_2=1$

e) $(2x-1)(x+2)=3x+16$

$2x^2+4x-x-2=3x+16$

$2x^2+4x-x-3x-2-16=0$

$2x^2-18=0$

$2x^2=18$

$x^2=\dfrac{18}{2}$

$x^2=9 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{9} \quad\Rightarrow\quad x=\pm3$

f) $4x+2=(x+2)(2x+1)$

$4x+2=2x^2+x+4x+2$

$0=2x^2+x+4x-4x+2-2$

$0=2x^2+x$

$0=x(2x+1) \quad\Rightarrow\quad x_1=0;\quad x_2=-\dfrac{1}{2}$

g) $x+4-(x-3)^2=1-12x$

$x+4-x^2+6x-9=1-12x$

$-x^2+x+6x+12x+4-9-1=0$

$-x^2+19x-6=0$

$x^2-19x+6=0$

$$x=\frac{19\pm\sqrt{361-24}}{2}=\frac{19\pm\sqrt{337}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{19+\sqrt{337}}{2}\\ x_2=\dfrac{19-\sqrt{337}}{2}\end{cases}$$

h) $(2x+1)^2-(x-3)(x+3)=7-3x$

$4x^2+4x+1-x^2+9=7-3x$

$4x^2-x^2+4x+3x+1+9-7=0$

$3x^2+7x+3=0$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-36}}{6}=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-7+\sqrt{13}}{6}\\[2mm] x_2=\dfrac{-7-\sqrt{13}}{6}\end{cases}$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 75

5. Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-2x+8=0$

El discriminante es igual a $\Delta=b^2-4ac=4-32=-28$. Como $\Delta<0$ la ecuación no tiene ninguna solución.

b) $x^2-4x=0$

Puesto que $\Delta=b^2-4ac=16>0$, podemos afirmar que la ecuación tiene dos soluciones.

c) $-x^2+3x=5$

En primer lugar traemos todos los monomios al primer término: $-x^2+3x-5=0$. Observando el discriminante, $\Delta=9-20<0$, concluimos que la ecuación no tiene ninguna solución.

6. Escribe una ecuación de segundo grado con soluciones $x=-1$ y $x=3$.

Como $x_1+x_2=2$ y $x_1\cdot x_2=-3$, haciendo $a=1$ tendremos que:

$$-\frac{b}{a}=2\ \Rightarrow\ b=-2\qquad\quad \frac{c}{a}=-3\ \Rightarrow\ c=-3$$

Así, la ecuación $x^2-2x-3=0$ tiene como soluciones $x=-1$ y $x=3$.

7. Determina el valor de d para que las siguientes soluciones tengan una única solución:

a) $dx^2-4x+1=0$

El determinante de la ecuación es $\Delta=4-4d$. Para que tenga una única solución debe ser nulo, y por tanto:

$$4-4d=0\quad\Leftrightarrow\quad 4=4d\quad\Leftrightarrow\quad d=1$$

b) $-x^2+10x+d=0$

El determinante de la ecuación es $\Delta=100+4d$. Para que tenga una única solución debe ser nulo, y por tanto:

$$100+4d=0\quad\Leftrightarrow\quad 4d=-100\quad\Leftrightarrow\quad d=-25$$

c) $x^2+dx+9=0$

El determinante de la ecuación es $\Delta=d^2-36$. Para que tenga una única solución debe ser nulo, y por tanto:

$$d^2-36=0\quad\Leftrightarrow\quad d^2=36\Leftrightarrow\quad d=\pm\sqrt{36}=\pm6$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 76

8. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 15x^2 + 50 = 0$

Realizando el cambio $z = x^2$ obtenemos: $z^2 - 15z + 50 = 0$

$$z = \frac{15 \pm \sqrt{225-200}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{15+5}{2} = 10 \\ z_2 = \dfrac{15-5}{2} = 5 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases} x^2 = 10 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10} \\ x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Soluciones: $+\sqrt{10}, -\sqrt{10}, +\sqrt{5}, -\sqrt{5}$

b) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

Realizando el cambio $z = x^2$ obtenemos: $4z^2 + 11z - 3 = 0$

$$z = \frac{-11 \pm \sqrt{121+48}}{8} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{-11 \pm 13}{8} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-11+13}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \\ z_2 = \dfrac{-11-13}{8} = \dfrac{-24}{8} = -3 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2} \\ x^2 = -3 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluciones: $+\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$

c) $6x^4 - 17x^2 = -5$

Reordenamos y realizamos el cambio $z = x^2$ para obtener: $6z^2 - 17z + 5 = 0$

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{289-120}}{12} = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{17 \pm 13}{12} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{17+13}{12} = \dfrac{30}{12} = \dfrac{5}{2} \\ z_2 = \dfrac{17-13}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ x^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \end{cases}$$

Soluciones: $+\sqrt{\dfrac{5}{2}}, -\sqrt{\dfrac{5}{2}}, +\sqrt{\dfrac{1}{3}}, -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

d) $6x^4 + x^2 - 1 = 0$

Realizando el cambio $z = x^2$ obtenemos: $6z^2 + z - 1 = 0$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-1+5}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \\ z_2 = \dfrac{-1-5}{12} = -\dfrac{6}{12} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \\ x^2=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x\notin\mathbb{R} \end{cases}$$

Soluciones: $+\sqrt{\dfrac{1}{3}}, -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $(x^2-5x)(x-3)(x+1)=0$

$$(x^2-5x)(x-3)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0\Rightarrow x_1=0 \quad x_2=5 \\ x-3=0 \Rightarrow x_3=0 \\ x+1=0 \Rightarrow x_4=-1 \end{cases}$$

b) $(6x^2-24)(x^2-x-2)(x^2+1)=0$

$$(6x^2-24)(x^2-x-2)(x^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2-24=0\Rightarrow 6x^2=24\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2-x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases} \\ x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x\notin\mathbb{R} \end{cases}$$

c) $12x^4-2x^3-2x^2=0$

Sacando factor común, se obtiene:

$$2x^2(6x^2-x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 6x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\dfrac{1\pm 5}{12}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{4}{12}=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

d) $x^6-36x^2=0$

Sacando factor común, se obtiene: $x^2(x^4-36)=0$

Podemos factorizar el polinomio utilizando las identidades notables: $x^2(x^2+6)(x^2-6)=0$

Por tanto, debe ocurrir una de las siguientes opciones:

O bien $x^2=0 \Rightarrow x=0$

o bien $x^2+6=0 \Rightarrow x^2=-6$ (no es posible)

o bien $x^2-6=0 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 77

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x-7\sqrt{x}+6=0$

Aislamos la raíz en uno de los términos:

$2x+6=7\sqrt{x}$

Elevamos al cuadrado:

$$\left(2x+6\right)^2=\left(7\sqrt{x}\right)^2$$

$$4x^2+24x+36=49x$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida:

$$4x^2+24x-49x+36=0$$

$$4x^2-25x+36=0$$

$$x=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{8}=\frac{25\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{25\pm 7}{8}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{25+7}{8}=\dfrac{32}{8}=4 \\ x_2=\dfrac{25-7}{8}=\dfrac{18}{8}=\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

Debemos comprobar las soluciones:

$x_1=4\Rightarrow 2\cdot 4-7\sqrt{4}+6=8-7\cdot 2+6=8-14+6=0\ \rightarrow$ Es solución de la ecuación

$x_2=\dfrac{9}{4}\Rightarrow 2\cdot\dfrac{9}{4}-7\sqrt{\dfrac{9}{4}}+6=\dfrac{9}{2}-7\cdot\dfrac{3}{2}+6=\dfrac{9}{2}-\dfrac{21}{2}+\dfrac{12}{2}=0\ \rightarrow$ Es solución de la ecuación

b) $x+1=\sqrt{(5-x)(5+x)}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(x+1\right)^2=\left(5-x\right)\left(5+x\right)$$

$$x^2+2x+1=25-x^2$$

$$x^2+x^2+2x+1-25=0$$

$$2x^2+2x-24=0$$

Para facilitar la resolución de esta ecuación, podemos dividir todos los términos por 2:

$$x^2+x-12=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ x_1=\dfrac{-1-7}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4\end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$x_1=3\Rightarrow\quad 3+1=\sqrt{(5-3)(5+3)};\quad 4=\sqrt{16}\ \rightarrow$ Es solución de la ecuación

$x_1=-4\Rightarrow\quad -4+1=\sqrt{(5+4)(5-4)};\quad -3=\sqrt{9}\ \rightarrow$ Es solución de la ecuación

c) $4=\sqrt{8+x}+\sqrt{8-x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$16=\left(\sqrt{8+x}+\sqrt{8-x}\right)^2$$

$$16=\left(\sqrt{8+x}\right)^2+\left(\sqrt{8-x}\right)^2+2\sqrt{(8+x)(8-x)}$$

$$16=8+x+8-x+2\sqrt{(8+x)(8-x)}$$

$$0=2\sqrt{64-x^2}$$

$$0=\sqrt{64-x^2}$$

Elevando de nuevo al cuadrado, se tiene que:

$0 = 64 - x^2$

$x^2 = 64$

$x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$

Comprobamos las soluciones:

$x_1 = 8 \Rightarrow \quad 4 = \sqrt{8+8} + \sqrt{8-8} \quad \Rightarrow \quad 4 = \sqrt{16} \rightarrow$ Es solución de la ecuación

$x_2 = -8 \Rightarrow \quad 4 = \sqrt{8+(-8)} + \sqrt{8-(-8)} \quad \Rightarrow \quad 4 = \sqrt{16} \rightarrow$ Es solución de la ecuación

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 3} = 0$

Para que una fracción sea nula, el numerador debe ser igual a cero. Por tanto:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Debemos comprobar la validez de las soluciones asegurándonos de que no se anula el denominador:

$x = 0 \Rightarrow \quad x^2 + x - 3 = -3 \neq 0 \rightarrow$ Es solución de la ecuación

$x = 2 \Rightarrow \quad 2^2 + 2 - 3 = +3 \neq 0 \rightarrow$ Es solución de la ecuación

b) $3 + \dfrac{8}{x} = \dfrac{3}{x^2}$

$$\frac{3x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$3x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-8+10}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-8-10}{6} = -\dfrac{18}{6} = -3 \end{cases}$$

Puesto que ninguna de las soluciones anula el denominador, ambas son válidas.

c) $\dfrac{2x}{x^2 - 1} + \dfrac{2x-5}{x+1} = 1$

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{(2x-5)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$2x + 2x^2 - 2x - 5x + 5 = x^2 - 1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Puesto que ninguna de las soluciones anula los denominadores, ambas son válidas.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 78

12. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x - y = 6 & \Rightarrow y = 3x - 6 \\ 2x + 5y = -13 \end{cases}$

Sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación se obtiene:

$2x + 5(3x - 6) = -13$

$2x + 15x - 30 = -13$

$2x + 15x = 30 - 13$

$17x = 17 \Rightarrow x = 1$

Hallamos ahora el valor de y utilizando la ecuación despejada: $y = 3x - 6 = 3 - 6 = -3$

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{matrix} x = 1 \\ y = -3 \end{matrix}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -x + 5y = 27 & \Rightarrow x = 5y - 27 \end{cases}$

Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación se obtiene:

$2(5y - 27) + 3y = 11$

$10y - 54 + 3y = 11$

$10y + 3t = 11 + 54$

$13y = 65$

$y = \frac{65}{13} \Rightarrow y = +5$

Hallamos ahora el valor de x utilizando la ecuación despejada: $x = 5y - 27 = 25 - 27 = -2$

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{matrix} x = -2 \\ y = +5 \end{matrix}$

c) $\begin{cases} 2x - 5y = 11 & \Rightarrow x = \frac{5y + 11}{2} \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación se obtiene:

$3 \cdot \frac{5y + 11}{2} + 4y = 5$

$\frac{15y + 33}{2} + \frac{8y}{2} = \frac{10}{2}$

$15y + 33 + 8y = 10$

$15y + 8y = 10 - 33$

$23y = -23 \Rightarrow y = -1$

Hallamos ahora el valor de x utilizando la ecuación despejada: $x = \frac{5y + 11}{2} = \frac{-5 + 11}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{matrix} x = +3 \\ y = -1 \end{matrix}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 79

13. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

a) $$\begin{cases} 2x+y=1 & \Rightarrow\ y=1-2x \\ 3x-2y=12 & \Rightarrow\ y=\dfrac{3x-12}{2} \end{cases}$$

Igualamos ambas expresiones y resolvemos para x:

$$1-2x=\frac{3x-12}{2}$$

$$\frac{2-4x}{2}=\frac{3x-12}{2}$$

$$2-4x=3x-12$$

$$2+12=4x+3x$$

$$14=7x \ \Rightarrow\ x=\frac{14}{7}=2$$

Hallamos ahora el valor de y: $y=1-2x=1-4=-3$.

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{matrix} x=+2 \\ y=-3 \end{matrix}$

b) $$\begin{cases} 2x-3y=7 & \Rightarrow\ x=\dfrac{3y+7}{2} \\ 5x+2y=-11 & \Rightarrow\ x=\dfrac{-2y-11}{5} \end{cases}$$

Igualamos ambas expresiones y resolvemos para y:

$$\frac{3y+7}{2}=\frac{-2y-11}{5}$$

$$\frac{15y+35}{10}=\frac{-4y-22}{10}$$

$$15y+35=-4y-22$$

$$15y+4y=-22-35$$

$$19y=-57 \ \Rightarrow\ y=-\frac{57}{19}=-3$$

Hallamos ahora el valor de x: $x=\dfrac{3y+7}{2}=\dfrac{-9+7}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$.

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{matrix} x=-1 \\ y=-3 \end{matrix}$

c) $$\begin{cases} -2x+3y=0 & \Rightarrow\ y=\dfrac{2x}{3} \\ 4x-3y=-6 & \Rightarrow\ y=\dfrac{4x+6}{3} \end{cases}$$

Igualamos ambas expresiones y resolvemos para x:

$$\frac{2x}{3}=\frac{4x+6}{3}$$
$$2x=4x+6$$
$$-2x=6 \Rightarrow \quad x=-3$$

Hallamos ahora el valor de y : $y=\frac{2x}{3}=\frac{-6}{3}=-2$.

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{matrix} x=-3 \\ y=-2 \end{matrix}$

14. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

a) $\begin{cases} 6x+4y=-8 \\ 4x-3y=23 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 4 para obtener:

$$\begin{cases} 18x+12y=-24 \\ 16x-12y=92 \end{cases}$$

Sumando ambas expresiones, queda:

$$34x=68 \Rightarrow x=2$$

Sustituimos el valor de x en la primera ecuación para hallar y :

$$6x+4y=-8$$
$$12+4y=-8$$
$$4y=-20 \Rightarrow y=-5$$

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{matrix} x=2 \\ y=-5 \end{matrix}$

b) $\begin{cases} -3x+4y=-16 \\ 4x-3y=19 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para obtener:

$$\begin{cases} -12x+16y=-64 \\ +12x-9y=57 \end{cases}$$

Sumando ambas expresiones, queda:

$$7y=-7 \Rightarrow y=\frac{-7}{7}=-1$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación para hallar x :

$$4x-3y=19$$
$$4x+3=19$$
$$4x=19-3$$
$$4x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{4}=4$$

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{matrix} x=+4 \\ y=-1 \end{matrix}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=-9 \\ 4x+5y=-19 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por -2 para obtener:

$\begin{cases} -4x-6y=18 \\ 4x+5y=-19 \end{cases}$

Sumando ambas expresiones, queda:

$-y=-1 \Rightarrow y=+1$

Sustituimos el valor de y en la primera ecuación para hallar x:

$2x+3y=-9$

$2x+3=-9$

$2x=-9-3$

$2x=-12 \Rightarrow x=\dfrac{-12}{2}=-6$

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{matrix} x=-6 \\ y=+1 \end{matrix}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 80

15. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} 2x^2-y^2=-1 \\ 3x^2+2y^2=30 \end{cases}$

Usaremos el método de reducción. Multiplicamos la primera ecuación por 2:

$\begin{cases} 4x^2-2y^2=-2 \\ 3x^2+2y^2=30 \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$7x^2=28$

$x^2=\dfrac{28}{7} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

Para cada una de los valores de x hallamos su correspondiente valor de y utilizando la primera ecuación del sistema:

$2x^2-y^2=-1$

$2\cdot(\pm 2)^2-y^2=-1$

$8-y^2=-1$

$-y^2=-1-8$

$-y^2=-9 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$

(Obsérvese que, puesto que x aparece elevada al cuadrado no ha sido necesario distinguir entre su signo positivo o negativo).

Por tanto, el sistema tiene cuatro soluciones:

$x_1 = +2 \Leftrightarrow y_1 = +3$

$x_2 = +2 \Leftrightarrow y_2 = -3$

$x_3 = -2 \Leftrightarrow y_3 = +3$

$x_4 = -2 \Leftrightarrow y_4 = -3$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 9 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$

Despejamos y en la segunda ecuación: $y = 3x + 7$ y sustituimos su valor en la primera:

$x^2 + (3x+7)^2 - 2x = 9$

$x^2 + 9x^2 + 42x + 49 - 2x = 9$

$x^2 + 9x^2 + 42x - 2x + 49 - 9 = 0$

$10x^2 + 40x + 40 = 0$

Podemos facilitar la resolución de esta ecuación dividiendo todos sus términos por 10:

$x^2 + 4x + 4 = 0$

Resulta una identidad notable:

$(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Hallamos el valor de y utilizando la expresión despejada: $y = 3x + 7 \Rightarrow y = -6 + 7 = 1$.

El sistema tiene una única solución: $\begin{matrix} x = -2 \\ y = +1 \end{matrix}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ xy = 12 \end{cases}$

Despejamos y en la segunda ecuación: $y = \dfrac{12}{x}$ y sustituimos su valor en la primera:

$x^2 + \left(\dfrac{12}{x}\right)^2 = 40$

$x^2 + \dfrac{144}{x^2} = 40$

$\dfrac{x^4}{x^2} + \dfrac{144}{x^2} = \dfrac{40x^2}{x^2}$

$x^4 - 40x^2 + 144 = 0$

Obtenemos una ecuación bicuadrática. Para resolverla, hacemos el cambio $z = x^2$:

$z^2 - 40z + 144 = 0$

$$z = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 576}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{40 \pm 32}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{40+32}{2} = \dfrac{72}{2} = 36 \\ z_2 = \dfrac{40-32}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Hallamos los valores de x deshaciendo el cambio:

$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

Para cada uno de los valores de x debemos hallar el valor correspondiente de y:

$$x_1 = +6 \Rightarrow y_1 = \frac{12}{6} = +2$$

$$x_2 = -6 \Rightarrow y_2 = \frac{12}{-6} = -2$$

$$x_3 = +2 \Rightarrow y_3 = \frac{12}{2} = +6$$

$$x_4 = -2 \Rightarrow y_4 = \frac{12}{-2} = -6$$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ xy = -2 \end{cases}$

Despejamos y en la segunda ecuación: $y = -\frac{2}{x}$ y sustituimos su valor en la primera:

$$x^2 + 2\left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 6$$

$$x^2 + 2\cdot\frac{4}{x^2} = 6$$

$$\frac{x^4}{x^2} + \frac{8}{x^2} = \frac{6x^2}{x^2}$$

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$

Obtenemos una ecuación bicuadrática. Para resolverla, hacemos el cambio $z = x^2$:

$$z^2 - 6z + 8 = 0$$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ z_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Hallamos los valores de x deshaciendo el cambio:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Para cada uno de los valores de x debemos hallar el valor correspondiente de y:

$$x_1 = +2 \Rightarrow y_1 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{-2} = +1$$

$$x_3 = +\sqrt{2} \Rightarrow y_3 = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$x_4 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_4 = -\frac{2}{-\sqrt{2}} = +\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = +\frac{2\sqrt{2}}{2} = +\sqrt{2}$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 81

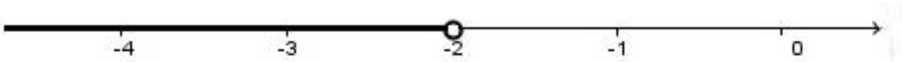
16. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa su solución en la recta real:

a) $2x-5>5x+1$

$2x-5x>5+1$

$-3x>6$

$x<\dfrac{6}{-3}=-2 \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty,-2)$



b) $5x-4>2x-7$

$5x-2x>4-7$

$3x>-3$

$x>-1 \quad\Rightarrow\quad x\in(-1,+\infty)$

c) $\dfrac{x-2}{4}-\dfrac{3x-2}{8}\geq x$

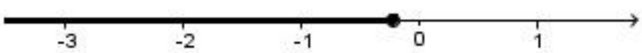
$\dfrac{2x-4}{8}-\dfrac{3x-2}{8}\geq\dfrac{8x}{8}$

$2x-4-3x+2\geq 8x$

$2x-8x-3x\geq 4-2$

$-9x\geq 2$

$x\leq-\dfrac{2}{9} \quad\Rightarrow\quad x\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{9}\right]$



d) $\dfrac{x}{4}-\dfrac{x-1}{3}\leq-1+\dfrac{x+2}{6}$

$\dfrac{3x}{12}-\dfrac{4x-4}{12}\leq\dfrac{-12}{12}+\dfrac{2x+4}{12}$

$3x-4x+4\leq-12+2x+4$

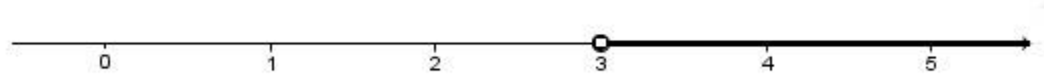
$3x-4x-2x\leq-12+4-4$

$-3x\leq-12$

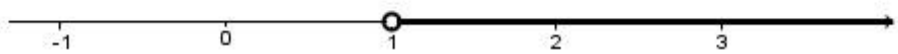
$x\geq\dfrac{-12}{-3}=+4 \quad\Rightarrow\quad x\in[4,+\infty)$

e) $\dfrac{1-x}{3}-\dfrac{2-3x}{6}<\dfrac{x}{2}-1$

$$\frac{2-2x}{6}-\frac{2-3x}{6}<\frac{3x}{6}-\frac{6}{6}$$
$$2-2x-2+3x<3x-6$$
$$-2x+3x-3x<-6-2+2$$
$$-2x<-6$$
$$x>\frac{-6}{-2}=+3 \quad \Rightarrow \quad x\in(3,+\infty)$$



f) $$\frac{x-3(x-1)}{4}-\frac{3x-1}{8}>1-x$$
$$\frac{x-3x+3}{4}-\frac{3x-1}{8}>1-x$$
$$\frac{-2x+3}{4}-\frac{3x-1}{8}>1-x$$
$$\frac{-4x+6}{8}-\frac{3x-1}{8}>\frac{8-8x}{8}$$
$$-4x+6-3x+1>8-8x$$
$$8x-4x-3x>8-6-1$$
$$x>1 \quad \Rightarrow \quad x\in(1,+\infty)$$



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 82

17. Determina el conjunto donde se verifican los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $$\begin{cases}-x+5>x-1 \quad \Rightarrow -x-x>-5-1 \Rightarrow -2x>-6 \Rightarrow x<+3\\ 5x-1\ge -5+3x \Rightarrow 5x-3x\ge -5+1 \Rightarrow 2x\ge -4 \Rightarrow x\ge -2\end{cases}$$

Solución: $x\in[-2,+3)$

b) $$\begin{cases}2(1-2x)-x\ge x+2 \quad \Rightarrow \ 2-4x-x\ge x+2 \Rightarrow -4x-x-x\ge 2-2 \Rightarrow -6x\ge 0 \Rightarrow \ x\le 0\\ \dfrac{1-x}{3}<\dfrac{5+x}{2} \quad \Rightarrow \ 2-2x<15+3x \Rightarrow -2x-3x<15-2 \Rightarrow -5x<13 \Rightarrow x>-\dfrac{13}{5}\end{cases}$$

Solución: $x\in\left(-\dfrac{13}{5},0\right]$

c) $$\begin{cases}|x|<1 \ \Rightarrow -1<x<1\\ 1-x\le 2(1-2x)+5 \ \Rightarrow 1-x\le 2-4x+5 \Rightarrow 4x-x\le 2+5-1 \Rightarrow 3x\le 6 \Rightarrow x\le 2\end{cases}$$

Solución: $x\in(-1,+1)$

d) $\begin{cases} |x-1|<2 \Rightarrow -2<x-1<2 \Rightarrow -2+1<x<2+1 \Rightarrow -1<x<3 \\ 2x-1 \geq -5 \Rightarrow 2x \geq -5+1 \Rightarrow 2x \geq -4 \Rightarrow x \geq -2 \end{cases}$

Solución: $x \in [-2,3)$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 83

18. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2+3x-10 \geq 0$

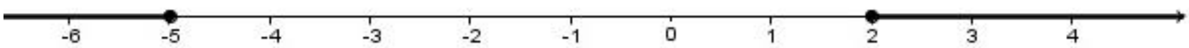
Resolvemos la ecuación asociada:

$$x^2+3x-10=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-5 \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $(-\infty,-5]$, $[-5,+2]$ y $[+2,+\infty)$. Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $(-\infty,-5] \Rightarrow x=-10 \Rightarrow (-10)^2+3(-10)-10=100-30-10 \geq 0$
- $[-5,+2] \Rightarrow x=0 \Rightarrow 0^2+3\cdot 0-10=-10<0$
- $[+2,+\infty) \Rightarrow x=3 \Rightarrow 3^2+3\cdot 3-10=9+9-10 \geq 0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $(-\infty,-5] \cup [+2,+\infty)$



b) $x^2+x-6 \leq 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $(-\infty,-3]$, $[-3,+2]$ y $[+2,+\infty)$. Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $(-\infty,-3] \Rightarrow x=-5 \Rightarrow (-5)^2+(-5)-6=25-5-6>0$
- $[-3,+2] \Rightarrow x=0 \Rightarrow 0^2+0-6 \leq 0$
- $[+2,+\infty) \Rightarrow x=3 \Rightarrow 3^2+3-6=9+3-6>0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $[-3,+2]$

c) $6x^2-4x-15>0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$$6x^2-4x-15=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+360}}{12}=\frac{4\pm\sqrt{376}}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{4+\sqrt{376}}{12} \\ x_2=\dfrac{4-\sqrt{376}}{12} \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{376}}{12}\right)$, $\left(\frac{4-\sqrt{376}}{12}, \frac{4+\sqrt{376}}{12}\right)$ y $\left(\frac{4+\sqrt{376}}{12}, +\infty\right)$.

Acotamos el valor de los extremos de los intervalos considerando que $4 < \sqrt{376} < \sqrt{400} = 20$

y por tanto: $-2 < \frac{4-20}{12} < \frac{4-\sqrt{376}}{12} < 0 < \frac{4+\sqrt{376}}{12} < \frac{4+20}{12} = 2$

Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{376}}{12}\right) \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 6\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) - 15 = 24 + 8 - 15 > 0$
- $\left(\frac{4-\sqrt{376}}{12}, \frac{4+\sqrt{376}}{12}\right) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 6\cdot 0^2 - 4\cdot 0 - 15 = -15 < 0$
- $\left(\frac{4+\sqrt{376}}{12}, +\infty\right) \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 6\cdot 2^2 - 4\cdot 2 - 15 = 24 - 8 - 15 > 0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{376}}{12}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{376}}{12}, +\infty\right)$

d) $10x^2 - 19x - 6 < 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$$10x^2 - 19x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{19 \pm \sqrt{361+240}}{20} = \frac{19 \pm \sqrt{601}}{20} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{19+\sqrt{601}}{20} \\ x_2 = \frac{19-\sqrt{601}}{20} \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty, \frac{19-\sqrt{601}}{20}\right)$, $\left(\frac{19-\sqrt{601}}{20}, \frac{19+\sqrt{601}}{20}\right)$ y $\left(\frac{19+\sqrt{601}}{20}, +\infty\right)$.

Acotamos el valor de los extremos de los intervalos considerando que $19 < \sqrt{601} < \sqrt{900} = 30$

y por tanto: $-1 < \frac{19-30}{20} < \frac{19-\sqrt{601}}{20} < 0 < \frac{19+\sqrt{601}}{20} < \frac{19+30}{20} < 3$

Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty, \frac{19-\sqrt{601}}{20}\right) \Rightarrow x = -1 \Rightarrow 10\cdot(-1)^2 - 19\cdot(-1) - 6 = 10 + 19 - 6 > 0$
- $\left(\frac{19-\sqrt{601}}{20}, \frac{19+\sqrt{601}}{20}\right) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 10\cdot 0^2 - 19\cdot 0 - 6 = -6 < 0$
- $\left(\frac{19+\sqrt{601}}{20}, +\infty\right) \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 10\cdot 3^2 - 19\cdot 3 - 6 = 900 - 57 - 6 > 0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(\frac{19-\sqrt{601}}{20}, \frac{19+\sqrt{601}}{20}\right)$

19. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(x-2)^2-(2x-1)(2x+1)\geq 4x-6$

$x^2-4x+4-4x^2+1\geq 4x-6$

$-3x^2-8x+11\geq 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$$-3x^2-8x+11=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64+132}}{-6}=\frac{8\pm 14}{-6}\Rightarrow\begin{cases} x_1=-\dfrac{11}{3} \\ x_2=1\end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right]$, $\left[-\frac{11}{3},+1\right]$ y $[+1,+\infty)$.

Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right]\Rightarrow x=-10\Rightarrow -3\cdot(-10)^2-8\cdot(-10)+11=-300+80+11<0$
- $\left[-\frac{11}{3},+1\right]\Rightarrow x=0\Rightarrow -3\cdot 0^2-8\cdot 0+11=11>0$
- $[+1,+\infty)\Rightarrow x=3\Rightarrow -3\cdot 3^2-8\cdot 3+11=-27-24+11<0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $x\in\left[-\frac{11}{3},+1\right]$

b) $(x-3)(2x-1)-(x+2)(2-x)>7x$

$2x^2-x-6x+3-4+x^2>7x$

$3x^2-14x-1>0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$3x^2-14x-1=0$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{196+12}}{6}=\frac{14\pm\sqrt{208}}{6}=\frac{14\pm 4\sqrt{13}}{6}=\frac{7\pm 2\sqrt{13}}{3}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{7+2\sqrt{13}}{3} \\ x_2=\dfrac{7-2\sqrt{13}}{3}\end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty,\frac{7-2\sqrt{13}}{3}\right)$, $\left(\frac{7-2\sqrt{13}}{3},\frac{7+2\sqrt{13}}{3}\right)$ y $\left(\frac{7+2\sqrt{13}}{3},+\infty\right)$.

Acotamos el valor de los extremos de los intervalos considerando que $7<2\sqrt{13}<8$ y por tanto:

$$-1<\frac{7-8}{3}<\frac{7-2\sqrt{13}}{3}<0<\frac{7+2\sqrt{13}}{3}<\frac{7+8}{3}=5.$$

Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty,\dfrac{7-2\sqrt{13}}{3}\right)\Rightarrow x=-1\Rightarrow 3\cdot(-1)^2-14\cdot(-1)-1=3+14-1>0$
- $\left(\dfrac{7-2\sqrt{13}}{3},\dfrac{7+2\sqrt{13}}{3}\right)\Rightarrow x=0\Rightarrow 3\cdot 0-14\cdot 0-1<0$
- $\left(\dfrac{7+2\sqrt{13}}{3},+\infty\right)\Rightarrow x=5\Rightarrow 3\cdot 5^2-14\cdot 5-1=75-70-1-1<0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $x\in\left(-\infty,\dfrac{7-2\sqrt{13}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7+2\sqrt{13}}{3},+\infty\right)$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁGINAS 86-88

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $\dfrac{-1+(2x-3)}{2}=1-\dfrac{3-x}{4}$

$$\frac{2x-4}{2}=1-\frac{3-x}{4}$$
$$\frac{4x-8}{4}=\frac{4}{4}-\frac{3-x}{4}$$
$$4x-8=4-3+x$$
$$4x-x=4-3+8$$
$$3x=9 \quad\Rightarrow\quad x=3$$

b) $\dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{6(x+3)}{5}=x-\dfrac{1+5x}{4}$

$$\frac{3x-1}{2}-\frac{6x+18}{5}=x-\frac{1+5x}{4}$$
$$\frac{30x-10}{20}-\frac{24x+72}{20}=\frac{20x}{20}-\frac{5+25x}{20}$$
$$30x-10-24x-72=20x-5-25x$$
$$30x-24x-20x+25x=-5+10+72$$
$$11x=77$$
$$x=\frac{77}{11}\quad\Rightarrow\quad x=7$$

c) $4-\left(x-\dfrac{2x-3}{3}\right)+7(x+1)=0$

$$4-x+\frac{2x-3}{3}+7x+1=0$$

$$12-3x+2x-3+21x+3=0$$
$$-3x+2x+21x=-12+3-3$$
$$20x=-12$$
$$x=-\frac{12}{20}=-\frac{3}{5}$$

2. Las siguientes ecuaciones son de primer grado. Compruébalo y resuélvelas

a) $2x^2-(x+3)(x-3)=(x+2)^2$

$$2x^2-x^2+9=x^2+4x+4$$
$$-4x=-5 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5}{4}$$

b) $x-4(x-1)(x+2)=x+5-(2x-1)^2$

$$x-4x^2-8x+4x-8=x+5-4x^2+4x-1$$
$$-8x=12$$
$$x=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}$$

c) $-5x^2+(2x+3)(-2x+3)=2x-(3x-1)^2$

$$-5x^2-4x^2+9=2x-9x^2+6x-1$$
$$-8x=-10$$
$$x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

3. Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y el número de soluciones:

a) $2x^2+3x-5=0$

El discriminante de la ecuación es $\Delta=9+40=49>0$. Por tanto, tiene 2 soluciones.

b) $-x(x-2)=3x^2-x+2$

Desarrollamos la ecuación para encontrar su forma general:

$$-x^2+2x=3x^2-x+2$$
$$-x^2-3x^2+2x+x-2=0$$
$$-4x^2+3x-2=0$$

El discriminante es $\Delta=9-32=-23<0$. Por tanto, la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$.

c) $(x-1)(x+1)-2x=-2$

Desarrollamos la ecuación para encontrar su forma general:

$$x^2-1-2x=-2$$
$$x^2-2x+1=0$$

El discriminante de la ecuación es $\Delta=4-4=0$. Por tanto, la ecuación tiene una única solución.

4. Determina el valor de a para que la ecuación de segundo grado $9x^2+ax+4=0$ tenga una única solución:

El discriminante de la ecuación, $\Delta=b^2-4ac=a^2-144$ tiene que ser igual a cero.

$a^2-144=0 \Leftrightarrow a^2=144 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{144}=\pm 12$

Esto es si $a=+12$ o $a=-12$, entonces la ecuación tiene una única solución.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2-x-15=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+120}}{4}=\frac{1\pm 11}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{12}{4}=+3\\[2mm] x_2=-\dfrac{10}{4}=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

b) $2x^2+x-6=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{1\pm 7}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{8}{4}=+2\\[2mm] x_2=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

c) $25x^2-5x-2=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+200}}{50}=\frac{5\pm 15}{50}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}\\[2mm] x_2=-\dfrac{10}{50}=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

d) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}=0$

$$x=\frac{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}{\frac{2}{4}}=\frac{-\frac{1}{2}\pm 1}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1\\[2mm] x_2=\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3\end{cases}$$

6. Las siguientes ecuaciones de segundo grado son incompletas. Resuélvelas:

a) $(x+2)(2x-3)=x(x+1)$

$2x^2-3x+4x-6=x^2+x$

$2x^2-x^2-3x+4x-x-6=0$

$x^2-6=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

b) $(2x-3)^2-(x-3)(x+3)=18$

$4x^2-12x+9-x^2+9=18$

$3x^2-12x=0$

$3x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2-4=0 \Leftrightarrow x_2=4 \end{cases}$

c) $2x+3-(2x-1)(2x+1)=(x-2)^2$

$2x+3-4x^2+1=x^2-4x+4$

$-5x^2+6x=0$

$x(-5x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ -5x_2+6=0 \Leftrightarrow x_2=\dfrac{6}{5} \end{cases}$

d) $3x-x(3x-5)=3-(x-4)^2$

$3x-3x^2+5x=3-x^2+8x-16$

$-2x^2=-13$

$+2x^2=+13 \Rightarrow \begin{cases} x_1=+\sqrt{\dfrac{13}{2}} \\ x_2=-\sqrt{\dfrac{13}{2}} \end{cases}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $11x+2(x-2)^2-(3x+1)^2=7-(x+1)^2$

$11x+2x^2-8x+8-9x^2-6x-1=7-x^2-2x-1$

$+2x^2-9x^2+x^2+11x-8x-6x+2x+8-1-7+1=0$

$-6x^2-x+1=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\dfrac{1\pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2} \\ x_2=-\dfrac{4}{12}=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

b) $(x+1)^2-(1-2x)^2=5x-2$

$x^2+2x+1-1+4x-4x^2=5x-2$

$x^2-4x^2+2x+4x-5x+1-1+2=0$

$-3x^2+x+2=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-6}=\dfrac{-1\pm 5}{-6} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3} \\ x_2=+\dfrac{6}{6}=+1 \end{cases}$

c) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{41-3x}{4}$

$$\frac{x^2}{4}+3x+9-x^2+x-\frac{1}{4}=\frac{41-3x}{4}$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{12x}{4}+\frac{36}{4}-\frac{4x^2}{4}+\frac{4x}{4}-\frac{1}{4}=\frac{41-3x}{4}$$

$$x^2+12x+36-4x^2+4x-1=41-3x$$

$$x^2-4x^2+12x+4x+3x+36-1-41=0$$

$$-3x^2+19x-6=0$$

$$x=\frac{-19\pm\sqrt{361-72}}{-6}=\frac{-19\pm17}{-6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-2}{-6}=+\frac{1}{3}\\ x_2=\frac{-36}{-6}=+6\end{cases}$$

d) $\left(\frac{1}{4}x+2\right)^2-\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}$

$$\frac{x^2}{16}+x+4-\frac{4x^2}{9}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

Multiplicando por $144=mcm(4,9,16)$:

$$9x^2+144x+576-64x^2+36=612$$

$$9x^2-64x^2+144x+576+36-612=0$$

$$-55x^2+144x-576=0$$

El discriminante de esta ecuación es $\Delta=144^2-4\cdot55\cdot576<0$ y por tanto no tiene solución.

OTROS TIPOS DE ECUACIONES

8. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $2x^4-5x^2-12=0$

Realizando el cambio $z=x^2$ obtenemos: $2z^2-5z-12=0$

Por lo que: $z=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{4}=\frac{5\pm11}{4}\Rightarrow\begin{cases}z_1=4\\ z_2=-\frac{3}{2}\end{cases}$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases}x^2=4\Rightarrow x=\pm2\\ x^2=-\frac{3}{2}\Rightarrow x\notin\mathbb{R}\end{cases}$$

Soluciones: $+2,-2$

b) $4x^4-9x^2+2=0$

Realizando el cambio $z=x^2$ obtenemos: $4z^2-9z+2=0$

Por lo que: $z=\dfrac{9\pm\sqrt{81-32}}{8}=\dfrac{9\pm 7}{8}\Rightarrow\begin{cases} z_1=2 \\ z_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Deshaciendo el cambio:

$\begin{cases} x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ x^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}\end{cases}$ Soluciones: $+\sqrt{2},-\sqrt{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$

c) $x^4+13x^2+36=0$

Realizando el cambio $z=x^2$ obtenemos: $z^2+13z+36=0$

Por lo que: $z=\dfrac{-13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\dfrac{-13\pm 5}{2}\Rightarrow\begin{cases} z_1=-4 \\ z_2=-9\end{cases}$

Puesto que x^2 no puede ser negativo, no existe ninguna solución a la ecuación.

d) $3x^4-243=0$

Realizando el cambio $z=x^2$ obtenemos: $3z^2-243=0$

Por lo que: $3z^2=243\Rightarrow z^2=\dfrac{243}{3}\Rightarrow z^2=81\Rightarrow z=\pm 9$

Deshaciendo el cambio:

$\begin{cases} x^2=9\Rightarrow x=\pm 3 \\ x^2=-9\Rightarrow x\notin\mathbb{R}\end{cases}$ Soluciones: $+3,-3$

e) $12x^2=3x^4$

Realizando el cambio $z=x^2$ obtenemos: $12z=3z^2$

Por lo que: $3z^2-12z=0\Rightarrow 3z(z-4)=0\Rightarrow\begin{cases} z_1=0 \\ z_2=4\end{cases}$

Deshaciendo el cambio:

$\begin{cases} x^2=0\Rightarrow x=0 \\ x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\end{cases}$ Soluciones: $0,+2,-2$

f) $x^4-5x^2+6=0$

Realizando el cambio $z=x^2$ obtenemos: $z^2-5z+6=0$

Por lo que: $z=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm 1}{2}\Rightarrow\begin{cases} z_1=3 \\ z_2=2\end{cases}$

Deshaciendo el cambio:

$\begin{cases} x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$ Soluciones: $+\sqrt{2},-\sqrt{2},+\sqrt{3},-\sqrt{3}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $\left(x^2+1\right)^2+\left(2x^2+3\right)^2=6x^4$

$x^4+2x^2+1+4x^4+12x^2+9=6x^4$

$-x^4+14x^2+10=0$

Realizando el cambio $z=x^2$ obtenemos: $-z^2+14z+10=0$

Por lo que:

$$z=\frac{-14\pm\sqrt{196+40}}{-2}=\frac{-14\pm\sqrt{236}}{-2}\Rightarrow\begin{cases}z_1=-\dfrac{-14+\sqrt{236}}{2}=\dfrac{14-\sqrt{236}}{2}=7-\sqrt{59}\\ z_2=-\dfrac{-14-\sqrt{236}}{2}=\dfrac{14+\sqrt{236}}{2}=7+\sqrt{59}\end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases}x^2=7-\sqrt{59}<0\Rightarrow x\notin\mathbb{R}\\ x^2=7+\sqrt{59}\Rightarrow x=\pm\sqrt{7+\sqrt{59}}\end{cases}$$ Soluciones: $+\sqrt{7+\sqrt{59}},-\sqrt{7+\sqrt{59}}$

b) $2\left(x^2-2\right)^2-\left(x^2+3\right)^2+13+7x^2=0$

$2x^4-8x^2+8-x^4-6x^2-9+13+7x^2=0$

$x^4+7x^2+12=0$

Realizando el cambio $z=x^2$ obtenemos: $z^2+7z+12=0$

Por lo que: $z=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\dfrac{-7\pm1}{2}\Rightarrow\begin{cases}z_1=-3\\ z_2=-4\end{cases}$

Ambas son negativas, por lo que la ecuación no tiene solución.

c) $\left(2x^2-1\right)^2=1-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

$4x^4-4x^2+1=1-x^4+1$

$5x^4-4x^2-1=0$

Realizando el cambio $z=x^2$ obtenemos: $5z^2-4z-1=0$

Por lo que: $z=\dfrac{4\pm\sqrt{16+20}}{10}=\dfrac{4\pm6}{10}\Rightarrow\begin{cases}z_1=+1\\ z_2=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases}x^2=1\Rightarrow x=\pm1\\ x^2=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow x\notin\mathbb{R}\end{cases}$$ Soluciones: $+1,-1$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-x^2-6x=0$

Sacando factor común tenemos: $x\left(x^2-x-6\right)=0$. Por tanto, $x_1=0$ o $x^2-x-6x=0$.

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{1\pm5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_2=3\\ x_3=-2\end{cases}$ Soluciones: $0,+3,-2$

b) $4x^4-4x^3+x^2=0$

Sacando factor común tenemos: $x^2\left(4x^2-4x+1\right)=0$. Por tanto, $x_1=0$ o $4x^2-4x+1=0$.

Esta última se trata de una identidad notable, de modo que:

$(2x-1)^2=0\Rightarrow2x-1=0\Rightarrow x_2=\dfrac{1}{2}$ Soluciones: $0,+\dfrac{1}{2}$

c) $x^4-4x^3+4x^2=0$

Sacando factor común tenemos: $x^2\left(x^2-4x+4\right)=0$. Por tanto, $x_1=0$ o $x^2-4x+4=0$. Esta última se trata de una identidad notable, de modo que:

$(x-2)^2=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x_2=2$ Soluciones: $0,+2$

d) $x^5-8x^3=0$

Sacando factor común tenemos: $x^3\left(x^2-8\right)=0$. Por tanto, $x_1=0$ o $x^2-8=0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$x^2-8=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$ Soluciones: $0,+2\sqrt{2},-2\sqrt{2}$

e) $9x^4-x^2=0$

Sacando factor común tenemos: $x^2\left(9x^2-1\right)=0$. Por tanto, $x_1=0$ o $9x^2-1=0$. Esta última se trata de una identidad notable, de modo que:

$$(3x+1)(3x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{3}\\ x_2=+\dfrac{1}{3}\end{cases}$$ Soluciones: $0,+\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$

f) $x^6+x^4-2x^2=0$

Sacando factor común tenemos: $x^2\left(x^4+x^2-2\right)=0$. Por tanto, $x_1=0$ o $x^4+x^2-2=0$. Para resolver la ecuación bicuadrática realizamos el cambio $x^2=z$:

$z^2+z-2=0$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}\Rightarrow\begin{cases}z_1=1\\ z_2=-2\end{cases}$$

Deshacemos el cambio:

$$\begin{cases}x^2=1\Rightarrow x=\pm1\\ x^2=-2\Rightarrow x\notin\mathbb{R}\end{cases}$$ Soluciones: $0,+1,-1$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$

Para resolver esta ecuación debemos factorizar el polinomio $P(x)=2x^4-x^3-6x^2-x+2$.

Dividimos por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & +2\\
-1 & & -2 & +3 & +3 & -2\\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & +2 & \boxed{0}\\
-1 & & -2 & +5 & -2 & \\
\hline
 & 2 & -5 & +2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Por tanto, $P(x)=(x+1)^2\left(2x^2-5x+2\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ 2x^2-5x+2=0\end{cases}$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_2=2\\ x_3=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$ Soluciones: $-1,\ 2,\ \frac{1}{2}$

b) $\left(x^2+x+6\right)\left(x^2-4\right)=0$

El producto de dos números es igual a 0 si alguno de ellos es 0. Nos fijamos en el primer paréntesis y observamos que no puede ser nulo ya que:

$$x^2+x+6=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{2}\notin\mathbb{R}$$

Por tanto, las soluciones a la ecuación son las de $x^2-4=0$ que son: $+2,-2$.

c) $\left(x^2-2\right)^2+\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)+2=0$

$$x^4-4x^2+4+x^4+2x^2-x^2-2+2=0$$

$$x^4+x^4-4x^2+2x^2-x^2+4-2+2=0$$

$$2x^4-3x^2+4=0$$

Realizamos el cambio $x^2=z$:

$$2z^2-3z+4=0$$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{9-32}}{4}\notin\mathbb{R}$$

La ecuación no tiene ninguna solución.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{3x^2-12}{x^2+3x}=0$

Para que una fracción sea igual a 0, el numerador debe ser cero:

$$3x^2-12=0\Leftrightarrow 3x^2=12\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$$

Debemos comprobar que el denominador no se anula, ya que en caso contrario serían soluciones no válidas:

$$x=+2\Rightarrow 2^2+3\cdot2\neq0$$

$$x=-2\Rightarrow(-2)^2+3\cdot(-2)\neq0$$

Soluciones: $+2,-2$

b) $\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{x}{2x-3}$

Dos fracciones son equivalentes si al multiplicarlas en cruz se obtiene el mismo resultado:

$$(x+2)(2x-3)=x^2$$

$$2x^2-3x+4x-6=x^2$$

$$x^2+x-6=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-3\end{cases}$$

Es inmediato comprobar que las soluciones son válidas y no anulan los denominadores.

c) $x-3=\dfrac{3x^2+3x+11}{x+3}$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=\frac{3x^2+3x+11}{x+3}$$

$$x^2-9=3x^2+3x+11$$

$$2x^2+3x+20=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-160}}{4}\notin\mathbb{R}$$

La ecuación no tiene solución en los números reales.

d) $2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}=0$

$$\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{3}{x^2}=0$$

$$2x^2+5x-3=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\x_2=-3\end{cases}$$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x^4+x^2-2}{1+x}=1-x$

$$x^4+x^2-2=(1-x)(1+x)$$

$$x^4+x^2-2=1-x^2$$

$$x^4+2x^2-3=0$$

Realizamos el cambio $x^2=z$ y obtenemos: $z^2+2z-3=0$

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}\Rightarrow\begin{cases}z_1=1\\z_2=-3\end{cases}$$

Descartamos la solución negativa y deshacemos el cambio:

$$x^2=1\ \Rightarrow x=\pm 1$$

La solución $x=-1$ no es válida ya que anula al denominador. Así, la única solución es $x=+1$.

b) $\dfrac{3x+3}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{9-x}{x-1}$

$$\frac{3x+3}{(x+1)(x-1)}+\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(9-x)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$3x+3+2x^2-2x=9x+9-x^2-x$$

$$3x^2-7x-6=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+72}}{6}=\frac{7\pm 11}{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

c) $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{16}{x^2-1}$

$\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{16}{(x+1)(x-1)}$

$x^2-2x+1=16$

$x^2-2x-15=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\dfrac{2\pm 8}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=5\\x_2=-3\end{cases}$

d) $\dfrac{3x}{x-3}-\dfrac{4}{x}=3$

$\dfrac{3x^2}{x(x-3)}-\dfrac{4(x-3)}{x(x-3)}=\dfrac{3x(x-3)}{x(x-3)}$

$3x^2-4x+12=3x^2-9x$

$5x+12=0$

$x=-\dfrac{12}{5}$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x-\sqrt{x}-2=0$

$3x-2=\sqrt{x}$

$(3x-2)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2$

$9x^2-12x+4=x$

$9x^2-13x+4=0$

$x=\dfrac{13\pm\sqrt{169-144}}{18}=\dfrac{13\pm 5}{18}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=\dfrac{4}{9}\end{cases}$

b) $x-2\sqrt{x}-3=0$

$x-3=2\sqrt{x}$

$(x-3)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2$

$x^2-6x+9=4x$

$x^2-10x+9=0$

$x=\dfrac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\dfrac{10\pm 8}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=9\\x_2=1\end{cases}$

c) $x-1=\sqrt{x+5}$

$(x-1)^2=\left(\sqrt{x+5}\right)^2$

$$x^2-2x+1=x+5$$
$$x^2-3x-4=0$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4\\x_2=-1\end{cases}$$

d) $3-x=\sqrt{8(1-x)}$
$$(3-x)^2=\left(\sqrt{8-8x}\right)^2$$
$$9-6x+x^2=8-8x$$
$$x^2+2x+1=0$$
$$(x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-1$$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{1-x}+1=\sqrt{12+x}$
$$\left(\sqrt{1-x}+1\right)^2=\left(\sqrt{12+x}\right)^2$$
$$1-x+2\sqrt{1-x}+1=12+x$$
$$2\sqrt{1-x}=10+2x$$
$$\left(2\sqrt{1-x}\right)^2=(10+2x)^2$$
$$4-4x=100+40x+4x^2$$
$$0=4x^2+44x+96$$
$$0=x^2+11x+24$$
$$x=\frac{-11\pm\sqrt{121-96}}{2}=\frac{-11\pm5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-3\\x_2=-8\end{cases}$$

b) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2+5}$
$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2$$
$$2x+1=x^2+5$$
$$-x^2+2x-4=0$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{-2}\notin\mathbb{R}$$

La ecuación no tiene ninguna solución.

c) $\sqrt{x}+3=\sqrt{x+23}$
$$\left(\sqrt{x}+3\right)^2=\left(\sqrt{x+23}\right)^2$$
$$x+6\sqrt{x}+9=x+23$$
$$6\sqrt{x}=14$$

$$\sqrt{x}=\frac{7}{3}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$x=\frac{49}{9}$$

d) $$\frac{\sqrt{2x+3}}{1+\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2}$$

$$2\sqrt{2x+3}=3\left(1+\sqrt{x-2}\right)$$

$$\left(2\sqrt{2x+3}\right)^2=9\left(1+\sqrt{x-2}\right)^2$$

$$4(2x+3)=9\left(1+x-2+2\sqrt{x-2}\right)$$

$$8x+12=-9+9x+18\sqrt{x-2}$$

$$21-x=18\sqrt{x-2}$$

$$(21-x)^2=\left(18\sqrt{x-2}\right)^2$$

$$441-42x+x^2=324(x-2)$$

$$441-42x+x^2=324x-648$$

$$x^2-366x+1089=0$$

$$x=\frac{366\pm\sqrt{129600}}{2}=\frac{366\pm 360}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=363\\ x_2=3\end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

16. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de igualación:

a) $$\begin{cases}3x+4y=2 & \Rightarrow y=\dfrac{2-3x}{4}\\ 5x-3y=13 & \Rightarrow y=\dfrac{5x-13}{3}\end{cases}$$

Igualando:

$$\frac{2-3x}{4}=\frac{5x-13}{3}$$

$$6-9x=20x-52$$

$$-29x=-58$$

$$x=2$$

Hallamos y sustituyendo en alguna de las ecuaciones despejadas:

$$y=\frac{2-3\cdot 2}{4}=\frac{2-6}{4}=-1$$ Solución: $$\begin{matrix}x=2\\ y=-1\end{matrix}$$

b) $\begin{cases} x+3y=-9 & \Rightarrow x=-3y-9 \\ 5x=7-2y & \Rightarrow x=\dfrac{7-2y}{5} \end{cases}$

Igualando:

$-3y-9=\dfrac{7-2y}{5}$

$-15y-45=7-2y$

$-13y=52 \quad \Rightarrow \quad y=-4$

Hallamos x sustituyendo en una de las dos ecuaciones despejadas:

$x=-3y-9=12-9=3$ Solución: $\begin{matrix} x=3 \\ y=-4 \end{matrix}$

c) $\begin{cases} 4x+3y=-7 \Rightarrow y=\dfrac{-4x-7}{3} \\ 8x+3y=-5 \Rightarrow y=\dfrac{-8x-5}{3} \end{cases}$

Igualando:

$\dfrac{-4x-7}{3}=\dfrac{-8x-5}{3}$

$-4x-7=-8x-5$

$4x=2 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{2}$

Hallamos y sustituyendo en una de las dos ecuaciones despejadas:

$y=\dfrac{-4x-7}{3}=\dfrac{-2-7}{3}=-3$ Solución: $\begin{matrix} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-3 \end{matrix}$

d) $\begin{cases} x+2y=-2 & \Rightarrow x=-2y-2 \\ 8x+4y=-7 & \Rightarrow x=\dfrac{-4y-7}{8} \end{cases}$

Igualando:

$-2y-2=\dfrac{-4y-7}{8}$

$-16y-16=-4y-7$

$-12y=9$

$y=-\dfrac{9}{12}=-\dfrac{3}{4}$

Hallamos x sustituyendo en una de las dos ecuaciones despejadas:

$x=-2y-2=\dfrac{3}{2}-2=\dfrac{1}{2}$ Solución: $\begin{matrix} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{4} \end{matrix}$

17. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 5x+4y=1 \quad \Rightarrow y=\dfrac{1-5x}{4} \\ 7x-4y=3 \end{cases}$

Sustituimos el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación:

$$7x-4\cdot\frac{1-5x}{4}=3$$

$$7x-1+5x=3$$

$$12x=4 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Hallamos el valor de y sustituyendo en la expresión despejada:

$$y=\frac{1-5x}{4}=\frac{1-\frac{5}{3}}{4}=-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$$

Solución: $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{6}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x}{2}+\dfrac{1}{5}y=-\dfrac{3}{20} \\ 5x-4y=-8 \Rightarrow y=\dfrac{5x+8}{4} \end{cases}$

Sustituimos el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación:

$$\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5x+8}{4}=-\frac{3}{20}$$

$$\frac{30x}{20}+\frac{5x+8}{20}=-\frac{3}{20}$$

$$30x+5x+8=-3$$

$$35x=-11 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{11}{35}$$

Hallamos el valor de y sustituyendo en la expresión despejada:

$$y=\frac{5x+8}{4}=\frac{-\frac{11}{7}+8}{4}=\frac{45}{28}$$

Solución: $x=-\frac{11}{35}$, $y=\frac{45}{28}$

c) $\begin{cases} 2x-5y=1 \quad \Rightarrow y=\dfrac{2x-1}{5} \\ -7x+10y=-4 \end{cases}$

Sustituimos el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación:

$$-7x+10\cdot\frac{2x-1}{5}=-4$$

$$-7x+4x-2=-4$$

$$-3x=-2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{3}$$

Hallamos el valor de y sustituyendo en la expresión despejada:

$$y=\frac{2x-1}{5}=\frac{\frac{4}{3}-1}{5}=\frac{1}{15}$$ Solución: $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{15}$

d) $\begin{cases}5x-2y=-23 \\ -3x+5y=29\end{cases}$ $\Rightarrow y=\frac{5x+23}{2}$

Sustituimos el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación:

$$-3x+5\cdot\frac{5x+23}{2}=29$$

$$-6x+25x+115=58$$

$$19x=-57 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{57}{19}=-3$$

Hallamos el valor de y sustituyendo en la expresión despejada:

$$y=\frac{5x+23}{2}=\frac{-15+23}{2}=\frac{8}{2}=4$$ Solución: $x=-3$, $y=4$

18. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

a) $\begin{cases}3x-2y=-12 \\ -6x+5y=27\end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 2 tenemos:

$$\begin{cases}6x-4y=-24 \\ -6x+5y=27\end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $y=3$

Multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda por 2 tenemos:

$$\begin{cases}15x-10y=-60 \\ -12x+10y=54\end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $3x=-6\Rightarrow x=-2$.

Solución: $x=-2$, $y=3$

b) $\begin{cases}5x+3y=12 \\ 2x-5y=11\end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda por 2 tenemos:

$$\begin{cases}25x+15y=60 \\ 6x-15y=33\end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $31x=93\Rightarrow x=3$.

Multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por -5 tenemos:

$$\begin{cases}10x+6y=24 \\ -10x+25y=-55\end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $31y=-31\Rightarrow y=-1$.

Solución: $\begin{matrix} x=3 \\ y=-1 \end{matrix}$

c) $\begin{cases} 2x+5y=-16 \\ 8x=3y-18 \end{cases}$

Preparamos el sistema para poder aplicar el método:

$\begin{cases} 2x+5y=-16 \\ 8x-3y=-18 \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 5 tenemos:

$\begin{cases} 6x+15y=-48 \\ 40x-15y=-90 \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $46x=-138 \Rightarrow x=-3$.

Multiplicando la primera ecuación por -4:

$\begin{cases} -8x-20y=64 \\ 8x-3y=-18 \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $-23y=46 \Rightarrow y=-2$.

Solución: $\begin{matrix} x=-3 \\ y=-2 \end{matrix}$

d) $\begin{cases} 5x-3y=-3 \\ 3x+4y=\dfrac{31}{15} \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 4 y la segunda por 3:

$\begin{cases} 20x-12y=-12 \\ 9x+12y=\dfrac{31}{5} \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $29x=-\dfrac{29}{5} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{5}$.

Multiplicando la primera ecuación por -3 y la segunda por 5:

$\begin{cases} -15x+9y=9 \\ 15x+20y=\dfrac{31}{3} \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene: $29y=\dfrac{58}{3} \Rightarrow y=\dfrac{2}{3}$

Solución: $\begin{matrix} x=-\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{matrix}$

SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

19. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x + y = -3 \\ xy = -6 \end{cases}$

Despejando en la segunda ecuación, tenemos:

$$y = -\frac{6}{x}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3x - \frac{6}{x} = -3$$

$$3x^2 - 6 = -3x$$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{6} = \frac{-3 \pm 9}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Para cada solución de x tenemos que hallar el correspondiente valor de y:

$x_1 = 1 \quad \Rightarrow y_1 = -6$

$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = +3$

b) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ xy = 32 \end{cases}$

Despejando en la segunda ecuación, tenemos:

$$y = \frac{32}{x}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3x + \frac{32}{x} = -4$$

$$3x^2 + 32 = -4x$$

$$3x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+384}}{6} = \frac{-4 \pm 20}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Para cada solución de x tenemos que hallar el correspondiente valor de y:

$x_1 = 1 \quad \Rightarrow y_1 = 32$

$x_2 = -4 \Rightarrow y_2 = -8$

c) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -\frac{1}{5}xy = 1 \end{cases}$

Despejando en la segunda ecuación, tenemos:

$$y = -\frac{5}{x}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3x-\frac{5}{x}=2$$

$$3x^2-5=2x$$

$$3x^2-2x-5=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{6}=\frac{2\pm 8}{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\\x_2=-1\end{cases}$$

Para cada solución de x tenemos que hallar el correspondiente valor de y :

$$x_1=\frac{5}{3}\quad\Rightarrow y_1=-3$$

$$x_2=-1\Rightarrow y_2=+5$$

d) $\begin{cases}3x^2-2y^2=-6\\5x^2-3y^2=-7\end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por -3 y la segunda por 2 tenemos:

$$\begin{cases}-9x^2+6y^2=18\\10x^2-6y^2=-14\end{cases}$$

Sumando, se obtiene: $x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$.

Para cada solución de x tenemos que hallar el correspondiente valor de y :

$$x=+2\Rightarrow 3\cdot 4-2y^2=-6\Rightarrow y^2=9\Rightarrow y=\pm 3$$

$$x=-2\Rightarrow 3\cdot 4-2y^2=-6\Rightarrow y^2=9\Rightarrow y=\pm 3$$

Las soluciones son:

$$x_1=+2\Rightarrow y_1=+3$$

$$x_2=+2\Rightarrow y_2=-3$$

$$x_3=-2\Rightarrow y_3=+3$$

$$x_4=-2\Rightarrow y_4=-3$$

e) $\begin{cases}3x+4y=17\\-\frac{1}{7}xy=1\end{cases}$

Despejando en la segunda ecuación, tenemos: $y=-\frac{7}{x}$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3x-\frac{28}{x}=17$$

$$3x^2-28=17x$$

$$3x^2-17x-28=0$$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{289+336}}{6}=\frac{17\pm 25}{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{42}{6}=7\\x_2=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

Para cada solución de x tenemos que hallar el correspondiente valor de y :

$$x_1 = 7 \quad \Rightarrow y_1 = -1$$

$$x_2 = -\frac{4}{3} \ \Rightarrow y_2 = \frac{21}{4}$$

f) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 5x = -12 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$

Despejando en la segunda ecuación, tenemos: $y = \dfrac{3x+5}{2}$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$2x^2 - 3\cdot\left(\frac{3x+5}{2}\right)^2 + 5x = -12$$

$$2x^2 - \frac{3\cdot\left(9x^2 + 30x + 25\right)}{4} + 5x = -12$$

$$8x^2 - 27x^2 - 90x - 75 + 20x = -48$$

$$-19x^2 - 70x - 27 = 0$$

Multiplicamos por -1 ambos términos de la ecuación para eliminar los signos:

$$19x^2 + 70x + 27 = 0$$

$$x = \frac{-70 \pm \sqrt{4900 - 2052}}{38} = \frac{-70 \pm \sqrt{2848}}{38} = \frac{-70 \pm 4\sqrt{178}}{38} = \frac{-35 \pm 2\sqrt{178}}{19}$$

Para cada solución de x tenemos que hallar el correspondiente valor de y :

$$x_1 = \frac{-35 + 2\sqrt{178}}{19} \quad \Rightarrow y_1 = \frac{-10 + 6\sqrt{178}}{38} = \frac{-5 + 3\sqrt{178}}{19}$$

$$x_2 = \frac{-35 - 2\sqrt{178}}{19} \Rightarrow y_2 = \frac{-10 - 6\sqrt{178}}{38} = \frac{-5 - 3\sqrt{178}}{19}$$

INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

20. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x - 3 \le -2 + 7x$

$$2x - 7x \le -2 + 3$$

$$-5x \le 1$$

$$x \ge -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right)$$

b) $3 + 2(1 - 5x) \ge -7x + 4$

$$3 + 2 - 10x \ge -7x + 4$$

$$-10x + 7x \ge 4 - 3 - 2$$

$$-3x \ge -1$$

$$x \le \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$$

c) $\dfrac{2x-1}{4}+\dfrac{3(2-x)}{2}\geq 1$

$\dfrac{2x-1}{4}+\dfrac{12-6x}{4}\geq\dfrac{4}{4}$

$2x-1+12-6x\geq 4$

$2x-6x\geq 4+1-12$

$-4x\geq -7$

$x\leq\dfrac{7}{4}\quad\Rightarrow\quad x\in\left(-\infty,\dfrac{7}{4}\right]$

21. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{2x-1}{4}-x<2$

$2x-1-4x<8$

$-2x<9\quad\Rightarrow\quad x>-\dfrac{9}{2}\quad\Rightarrow\quad x\in\left(-\dfrac{9}{2},+\infty\right)$

b) $\dfrac{1-3x}{2}-\dfrac{x+5}{6}\leq x+1$

$3-9x-x-5\leq 6x+6$

$-16x\leq 8$

$x\geq-\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

c) $\dfrac{1-x}{4}-\dfrac{2x+3}{8}\geq 1$

$2-2x-2x-3\geq 8$

$-4x\geq 9$

$x\leq-\dfrac{9}{4}\quad\Rightarrow\quad x\in\left(-\infty,-\dfrac{9}{4}\right]$

d) $\dfrac{1-2x}{5}\geq 1-x$

$1-2x\geq 5-5x$

$3x\geq 4$

$x\geq\dfrac{4}{3}\quad\Rightarrow\quad\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right)$

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

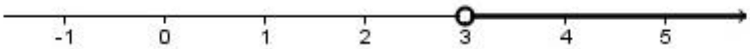
22. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $\begin{cases} 2x-1>3 & \Rightarrow 2x>4 \quad \Rightarrow x>2 \\ 3x+5<20 & \Rightarrow 3x<15 \Rightarrow x<5 \end{cases}$

La solución es el intervalo $x \in (2,5)$.

b) $\begin{cases} 2x-3<3 & \Rightarrow 2x>6 \Rightarrow x>3 \\ 4x+2<6x+3 & \Rightarrow -2x<1 \Rightarrow x>-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

La solución es el intervalo $x \in (3,+\infty)$

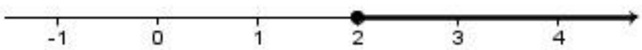


c) $\begin{cases} -x+5>3x-2 & \Rightarrow -4x>-7 \Rightarrow x<\dfrac{7}{4} \\ 3x-2 \le x+12 & \Rightarrow 2x \le 14 \Rightarrow x \le 7 \end{cases}$

La solución es el intervalo $x \in \left(-\infty, \dfrac{7}{4}\right)$

d) $\begin{cases} -2(x+1) \le 1 & \Rightarrow -2x-2 \le 1 \Rightarrow -2x \le 3 \Rightarrow x \ge -\dfrac{3}{2} \\ 1+(2x-1) \ge 4 & \Rightarrow 2x \ge 4 \Rightarrow x \ge 2 \end{cases}$

La solución es el intervalo $x \in [2,+\infty)$



23. Resuelve los siguientes sistemas inecuaciones:

a) $\begin{cases} -4x+2 \ge -3x+5 \Rightarrow -x \ge 3 \Rightarrow x \le 3 \\ 2x-3>4 \qquad \Rightarrow 2x>7 \Rightarrow x>\dfrac{7}{2} \\ -x+4>-3x+1 \quad \Rightarrow 2x>-3 \Rightarrow x>-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

El sistema, por tanto, no tiene solución ya que la intersección de los tres intervalos es vacía.

b) $\begin{cases} 3(x+1)-2(1+x) \le 7+2x \Rightarrow 3x+3-2-2x \le 7+2x \Rightarrow -x \le 6 \Rightarrow x \ge -6 \\ \dfrac{x-4}{3} \ge -2 \Rightarrow x-4 \ge -6 \Rightarrow x \ge -2 \\ \dfrac{3-2x}{5} < 1 \Rightarrow 3-2x<5 \Rightarrow -2x<2 \Rightarrow x>-1 \end{cases}$

La solución es por tanto $x \in (-1,+\infty)$.

c) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{4}-\dfrac{3x+1}{2} \leq x+1 \Rightarrow 2x-5-6x-2 \leq 4x+4 \Rightarrow -8x \leq 11 \Rightarrow x \geq -\dfrac{11}{8} \\ \dfrac{3x-2}{4}+\dfrac{2x-1}{3} < -\dfrac{x-1}{6} \Rightarrow 9x-6+8x-4 < -2x+2 \Rightarrow 19x < 12 \Rightarrow x < \dfrac{12}{19} \\ -\dfrac{x}{2} > -\dfrac{3}{5} \Rightarrow x < \dfrac{6}{5} \end{cases}$

La solución del sistema es $-\dfrac{11}{8} \leq x < \dfrac{12}{19} \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{11}{8}, \dfrac{12}{19}\right)$

24. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|2x-3| < 2 \Rightarrow -2 < 2x-3 < 2 \Rightarrow -1 < 2x < 5 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2} \Rightarrow x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

b) $2-|x| \geq 2 \Rightarrow 0 \geq |x| \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ (*Todos los valores de* x *son solución de la inecuación)*

c) $|2x-1| > 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 > 3 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \\ 2x-1 < -3 \Rightarrow 2x < -2 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$ Solución: $x \in (-\infty, -1) \cup (+2, +\infty)$

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

25. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado y representa gráficamente la solución:

a) $x^2 - 8 > 0$

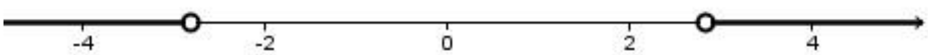
Resolvemos la ecuación asociada:

$x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty, -2\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}, +2\sqrt{2}\right)$ y $\left(+2\sqrt{2}, +\infty\right)$. Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty, -2\sqrt{2}\right) \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3)^2 - 8 > 0$
- $\left(-2\sqrt{2}, +2\sqrt{2}\right) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0^2 - 8 < 0$
- $\left(+2\sqrt{2}, +\infty\right) \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3^2 - 8 > 0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\infty, -2\sqrt{2}\right) \cup \left(+2\sqrt{2}, +\infty\right)$



b) $2x^2 - 6 < 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$2x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right)$ y $\left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$. Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 2 \cdot (-2)^2 - 6 = 8 - 6 > 0$

- $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right) \Rightarrow x=0 \Rightarrow 2\cdot 0^2-6<0$
- $\left(+\sqrt{3},+\infty\right) \Rightarrow x=2 \Rightarrow 2\cdot(2)^2-6=8-6>0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$

c) $x^2+6\leq 0$

Puesto que $x^2\geq 0$ para cualquier valor $x\in\mathbb{R}$, podemos concluir que la inecuación no tiene solución.

d) $x^2-12<0$

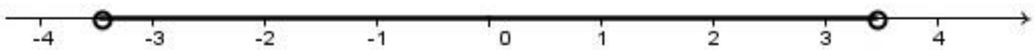
Resolvemos la ecuación asociada:

$x^2-12=0 \Rightarrow x^2=12 \Rightarrow x=\pm\sqrt{12} \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)$, $\left(-2\sqrt{3},+2\sqrt{3}\right)$ y $\left(+2\sqrt{3},+\infty\right)$. Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right) \Rightarrow x=-4 \Rightarrow (-4)^2-12>0$
- $\left(-2\sqrt{3},+2\sqrt{3}\right) \Rightarrow x=0 \Rightarrow 0^2-12<0$
- $\left(+2\sqrt{3},+\infty\right) \Rightarrow x=4 \Rightarrow 4^2-12>0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-2\sqrt{3},+2\sqrt{3}\right)$



26. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado y representa gráficamente la solución:

a) $x^2-6x+9\leq 0 \Rightarrow (x-3)^2\leq 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

b) $x^2-4x+4\leq 0 \Rightarrow (x-2)^2\leq 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

c) $3x^2-5x\geq 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$$3x^2-5x=0 \Rightarrow x(3x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $(-\infty,0]$, $\left[0,\dfrac{5}{3}\right]$ y $\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right)$.

Evaluamos en cada intervalo:

- $(-\infty,0] \Rightarrow x=-1 \Rightarrow 3\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)=3+5\geq 0$
- $\left[0,\dfrac{5}{3}\right] \Rightarrow x=1 \Rightarrow 3\cdot 1^2-5\cdot 1=3-5<0$
- $\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right) \Rightarrow x=2 \Rightarrow 3\cdot 2^2-5\cdot 2=12-10\geq 0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\infty,0\right]\cup\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$

d) $-2x+8x^2\geq 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$$-2x+8x^2=0\Rightarrow 2x\left(-1+4x\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty,0\right]$, $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ y $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$. Evaluamos en cada intervalo:

- $\left(-\infty,0\right]\Rightarrow x=-1\Rightarrow -2\cdot\left(-1\right)+8\cdot\left(-1\right)^2=2+8\geq 0$
- $\left[0,\frac{1}{4}\right]\Rightarrow x=\frac{1}{8}\Rightarrow -2\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}<0$
- $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)\Rightarrow x=1\Rightarrow -2\cdot 1+8\cdot 1^2\geq 0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\infty,0\right]\cup\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

e) $x^2-5x-14\leq 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$x^2-5x-14=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+56}}{2}=\frac{5\pm 9}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=7\\ x_2=-2\end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty,-2\right]$, $\left[-2,7\right]$ y $\left[7,+\infty\right)$. Evaluamos en cada intervalo:

- $\left(-\infty,-2\right]\Rightarrow x=-3\Rightarrow\left(-3\right)^2-5\cdot\left(-3\right)-14=9+15-14>0$
- $\left[-2,7\right]\Rightarrow x=0\Rightarrow 0^2-5\cdot 0-14\leq 0$
- $\left[7,+\infty\right)\Rightarrow x=10\Rightarrow 10^2-5\cdot 10-14=100-50-14>0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left[-2,7\right]$

f) $6x^2-x-1\geq 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$6x^2-x-1=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$, $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$ y $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. Evaluamos en cada intervalo:

- $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right] \Rightarrow x=-1 \Rightarrow 6(-1)^2-(-1)-1=6+1-1\geq 0$
- $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right] \Rightarrow x=0 \Rightarrow 6\cdot 0^2-0-1<0$
- $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right) \Rightarrow x=1 \Rightarrow 6\cdot 1^2-1-1\geq 0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

g) $-2x^2+18<0$

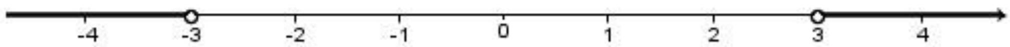
Resolvemos la ecuación asociada:

$-2x^2+18=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

Obtenemos los intervalos: $(-\infty,-3)$, $(-3,+3)$ y $(+3,+\infty)$. Evaluamos en cada intervalo:

- $(-\infty,-3) \Rightarrow x=-5 \Rightarrow -2\cdot(-5)^2+18=-50+18<0$
- $(-3,+3) \Rightarrow x=0 \Rightarrow 2\cdot 0^2-18>0$
- $(+3,+\infty) \Rightarrow x=+5 \Rightarrow -2\cdot 5^2+18=-50+18<0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $(-\infty,-3)\cup(+3,+\infty)$



h) $4-9x^2<0$

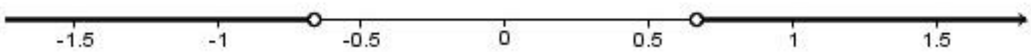
Resolvemos la ecuación asociada:

$4-9x^2=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{4}{9} \Rightarrow x=\pm\dfrac{2}{3}$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{3},+\dfrac{2}{3}\right)$ y $\left(+\dfrac{2}{3},+\infty\right)$. Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow x=-1 \Rightarrow 4-9\cdot(-1)^2<0$
- $\left(-\dfrac{2}{3},+\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow x=0 \Rightarrow 4-9\cdot 0^2>0$
- $\left(+\dfrac{2}{3},+\infty\right) \Rightarrow x=+1 \Rightarrow 4-9\cdot 1^2<0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(+\dfrac{2}{3},+\infty\right)$



27. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 3x + 10 > 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$x^2 - 3x + 10 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 40}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Puesto que el polinomio $P(x) = x^2 - 3x + 10$ nunca se anula, es siempre positivo o negativo. Basta comprobar en un único valor, por ejemplo $P(0) = 10 > 0$, para asegurar que la inecuación es cierta para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$

b) $-2x^2 + 13x < 15$

Resolvemos la ecuación asociada:

$-2x^2 + 13x - 15 = 0$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 120}}{-4} = \frac{-13 \pm 7}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ y $(5, +\infty)$. Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0^2 + 13 \cdot 0^2 < 15$
- $\left(\frac{3}{2}, 5\right) \Rightarrow x = 2 \Rightarrow -2 \cdot 2^2 + 13 \cdot 2 > 15$
- $(5, +\infty) \Rightarrow x = 10 \Rightarrow -2 \cdot 10^2 + 13 \cdot 10 < 15$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (5, +\infty)$

c) $4x^2 + 8x - 5 \leq 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$4x^2 + 8x - 5 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \frac{-8 \pm 12}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4} \\ x_2 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$, $\left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right]$ y $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Evaluamos en un punto de cada intervalo:

- $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \Rightarrow x = -3 \Rightarrow 4 \cdot (-3)^2 + 8 \cdot (-3) - 5 = 36 - 24 - 5 > 0$
- $\left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 5 \leq 0$

- $\left[\frac{1}{4},+\infty\right) \Rightarrow x=1 \Rightarrow 4\cdot 1^2+8\cdot 1-5>0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left[-\frac{5}{2},\frac{1}{4}\right]$

d) $21x^2+46x\le 7$

Resolvemos la ecuación asociada:

$21x^2+46x-7=0$

$$x=\frac{-46\pm\sqrt{2116+588}}{42}=\frac{-46\pm 52}{42} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{7} \\ x_2=-\frac{7}{3} \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right]$, $\left[-\frac{7}{3},\frac{1}{7}\right]$ y $\left[\frac{1}{7},+\infty\right)$.

Evaluamos en cada intervalo:

- $\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right] \Rightarrow x=-3 \Rightarrow 21\cdot(-3)^2+46\cdot(-3)>7$
- $\left[-\frac{7}{3},\frac{1}{7}\right] \Rightarrow x=0 \Rightarrow 21\cdot 0^2+46\cdot 0\le 7$
- $\left[\frac{1}{7},+\infty\right) \Rightarrow x=1 \Rightarrow 21\cdot 1^2+46\cdot 1>7$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left[-\frac{7}{3},\frac{1}{7}\right]$

28. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado y representa las soluciones en la recta real:

a) $2x(x+3)\ge -5(x+1)$

$2x^2+6x\ge -5x-5$

$2x^2+11x+5\ge 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$2x^2+11x+5=0$

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{121-40}}{4}=\frac{-11\pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=-5 \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $(-\infty,-5]$, $\left[-5,-\frac{1}{2}\right]$ y $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Evaluamos en cada intervalo:

- $(-\infty,-5] \Rightarrow x=-10 \Rightarrow 2\cdot(-10)^2+11\cdot(-10)+5=200-110+5\ge 0$
- $\left[-5,-\frac{1}{2}\right] \Rightarrow x=-1 \Rightarrow 2\cdot(-1)^2+11\cdot(-1)+5=2-11+5<0$

- $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right) \Rightarrow x=0 \Rightarrow 2\cdot 0+11\cdot 0+5\geq 0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\infty,-5\right]\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

b) $x\left(x+2\right)-6\geq x$

$x^2+2x-6\geq x$

$x^2+x-6\geq 0$

Resolvemos la ecuación asociada:

$x^2+x-6=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=+2 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

Obtenemos los intervalos: $\left(-\infty,-3\right]$, $\left[-3,+2\right]$ y $\left[+2,+\infty\right)$.

Evaluamos en cada intervalo:

- $\left(-\infty,-3\right] \Rightarrow x=-10 \Rightarrow \left(-10\right)^2+\left(-10\right)-6=100-10-6\geq 0$
- $\left[-3,+2\right] \Rightarrow x=0 \Rightarrow 0^2+0-6<0$
- $\left[+2,+\infty\right) \Rightarrow x=3 \Rightarrow 3^2+3-6=9+3-6\geq 0$

Por tanto, la solución es el intervalo: $\left(-\infty,-3\right]\cup\left[+2,+\infty\right)$

c) $x\left(1-x\right)-3x-\left(x-1\right)^2>0$

$x-x^2-3x-x^2+2x-1>0$

$-2x^2-1>0$

$2x^2+1<0$

Puesto que $x^2>0$ para cualquier valor de $x\in\mathbb{R}$, $2x^2+1>0$ y por tanto la inecuación no tiene solución.

PROBLEMAS

29. Encuentra dos números en los que la diferencia de sus cuadrados sea 21 y el triple del primero más el doble del segundo sea 19.

Llamando x e y a los números buscados, el problema se traduce como el sistema:

$$\begin{cases} x^2-y^2=21 \\ 3x+2y=19 \end{cases}$$

Despejando en la segunda ecuación, tenemos que $y=\frac{19-3x}{2}$.

Sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$x^2 - \left(\frac{19-3x}{2}\right)^2 = 21$$

$$x^2 - \frac{361-114x+9x^2}{4} = 21$$

$$4x^2 - 361 + 114x - 9x^2 = 21$$

$$-5x^2 + 114x - 382 = 0$$

$$x = \frac{-114 \pm \sqrt{12996-7640}}{-20} = \frac{-114 \pm 2\sqrt{1339}}{-20} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-114+2\sqrt{1339}}{-20} = \dfrac{57-\sqrt{1339}}{10} \\ x_2 = \dfrac{-114-2\sqrt{1339}}{-20} = \dfrac{57+\sqrt{1339}}{10} \end{cases}$$

Para cada valor de x obtenemos un valor para y:

$$x_1 = \frac{57-\sqrt{1339}}{10} \Rightarrow y_1 = \frac{19-3x}{2} = \frac{19+3\sqrt{1339}}{20}$$

$$x_2 = \frac{57+\sqrt{1339}}{10} \Rightarrow y_2 = \frac{19-3x}{2} = \frac{19-3\sqrt{1339}}{20}$$

30. El triple de un número menos 5 veces su raíz cuadrada es igual a 2. ¿Cuál es ese número?

$$3x - 5\sqrt{x} = 2$$

$$3x - 2 = 5\sqrt{x}$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 25x$$

$$9x^2 - 37x + 4 = 0$$

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{1369-144}}{18} = \frac{13 \pm 35}{18} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{38}{18} = \dfrac{19}{9} \\ x_2 = -\dfrac{13}{18} \end{cases}$$

31. Por cada hora extra que trabaja un obrero en festivo, gana 5 € más que si trabaja la hora extra en día laborable. Si ha trabajado 12 horas extras en días laborables y 9 horas extras en días festivos y le han pagado 381 €, ¿cuánto cobra el trabajador por cada hora extra en día festivo?

Llamando x a lo que se cobra por hora extra en día festivo, en un día laborable cobrará $x-5$. Por tanto:

$$12(x-5) + 9x = 381$$

$$12x - 60 + 9x = 381$$

$$21x = 441 \Rightarrow x = 21\text{ €}$$

Por cada hora extra en un día festivo cobra 21 €.

32. Unos estudiantes alquilan un piso y tienen que poner 120 € al mes cada uno. Si dos de ellos dejan el piso, cada uno tiene que poner ahora 200 €. ¿Cuánto cuesta el alquiler del piso?

Sea x el importe del alquiler del piso. Entonces $\frac{x}{120}$ es igual al número de estudiantes que había al principio en el piso y $\frac{x}{200}$ será igual al número de estudiantes que quedan tras dejarlo dos de ellos. Por tanto:

$$\frac{x}{120}-2=\frac{x}{200}$$

$$5x-1200=3x$$

$$2x=1200 \Rightarrow x=600\ €$$

El alquiler del piso cuesta 600 €.

33. Roberto compra 4 cuadernos y 6 lápices por 5,40 €. Por 3 cuadernos y 8 lápices Ana ha pagado 5,10€. ¿Cuánto cuesta un cuaderno?, ¿y un lápiz?

Sea x el precio de un cuaderno e y el precio de un lápiz. Entonces:

$$\begin{cases} 4x+6y=5{,}40 \\ 3x+8y=5{,}10 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -3 y la segunda por 4 tenemos:

$$\begin{cases} -12x-18y=-16{,}20 \\ 12x+32y=20{,}40 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, se tiene $14y=4{,}20 \Rightarrow y=0{,}30\ €$.

Sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación, tenemos:

$$3x+8\cdot 0{,}30=5{,}10 \Rightarrow 3x=2{,}70 \Rightarrow x=0{,}90\ €$$

Los cuadernos cuestan 90 céntimos y los lápices 30 céntimos.

34. Un comerciante mezcla dos tipos de café, uno que cuesta 7 €/kg y otro que cuesta 11 €/kg. ¿Cuántos kg de café de cada tipo tiene que mezclar para obtener 25 kg a un precio de 9,40 €/kg?

Llamando x a la cantidad de café del primer tipo (7 €/kg) tenemos:

	Precio	kg	€
Café 1	7 €/kg	x	7x
Café 2	11 €/kg	25-x	11·(25-x)
Mezcla	9,40 €/kg	25	9,4·25=235€

Puesto que el valor de la mezcla es la suma de los valores de los cafés, concluimos que:

$$7x+11(25-x)=235$$

$$7x+275-11x=235$$

$$-4x=-40 \Rightarrow x=10\ kg$$

Se necesitan 10 kg del café más barato y 15 kg del café más caro.

35. En una bolsa tenemos 200 monedas entre monedas auténticas y monedas falsas. Si las monedas falsas pesan 12 g cada una y las monedas auténticas 15 g cada una, ¿cuántas monedas falsas hay sabiendo que la bolsa pesa 2,61 kg?

Sea n el número de monedas falsas, su peso es $12n$ gramos. Por otra parte, en la bolsa hay $200-n$ monedas auténticas que pesan $15(200-n)$ gramos. La suma de ambos debe ser igual al de la bolsa:

$$12n+15(200-n)=2610$$

$$12n+3000-15n=2610$$

$$-3n=-390 \Rightarrow n=130$$

Hay 130 monedas falsas y 70 monedas auténticas.

36. Tres hermanos, Roberto, Juan y Lucía, ponen 100 € para comprar un regalo a su padre. Si Roberto pone el doble que Juan y Lucía pone 1€ más la tercera parte que pone Roberto, ¿cuánto dinero ha puesto cada uno?

Cada hermano pone:
Roberto $\rightarrow x$
Juan $\rightarrow 2x$
Lucía $\rightarrow \dfrac{x}{3}+1$
La suma de las cantidades que ha puesto cada hermano debe dar el total:

$$x+2x+\frac{x}{3}+1=100$$

$$3x+6x+x+3=300$$

$$10x=297 \Rightarrow x=29,70\,€$$

Por tanto, Roberto pone 29,70 €, Juan 59,40 € y Lucía pone los 10,90 € restantes.

37. Julián da 30 pasos para recorrer 7 m y 8 zancadas para recorrer 5 m. Si recorre 34 m realizando 92 desplazamientos entre pasos y zancadas, ¿cuántos pasos y zancadas ha dado Julián?

Sea n el número de pasos. Entonces el número de zancadas es $92-n$. Teniendo en cuenta que en cada paso recorre $\dfrac{7}{30}$ de metro y en cada zancada $\dfrac{5}{8}$, tenemos que la suma de metros recorridos con pasos y zancadas debe ser 34:

$$\frac{7n}{30}+\frac{5(92-n)}{8}=34$$

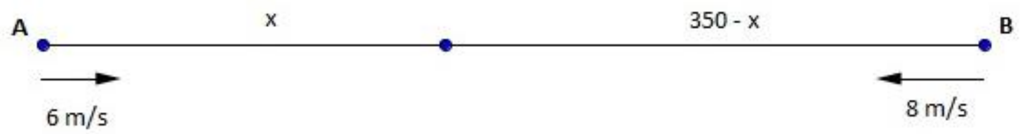
$$\frac{28n}{120}+\frac{75(92-n)}{120}=\frac{4080}{120}$$

$$28n+6900-75n=4080$$

$$2820=47n \quad \Rightarrow \quad n=60$$

Julián ha dado 60 pasos y 32 zancadas.

38. Dos niños montados en bicicleta distan entre sí 350 m. Si empiezan a pedalear hasta encontrarse con una velocidad de 6 m/s y 8m/s respectivamente, ¿cuántos metros recorrerá cada niño? ¿Qué tiempo tardarán en encontrarse?



Llamando A y B a los niños y x a la distancia que recorre el primero, el segundo recorrerá $350-x$ m. Teniendo en cuenta la ecuación $t=\frac{d}{v}$ y el hecho de que el tiempo transcurrido desde que comienzan a pedalear hasta que se encuentran es el mismo para ambos, tenemos que:

$$t_A=t_B \quad\Rightarrow\quad \frac{d_A}{v_A}=\frac{d_B}{v_B} \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{6}=\frac{350-x}{8} \quad\Rightarrow\quad 8x=2100-6x \quad\Rightarrow\quad x=150\,m$$

Por tanto, el primer niño recorre 150 metros y el segundo 200 metros. El tiempo que tardan en encontrarse se halla utilizando la fórmula: $t=\frac{d}{v}=\frac{150}{6}=25\,s$.

39. Un vehículo circula a una velocidad de 25 m/s (90 km/h). De pronto se cruza con un peatón, frena con una desaceleración de 7 m/s^2 y recorre una distancia de 37,5 m. Calcula el tiempo que tardará en frenar el vehículo.

Nota: La aceleración de frenado o desaceleración ha de ser negativa. Recuerda: $e=v_0t+\frac{1}{2}at^2$.

Sabemos que $e=37,5m$, $v_0=25m/s$ y $a=-7\ m/s^2$. Por tanto:

$$37,5=25t-\frac{7}{2}t^2 \Rightarrow 7t^2-50t+75=0 \Rightarrow t=\frac{50\pm\sqrt{2500-2100}}{14}=\frac{50\pm20}{14}=\begin{cases} t_1=5 \\ t_2=\frac{30}{14}=\frac{15}{7}\end{cases}$$

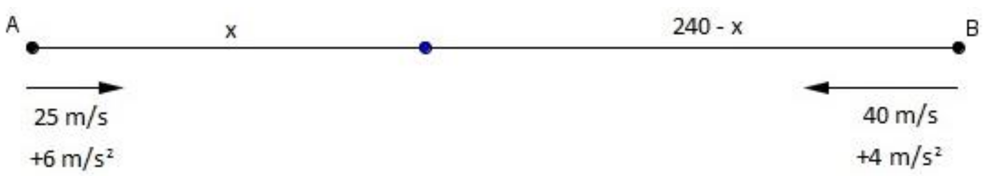
La solución correcta es la más pequeña de las dos, $t=\frac{15}{7}\approx 2,14\,s$ ya que la segunda se correspondería con una *velocidad negativa* que, en este contexto, no es posible. Esto último se puede apreciar mejor teniendo en cuenta que $v=v_0+at$, lo que en este caso implicaría:

$$t=\frac{15}{7}\Rightarrow v=25-7\cdot\frac{15}{7}=10\ m/s$$

$$t=5\Rightarrow v=25-7\cdot5=-10\ m/s$$

En el primer caso el coche está frenando. El segundo caso no se produce ya que el coche se para al llegar a $v=0$ *(lo que ocurre transcurridos aproximadamente 3,57 segundos)*.

40. Dos vehículos que distan 240 m entre sí van a chocar. Uno de ellos va a 25 m/s (90 km/h) con una aceleración de 6 m/s^2. El otro viaja a 40 m/s (118 km/h) con una aceleración de 4 m/s^2. Calcula el tiempo que tardarán en chocar los dos vehículos y la distancia que recorre cada uno de ellos.



Llamando A y B a los vehículos y x a la distancia que recorre el primero de ellos, el segundo recorrerá una distancia de $240-x$. Teniendo en cuenta la ecuación $e=v_0t+at^2$, se tiene que:

$$25t+\frac{1}{2}6t^2=240-\left(40t+\frac{1}{2}4t^2\right)$$
$$25t+3t^2=240-40t-2t^2$$
$$5t^2+65t-240=0$$
$$t^2+13t-48=0$$
$$t=\frac{-13\pm\sqrt{169+192}}{2}=\frac{-13\pm19}{2}=\begin{cases}t_1=3\\t_2=-16\end{cases}$$

Descartamos la solución negativa ya que en este contexto no tiene sentido. Los dos coches tardarán, por tanto, 3 segundos en chocar. En ese intervalo de tiempo habrán recorrido:

$$A\Rightarrow x=25\cdot3+\frac{1}{2}\cdot6\cdot3^2=75+27=102\,m$$
$$B\Rightarrow 240-x=138\,m$$

41. Determina el conjunto de números reales para los que la ecuación $ax^2-ax-4=0$ no tiene solución:

El determinante de la ecuación es: $\Delta=a^2+16a$. Para que la ecuación no tenga solución, el determinante debe ser negativo:

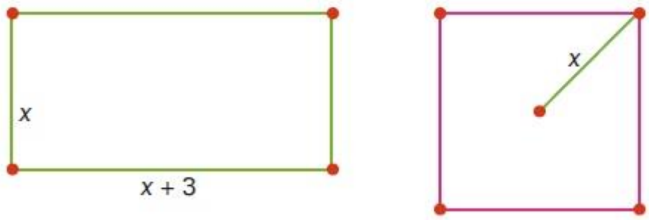
$$a^2+16a<0\Rightarrow a(a-16)<0$$

Las soluciones a la ecuación asociada son $a_1=0$ y $a_2=-16$. Obtenemos los intervalos $(-\infty,-16)$, $(-16,0)$ y $(0,+\infty)$. Evaluando en un punto para cada intervalo:

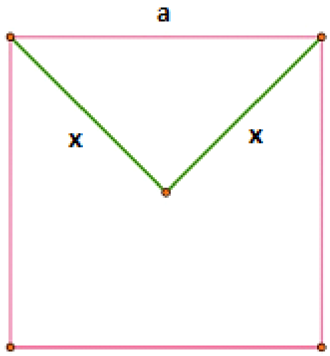
- $(-\infty,-16)\Rightarrow a=-20\Rightarrow(-20)^2+16\cdot(-20)=400-320>0$
- $(-16,0)\Rightarrow a=-10\Rightarrow(-10)^2+16\cdot(-10)=100-160<0$
- $(0,+\infty)\Rightarrow x=1\Rightarrow1^2+16\cdot1=1+16>0$

Por tanto, el conjunto de números reales en los que el discriminante es negativo es $(-16,0)$

42. Una empresa de metal produce dos tipos de chapa, como se muestra en la figura.



Determina los valores de x para que la chapa rectangular sea más cara que la chapa cuadrada.



El área de la chapa rectangular es $x(x+3)=x^2+3x$.

Para calcular el área de la chapa cuadrada, aplicamos el Teorema de Pitágoras tal como se muestra en la imagen: $a^2=x^2+x^2 \Rightarrow a^2=2x^2$

El área del cuadrado es, por tanto, $2x^2$. Para que la chapa rectangular sea más cara, su área debe ser mayor:

$x^2+3x>2x^2$

$-x^2+3x>0$

Las soluciones de la ecuación asociada son $x_1=0$ y $x_2=3$. Obtenemos los intervalos $(-\infty,0)$, $(0,3)$ y $(3,+\infty)$. Evaluando en un punto para cada intervalo:

- $(-\infty,0) \Rightarrow x=-1 \Rightarrow -(-1)^2+3\cdot(-1)<0$
- $(0,3) \Rightarrow a=1 \Rightarrow -1^2+3\cdot 1>0$
- $(3,+\infty) \Rightarrow x=5 \Rightarrow -5^2+3\cdot 5<0$

Por tanto la chapa rectangular será más cara si $x \in (0,3)$

DESAFÍO PISA - PÁG. 89

MEDIR EL CAUDAL DE UNA ACEQUIA

La medida del caudal de agua de un sistema de riego es importante porque permite controlar la cantidad de agua utilizada por cada regante. Hoy en día hay aparatos que permiten medir el caudal de agua; no obstante, se siguen utilizando métodos artesanos para medir el caudal. El método del flotador es uno de ellos.

Se coloca un flotador en el centro de una acequia y se cronometra el tiempo que tarda en desplazarse unos metros previamente establecidos. Este proceso se repite varias veces para tomar el tiempo medio que emplea el flotador en el recorrido y hacer los cálculos más fiables. Llamamos v_f a la velocidad del flotador. Una vez calculada, calculamos $v_m=0{,}8\cdot v_f$ que será la velocidad media. El caudal, Q, se obtiene multiplicando la velocidad media, v_m, por la sección mojada, s_m:

$$Q=v_m\cdot s_m$$

La sección mojada dependerá de la forma que tenga la acequia; normalmente es rectangular, con lo que la sección se obtendrá multiplicando la anchura de la acequia por la profundidad del agua.

Todas las medidas las realizaremos en metros y el tiempo, en segundos: tendremos el caudal obtenido en m^3/s que es una medida especialmente grande para una acequia; por tanto, es recomendable cambiar de unidades a dm^3/s, o lo que es lo mismo, l/s . La siguiente tabla muestra una serie de mediciones que se han realizado en un sistema de riego:

Sector	Espacio que recorre el flotador	Tiempo del flotador	Anchura de la acequia	Profundidad del agua
Norte	10 m	8 s	80 cm	25 cm
Este	6 m	20 s	1,2 m	1,4 m
Sur	12 m	6 s	120 cm	40 cm

ACTIVIDAD 1. El caudal en L/s del sector norte es:

B: 200 **L/s** , ya que $v_m = 0,8 \cdot \frac{100}{8} = 10\frac{dm}{s}$, $s_m = 8 \cdot 2,5 = 20\,dm^2$ y $Q = v_m \cdot s_m = 200\,{dm^3}/{s}$

ACTIVIDAD 2. El caudal en L/s del sector sur es:

B: 768 **L/s** , ya que $v_m = 0,8 \cdot \frac{120}{6} = 16\frac{dm}{s}$, $s_m = 12 \cdot 4 = 48\,dm^2$ y $Q = v_m \cdot s_m = 768\,{dm^3}/{s}$

ACTIVIDAD 3. Si una alberca de $0,2\,hm^3$ de capacidad recibe el agua de la acequia del sector este, ¿cuánto tiempo necesitará para llenarse por completo?

A: 6 días, ya que el caudal es de $Q = v_m \cdot s_m = 403,2\,{dm^3}/{s}$ y por tanto

$$t = \frac{2 \cdot 10^8\, l}{403,2\, {l}/{s} \cdot 86400\, {s}/{día}} \approx 5,7\, días$$

ACTIVIDAD 4. Si el tiempo que tarda el flotador en el sector norte pasa de 8 s a 4 s, ¿cuánto aumentará el caudal?

B: 200 **L/s** , ya que si el tiempo se divide entre 2, la velocidad se duplica y el caudal también.

ACTIVIDAD 5. Hemos dejado la compuerta del sector sur abierta toda la noche, de forma que la profundidad del sector ha bajado 14 cm. El caudal ahora es de

C: 499 **L/s** , ya que ahora $s_m = 12 \cdot 2,6 = 31,2\,dm^2$ y $Q = v_m \cdot s_m = 499,2\,{dm^3}/{s}$