UNIDAD 14: Probabilidad

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 274

1. Da dos ejemplos de experimentos deterministas y otros dos de experimentos aleatorios:

Deterministas: aplicar una fuente de calor y obtener la temperatura a la que estará un líquido; ejecutar una función de un programa de ordenador.
Aleatorios: sacar una carta de una baraja; medir la temperatura de un día en un punto determinado.

2. Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos:

a) **Lanzar dos monedas** - $E=\{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}$

b) **Lanzar una moneda y un dado de 6 caras** $E=\{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),$
$(X,1),(X,2),(X,3),(X,4),(X,5),(X,6)\}$

c) **Lanzar un dado de cuatro caras dos veces** $E=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),$
$(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

d) **Lanzar una moneda tres veces.**
$E=\{(C,C,C),(C,C,X),(C,X,C),(C,X,X),(X,C,C),(X,C,X),(X,X,C),(X,X,X)\}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 275

3. Determina el suceso seguro y los sucesos elementales de los siguientes experimentos:

a) **Lanzar una moneda dos veces.**
Suceso seguro: $E=\{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}$
Sucesos elementales: $(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)$

b) **Lanzar un dado de seis caras dos veces**
Sucesos elementales: $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),$
$(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),$
$(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$
Suceso seguro: Espacio muestral, formado por todos los sucesos elementales.

c) **Lanzar un dado de seis caras dos veces y sumar sus puntuaciones**
Suceso seguro: la unión de todos los sucesos elementales.
Sucesos elementales: $\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\},\{10\},\{11\},\{12\}$

d) **Lanzar un dado de seis caras dos veces y multiplicar sus puntuaciones**
Suceso seguro: la unión de todos los sucesos elementales.
Sucesos elementales: $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{8\},\{10\},\{12\},\{9\},\{15\},\{18\},\{16\},\{20\},$
$\{24\},\{25\},\{30\},\{36\}$

4. Da dos sucesos compuestos para cada uno de los experimentos de la actividad anterior.

a) Que salga alguna cara. Que salgan dos resultados iguales.
b) Que salga el mismo resultado en los dos dados. Que ambos sean pares.
c) Que salga par. Que salga menos de 7.
d) Que salga un resultado impar. Que el resultado sea múltiplo de 3.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 276

5. Se extrae una bola de entre 60 bolas numeradas considerando los siguientes sucesos.
A = {Sacar un número múltiplo de 3}
B = {Sacar un número múltiplo de 5}
C = {Sacar un número múltiplo de 4}
Determina los elementos de los siguientes conjuntos.

a) $A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 45, 48, 50, 51, 54, 55, 57, 60\}$

b) $A \cup B = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 33, 36, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 51, 52, 54, 56, 57, 60\}$

c) $B \cup C = \{4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 44, 45, 48, 50, 52, 55, 56, 60\}$

d) $A \cap B = \{15, 30, 45, 60\}$

e) $A \cap C = \{12, 24, 36, 48, 60\}$

f) $B \cap C = \{20, 40, 60\}$

g) $\overline{A} \cap B = \{5, 10, 20, 25, 35, 40, 50, 55\}$

h) $B \cup \overline{C} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60\}$

i) $C \cup \overline{C} = \{n \in \mathbb{N} / 1 \le n \le 60\}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 277

6. Lanza una moneda 20 veces y anota la frecuencia absoluta obtenida. A la vista del resultado, ¿crees que la probabilidad de sacar cara o cruz es la misma? Lanza 20 veces más la moneda y vuelve a plantearte la pregunta.

Cada lanzamiento de la moneda es independiente de los anteriores, de forma que la probabilidad permanecerá siempre constante e igual a $0,5$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 278

7. Si E es un espacio muestral y A y B dos sucesos incompatibles tales que $P(A)=0,2$ y $P(B)=0,4$, calcula:

a) $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=0,8$

b) $P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)=0,2+0,4=0,6$

c) $P\left(\overline{A\cap B}\right)=P(E)=1$

d) $P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=0,6$

e) $P\left(B\cup \overline{B}\right)=P(E)=1$

f) $P\left(A\cap \overline{A}\right)=P(\varnothing)=0$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 279

8. De la baraja española se extrae una carta al azar. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Sacar un múltiplo de 3**

El suceso T = "sacar un múltiplo de 3" tiene 16 elementos (ya que hay 4 múltiplos de 3 por cada palo de la baraja). Por tanto, $P(T)=\frac{16}{48}=\frac{1}{3}$

b) **Sacar un rey**

El suceso R = "sacar un rey" tiene 4 elementos (uno por cada palo de la baraja). Por tanto $P(R)=\frac{4}{48}=\frac{1}{12}$

c) **Sacar una figura**

El suceso F = "sacar una figura" tiene 12 elementos (tres por cada palo de la baraja), por tanto $P(F)=\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$

d) **Sacar una figura que no sea de espadas**

El suceso A = "sacar una carta de espadas" tiene 12 elementos. Por tanto, $P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{12}{48}=\frac{3}{4}$

e) **Sacar el siete de bastos**

El suceso B = "sacar el siete de bastos" tiene un solo elemento: $P(B)=\frac{1}{48}$

f) **Sacar copas**

El suceso C = "sacar una carta de copas" tiene 12 elementos, por lo que $P(C)=\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$

9. Se lanzan dos monedas al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Sacar dos cruces.**

El espacio muestral es $E=\{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}$. El suceso $A=\{(X,X)\}$, "sacar dos cruces", tiene un solo elemento, por lo que $P(A)=\frac{1}{4}$

b) **Sacar una cruz y una cara.**

El suceso $B=\{(C,X),(X,C)\}$ tiene dos elementos, por tanto: $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

c) **Sacar al menos una cruz.**

El suceso es $C=\{(C,X),(X,C),(X,X)\}$ y por tanto: $P(C)=\frac{3}{4}$

d) **No sacar cara.**

El suceso $D=\{(X,X)\}$ tiene un solo elemento, por lo que $P(D)=\frac{1}{4}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 280

10. Se lanza un dado de 8 caras dos veces y sumamos las puntuaciones obtenidas. Calcula la probabilidad de los sucesos elementales.

Si el resultado de lanzar los dados es (x,y), con x el resultado del primer lanzamiento e y el del segundo lanzamiento, el espacio muestral $E=\{(x,y)/1\le x\le 8, 1\le y\le 8\}$ tiene 64 elementos. Sea R_i al suceso "la suma de las puntuaciones es i". Tenemos:

- $R_2=\{(1,1)\}\Rightarrow P(R_2)=\frac{1}{64}$
- $R_3=\{(1,2),(2,1)\}\Rightarrow P(R_3)=\frac{2}{64}=\frac{1}{32}$
- $R_4=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}\Rightarrow P(R_4)=\frac{3}{64}$
- $R_5=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}\Rightarrow P(R_5)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$
- $R_6=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}\Rightarrow P(R_6)=\frac{5}{64}$
- $R_7=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}\Rightarrow P(R_7)=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$
- $R_8=\{(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1)\}\Rightarrow P(R_8)=\frac{7}{64}$
- $R_9=\{(1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(7,2),(8,1)\}\Rightarrow P(R_9)=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$
- $R_{10}=\{(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2)\}\Rightarrow P(R_{10})=\frac{7}{64}$
- $R_{11}=\{(3,8),(4,7),(5,6),(6,5),(7,4),(8,3)\}\Rightarrow P(R_{11})=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$
- $R_{12}=\{(4,8),(5,7),(6,6),(7,5),(8,4)\}\Rightarrow P(R_{12})=\frac{5}{64}$
- $R_{13}=\{(5,8),(6,7),(7,6),(8,5)\}\Rightarrow P(R_{13})=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$

- $R_{14}=\{(6,8),(7,7),(8,6)\}\Rightarrow P(R_{14})=\frac{3}{64}$
- $R_{15}=\{(7,8),(8,7)\}\Rightarrow P(R_{15})=\frac{2}{64}=\frac{1}{32}$
- $R_{16}=\{(8,8)\}\Rightarrow P(R_{16})=\frac{1}{64}$

11. Se lanza un dado de 6 caras dos veces y multiplicamos las puntuaciones obtenidas.

a) **Calcula la probabilidad de los sucesos elementales.**

Si el resultado de lanzar los dados es (x,y), con x el resultado del primer lanzamiento e y el del segundo lanzamiento, el espacio muestral $E=\{(x,y)/1\le x\le 6, 1\le y\le 6\}$ tiene 36 elementos. Utilizamos la siguiente tabla, donde el resultado del primer lanzamiento se muestra en la primera columna, el del segundo lanzamiento en la primera fila y el resultado de multiplicarlos en la celda que se obtiene al cruzar la fila y columna correspondientes, para listar los sucesos elementales:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Sea R_i al suceso "el producto de las puntuaciones es i". Tenemos:

- $P(R_1)=\frac{1}{36}$
- $P(R_2)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
- $P(R_3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
- $P(R_4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
- $P(R_5)=\frac{5}{36}$
- $P(R_6)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
- $P(R_8)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
- $P(R_9)=\frac{1}{36}$
- $P(R_{10})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
- $P(R_{12})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
- $P(R_{15})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
- $P(R_{16})=\frac{1}{36}$
- $P(R_{18})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
- $P(R_{20})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
- $P(R_{24})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
- $P(R_{25})=\frac{1}{36}$
- $P(R_{30})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
- $P(R_{36})=\frac{1}{36}$

b) **Calcula la probabilidad de obtener un número par.**

Sea B = "obtener un número par". Utilizando la tabla anterior, podemos ver que hay 27 sucesos favorables.

Por tanto, $P(B)=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

c) **Calcula la probabilidad de obtener un múltiplo de 3.**

Sea C = "obtener un múltiplo de 3". Utilizando la tabla anterior, podemos ver que hay 20 sucesos favorables.

Por tanto, $P(C)=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

d) **Calcula la probabilidad de obtener un número par múltiplo de 3.**

Sea D = "obtener un número par múltiplo de 3". Utilizando la tabla anterior, podemos ver que hay 15 sucesos favorables.

Por tanto, $P(D)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 281

12. Se lanzan tres monedas al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Obtener una cara.**

Sea A el suceso "sacar una cara", unión de tres sucesos elementales: CXX, XCX y XXC. Puesto que los lanzamientos de la moneda son independientes, tenemos que $P(CXX)=P(XCX)=P(XXC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, de modo que $P(A)=\frac{3}{8}$.

b) **Obtener dos caras.**

Puesto que el suceso B "obtener dos caras" es el mismo que "obtener una cruz", por la simetría del problema tenemos que $P(B)=\frac{3}{8}$.

c) **Obtener tres caras.**

Puesto que los lanzamientos de la moneda son independientes, tenemos que $P(CCC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,

d) **Obtener al menos una cara.**

Sea D el suceso "obtener al menos una cara". Entonces su complementario es $\overline{D}$ = "no obtener caras" o, de forma equivalente, "obtener tres cruces". De este modo:

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-P(XXX)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

13. Se lanzan al aire dos dados. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Sacar un 5 y un 6.**

Sea A el suceso "sacar un 5 y un 6", sabemos que $A=\{(5,6),(6,5)\}$ por lo que:

$$P(A)=P((5,6))+P((6,5))=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

b) **Sacar un 3.**

La probabilidad de que no salga un 3 en cada dado es $\frac{5}{6}$.

La probabilidad de que no salga ni en el primero ni en el segundo, por ser sucesos independientes, es $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$.

El suceso B = "sacar un 3" es el complementario de este, por lo que $P(B)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

c) **Sacar al menos un 5.**

La probabilidad de que no salga un 5 en cada dado es $\frac{5}{6}$.

La probabilidad de que no salga ni en el primero ni en el segundo, por ser sucesos independientes, es $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$.

El suceso C = "sacar al menos un 5" es el complementario de este, por lo que $P(C)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

d) **Sacar un número par.**

La probabilidad de que obtener un número impar en cada dado es $\frac{1}{2}$.

Entonces la probabilidad de que ambos sean impares, por ser sucesos independientes, es $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. El suceso D = "sacar un número par" es su complementario: $P(D)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 282

14. De una urna que contiene 8 bolas blancas, 10 bolas negras y 7 bolas rojas se extraen una a una tres bolas al azar. Determina la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Extraer, en este orden, una bola blanca, una roja y una negra.**

Sean los sucesos A = {sacar la primera bola blanca}, B = {sacar la segunda bola roja} y C = {sacar la tercera bola negra}, entonces:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)\cdot P(C/A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B)$$

Por tanto, $P(A\cap B\cap C)=\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}\cdot\frac{10}{23}=\frac{14}{115}$

b) **Extraer las tres bolas negras.**

Sean los sucesos A = {sacar la primera bola negra}, B = {sacar la segunda bola negra} y C = {sacar la tercera bola negra}, entonces:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)\cdot P(C/A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B)$$

Por tanto, $P(A\cap B\cap C)=\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}\cdot\frac{8}{23}=\frac{6}{115}$

c) **Extraer dos bolas negras y la última de otro color.**

Sean los sucesos A = {sacar la primera bola negra}, B = {sacar la segunda bola negra} y C = {sacar la tercera bola de otro color}, entonces:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)\cdot P(C/A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B)$$

Por tanto, $P(A\cap B\cap C)=\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}\cdot\frac{15}{23}=\frac{9}{92}$

d) **No extraer bolas negras.**

Sean los sucesos A = {no sacar la primera bola negra}, B = {no sacar la segunda bola negra} y C = {no sacar la tercera bola negra}, entonces:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)\cdot P(C/A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B)$$

Por tanto, $P(A\cap B\cap C)=\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}\cdot\frac{13}{23}=\frac{91}{460}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 283

15. De una urna con 9 bolas blancas, 6 bolas negras y 10 rojas se extraen dos bolas. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que las dos bolas sean blancas.**

Consideremos el suceso A = {Sacar las dos bolas blancas}, tenemos que $P(A)=\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{24}=\frac{3}{25}$

b) **Que una de las bolas sea blanca.**

Sea B el suceso "sacar una bola blanca". Al no especificar el orden, tenemos que considerar los dos sucesos:

B_1 = {Sacar la primera blanca y la segunda de otro color}

B_2 = {Sacar la primera de otro color y la segunda blanca}

Por ser sucesos incompatibles, tenemos que:

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{9}{25}\cdot\frac{16}{24}+\frac{16}{25}\cdot\frac{9}{24}=\frac{36}{75}$$

c) **Que ninguna bola sea blanca.**

Sea el suceso C = {Sacar dos bolas que no sean blancas}, tenemos que $P(C)=\frac{16}{25}\cdot\frac{15}{24}=\frac{2}{5}$

d) **Que una bola sea blanca sabiendo que la otra es negra.**

Sea D el suceso "sacar una bola blanca y otra negra". Al no especificar el orden, tenemos que considerar los dos sucesos:

D_1 = {Sacar la primera negra y la segunda blanca}

D_2 = {Sacar la primera blanca y la segunda negra}

Por ser sucesos incompatibles, tenemos que:

$$P(D)=P(D_1)+P(D_2)=\frac{6}{25}\cdot\frac{9}{24}+\frac{9}{25}\cdot\frac{6}{24}=\frac{9}{50}$$

e) **Que alguna de las bolas sea blanca.**

El suceso E = {Sacar al menos una bola blanca} se obtiene mediante la unión de los sucesos incompatibles B = {Sacar una bola blanca} y A = {Sacar las dos bolas blancas}. Por tanto:

$$P(E)=P(A)+P(B)=\frac{3}{25}+\frac{36}{75}=\frac{45}{75}=\frac{3}{5}$$

16. En una clase hay 16 niños y 14 niñas, de los cuales 12 niños y 10 niñas son morenos. Calcula la probabilidad de escoger un niño al azar moreno.

Sean los sucesos A = {escoger un niño} y B = {escoger a una persona morena}. Entonces:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{16}{30}\cdot\frac{12}{16}=\frac{2}{5}.$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁGS. 286-288

EXPERIMENTOS DETERMINISTAS Y ALEATORIOS

1. Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos:

a) **Lanzar dos monedas al aire y un dado de cuatro caras.**

$$E=\{(C,C,1),(C,C,2),(C,C,3),(C,C,4),(C,X,1),(C,X,2),(C,X,3),(C,X,4),$$
$$(X,C,1),(X,C,2),(X,C,3),(X,C,4),(X,X,1),(X,X,2),(X,X,3),(X,X,4)\}$$

b) **Lanzar dos dados de ocho caras al aire.**

Si el resultado de lanzar los dados es (x,y), con x el resultado del primer lanzamiento e y el del segundo lanzamiento, el espacio muestral es $E=\{(x,y)/1\le x\le 8, 1\le y\le 8\}$

c) **Lanzar tres monedas al aire.**

$$E=\{(C,C,C),(C,C,X),(C,X,C),(C,X,X),(X,C,C),$$
$$(X,C,X),(X,X,C),(X,X,X)\}$$

2. De una urna que contiene 10 bolas rojas, 6 bolas blancas y 4 bolas negras se extrae una bola al azar. Determina el espacio muestral.

Sean R, B y N los sucesos "sacar una bola roja/blanca/negra", respectivamente. El espacio muestral es: $E=\{R, B, N\}$

3. Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos:

a) **Lanzar dos dados de diez caras al aire y sumar las puntuaciones obtenidas.**

$$E=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

b) **Lanzar dos dados de seis caras al aire y multiplicar las puntuaciones obtenidas.**

$$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

c) **Extraer dos bolas de una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9 y multiplicar sus puntuaciones.**

$$E=\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45,$$
$$48, 54, 56, 63, 72\}$$

SUCESOS

4. En una clase hay 12 alumnas y 16 alumnos. Por el color de pelo, del total, entre alumnos y alumnas, podemos contar 12 castaños, 14 morenos y 2 rubios. Si elegimos una persona al azar, da ejemplos de un suceso que:

a) **Sea imposible.** Que la persona no tenga pelo.
b) **Sea seguro.** Que la persona elegida tenga pelo.
c) **Sea elemental.** Elegir a una persona en concreto.
d) **Sea compuesto.** Elegir una persona rubia.

5. Una urna contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9. Si se extrae una bola, determina:

a) **Tres sucesos elementales.** Sacar una bola con el número 4, sacar una bola con el número 8, sacar una bola con el número 0.
b) **Dos sucesos compuestos.** Sacar una bola con un número par, sacar una bola con un número mayor que 5.
c) **Un suceso seguro.** Sacar una bola con un número menor de 10.
d) **Un suceso imposible.** Sacar una bola con un número negativo.

OPERACIONES CON SUCESOS

6. De una urna con 20 bolas numeradas del 1 al 20 se extrae una bola. Sean $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B=\{4, 6, 12, 18\}$, y $C=\{1, 3, 4, 6, 8\}$ tres sucesos del espacio muestral *E*. Determina los sucesos:

a) $A\cup B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 18\}$
b) $A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$
c) $B\cup C=\{1, 3, 4, 6, 8, 12, 18\}$
d) $A\cap B=\{4, 6, 12\}$
e) $A\cap C=\{4, 6, 8\}$
f) $B\cap C=\{4, 6\}$
g) $\overline{A}=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
h) $\overline{B}\cap C=\{1, 3, 8\}$
i) $\overline{C}\cup C=E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

FRECUENCIA DE UN SUCESO. LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.

7. Se lanza una moneda al aire 1000 veces y se anotan los resultados que se resumen en la siguiente tabla.

Cara	Cruz	Total
197	803	1000

A la vista de los resultados, ¿crees que la moneda está cargada para que salga cruz más veces?

Sí, ya que la distribución, en el caso de que la moneda no estuviera cargada, debiera acercarse más a la igualdad entre resultados.

8. Dos amigos están jugando con una moneda a ver el que acierta si sale cara o cruz. Después de 6 lanzamientos, en todas las tiradas ha salido cara. ¿Crees que la probabilidad de que salga cruz en el siguiente resultado es mayor? Razona tu respuesta.
No, ya que cada lanzamiento es independiente de los anteriores. El hecho de que ya haya ocurrido que salgan seis caras no hace más o menos probable que en el séptimo lanzamiento sea cruz.

9. A lo largo de una temporada, de los 640 tiros libres que ha lanzado un jugador ha anotado 550. ¿Cuál será la probabilidad de que este jugador anote un tiro libre?

Su probabilidad es $P=\frac{550}{640}=\frac{55}{64}$.

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

10. Si A y B son dos sucesos incompatibles y $P(A)=0,6$ y $P(B)=0,3$, calcula la probabilidad de $A\cup B$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,9$$

11. Un experimento consta de dos sucesos elementales, A y B. Si la probabilidad de que ocurra A es $0,7$, ¿cuál será la probabilidad de que ocurra B?

Como $\overline{A}=B$, tendremos que $P(B)=1-P(A)=0,3$

12. Si A y B son dos sucesos y $P(A)=0,6$ y $P(B)=0,5$, y $P(A\cap B)=0,2$ calcula:

a) $P(\overline{A})=1-P(A)=0,4$

b) $P(\overline{B})=1-P(B)=0,5$

c) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,9$

d) $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0,1$

e) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0,1$

f) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=0,8$

LA LEY DE LAPLACE

13. En una piscina hay 20 bañistas, 7 de ellos llevan el bañador azul, 9 el bañador rojo y 4 el bañador negro. Si elegimos al azar un bañista, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que el bañista lleve bañador color negro.**

Sea N el suceso "el bañador es de color negro", entonces $P(N)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

b) **Que el bañista lleve bañador color azul.**

Sea A el suceso "el bañador es de color azul", entonces $P(A)=\frac{7}{20}$

c) **Que el bañador no sea rojo.**

Sea R el suceso "el bañador es de color rojo", entonces $P(\overline{R})=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$

d) **Que el bañador sea negro o rojo.**

$$P(N\cup R)=P(N)+P(R)=\frac{4}{20}+\frac{9}{20}=\frac{13}{20}$$

e) **Que el bañador no sea negro.**

$$P(\overline{N})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

14. Se lanza un dado de seis caras numeradas al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Sacar un número par.** $P(par)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

b) **Sacar un número impar.** $P(impar)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

c) **Sacar un número menor que 4.**

Sea X el resultado de lanzar el dado, entonces: $P(X<4)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

d) **Sacar un número menor o igual que 4.** $P(X\le 4)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

e) **Sacar un 2.** $P(X=2)=\frac{1}{6}$

f) **Sacar un 2 o un 5.** $P(X\in\{2,5\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

g) **Sacar un número múltiplo de 3.** $P(X\in\{3,6\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

h) **Sacar un número primo.** $P(X\in\{2,3,5\})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

15. En una estantería hay una enciclopedia con 24 volúmenes. Se escoge al azar un volumen. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que sea el volumen 12.**

Sea X el número del volumen extraído, entonces: $P(X=12)=\frac{1}{24}$

b) **Que sea un volumen par.** $P(X\in\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\})=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

c) **Que sea un volumen múltiplo de 3.** $P(X\in\{3,6,9,12,15,18\})=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

16. Se toman las letras de la palabra GOMERA, se recortan y se introducen en una bolsa. Se sacan las seis letras de forma consecutiva. Calcula la probabilidad de que la secuencia forme de nuevo la palabra GOMERA.

El número de palabras que se pueden formar es $6!=720$. Por tanto, la probabilidad de que la palabra formada sea de nuevo GOMERA es $\frac{1}{720}$

17. Se lanza un dado de seis caras dos veces. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que el primero salga 6 y el segundo un número par.**

Sean los sucesos A = "el primer dado sale un 6" y B = "el segundo dado sale par", entonces:

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

b) **Que en el primero salga un número primo y en el segundo un 2 o un 5.**

Sean los sucesos A = "el primer dado sale primo" y B = "el segundo dado sale 2 o 5", entonces:

$P(A\cap B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

c) **Que las puntuaciones obtenidas en las dos tiradas sumen 8.**

El suceso A = "la suma de las tiradas es 8" está compuesto de cinco sucesos elementales:

$A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$.

Por tanto: $P(A)=\frac{5}{36}$

d) **Que el producto de las puntuaciones obtenidas en las dos tiradas sea 12.**

Solo hay una forma de que ocurra A = "la suma de las tiradas es 12". Por tanto: $P(A)=\frac{1}{36}$

18. Se elige al azar una ficha de un juego de dominó. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que la ficha sea la blanca doble.**

En el juego de dominó hay un total de 28 fichas. Por tanto, la probabilidad del suceso A = "la ficha extraída es la blanca doble" es $P(A)=\frac{1}{28}$

b) **Que la ficha sea un 6.**

Hay 7 fichas con un 6, por lo que la probabilidad del suceso A = "la ficha extraída es un 6" es $P(A)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$

c) **Que la ficha no sea blanca.**

Hay 7 fichas blancas, por lo que la probabilidad del suceso A = "la ficha extraída no es blanca" es $P(A)=1-\frac{7}{28}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$

d) **Que la suma de la puntuación sea 10.**

El suceso A = "la suma de las puntuaciones es 10" está compuesto de dos sucesos elementales:

$A=\{(4,6),(5,5)\}$. Por tanto: $P(A)=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$

e) **Que el producto de su puntuación sea 12.**

El suceso A = "el producto de las puntuaciones es 12" está compuesto de sucesos elementales:

$A=\{(2,6),(3,4)\}$. Por tanto: $P(A)=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$

f) **Que la suma de su puntuación sea par.**

El suceso A = "la suma de las puntuaciones es par" está formado por 16 sucesos elementales:

$A=\{(0,0),(0,2),(0,4),(0,6),(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),$

$(3,5),(4,4),(4,6),(5,5),(6,6)\}$. Por tanto: $P(A)=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$

19. Se lanzan dos dados de seis caras al aire y se suman sus puntaciones. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

Sea X el resultado de sumar las puntuaciones. Utilizamos la siguiente tabla para calcular las probabilidades:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) **Obtener 5.** $P(X=5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

b) **Obtener un 4 o un 6.** $P(X\in\{4,6\})=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

c) **Obtener un número mayor de 10.** $P(X>10)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

d) **Obtener un múltiplo de 3.** $P(X\in\{3,6,9,12\})=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

e) **Obtener un múltiplo de 5.** $P(X\in\{5,10\})=\frac{7}{36}$

f) **Obtener un número par.** $P(X\in\{2,4,6,8,10,12\})=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

20. En una clase con 30 alumnos, la probabilidad de elegir un chico al azar es 0,6. ¿Cuántos chicos hay en la clase?

Sea N el número de chicos en la clase, entonces $\frac{N}{30}=0,6 \Rightarrow N=0,6\cdot 30=18$.

21. Se lanzan al aire dos dados de seis caras y se multiplican sus puntuaciones. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

Sea X el resultado de sumar las puntuaciones. Utilizamos la siguiente tabla para calcular las probabilidades:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

a) **Obtener 6.** $P(X=6)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

b) **Obtener 20.** $P(X=20)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

c) **Obtener un número par.** $P(X\in\{2,4,6,8,10,12,16,18,20,24,30,36\})=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

d) **Obtener un 8.** $P(X=8)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

e) **Obtener un múltiplo de 5.** $P(X\in\{5,10,15,20,25,30\})=\frac{11}{36}$

f) **Obtener un número menor que 4.** $P(X\in\{1,2,3\})=\frac{5}{36}$

22. Se introducen en una bolsa las letras de la palabra MENTOL y se sacan 4 letras al azar. Calcula la probabilidad de que las letras M y E sean elegidas.

El número de posibles elecciones, dado que no importa el orden y no se pueden repetir, es el número combinatorio $C_{6,4}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$. Las combinaciones en las que aparecen las letras M y E serán las maneras de elegir dos letras de entre las 4 restantes, esto es, $C_{4,2}=\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$. Por tanto, la probabilidad de que aparezcan la M y la E es: $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

23. Ana y Alberto van al cine junto con 3 amigos más. Se sientan al azar en 5 asientos consecutivos. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana y Alberto se sienten juntos?

El número de formas distintas en que se pueden sentar es $P_5=5!=120$. Se sentarán juntos en $P_4=4!=24$ de esas ocasiones. Por tanto, la probabilidad de que se sienten juntos es: $\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$.

COMPOSICIÓN DE SUCESOS INDEPENDIENTES

24. Sean A y B dos sucesos independientes, $P(A)=0,3$ y $P(B)=0,4$. Calcula:

a) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,12$

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,3+0,4-0,12=0,58$

c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,58=0,42$

d) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-0,12=0,88$

25. De una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9 se extrae una bola y se lanza una moneda al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Sacar un 3 y que salga cara.**

Sean los sucesos A="Sacar la bola con un 3" y B="Sacar una cara". Como son sucesos independientes:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$$

b) **Sacar un 0 y que salga cruz.**

Sean los sucesos A = "Sacar la bola con un 0" y B = "Sacar una cruz". Como son sucesos independientes:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$$

c) **Sacar un múltiplo de 3 y que salga cara.**

Sean los sucesos A = "Sacar una bola con un múltiplo de 3" y B = "Sacar una cruz". Como son sucesos independientes:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$$

d) **Sacar un número par.**

Sean los sucesos A = "Sacar la bola con un número par". Como hay 5 posibilidades de un total de 10: $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

26. Se lanza un dado de seis caras 3 veces. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Obtener un 1, un 3 y un 5.**

Como no se especifica el orden, hay que tener en cuenta los sucesos:

A_1 = "Sacar un 1 en el primer dado, un 3 en el segundo y un 5 en el tercero"

A_2 = "Sacar un 1 en el primer dado, un 5 en el segundo y un 5 en el tercero"

A_3 = "Sacar un 3 en el primer dado, un 1 en el segundo y un 5 en el tercero"

A_4 = "Sacar un 3 en el primer dado, un 5 en el segundo y un 1 en el tercero"

A_5 = "Sacar un 5 en el primer dado, un 1 en el segundo y un 3 en el tercero"

A_6 = "Sacar un 5 en el primer dado, un 3 en el segundo y un 1 en el tercero"

Todos ellos son incompatibles, con $P(A_i)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$, por tanto, la probabilidad del suceso "obtener un 1, un 3 y un 5" es $6\cdot\frac{1}{216}=\frac{1}{36}$

b) **Obtener un 2, un 3 y un número par.**

Como no se especifica el orden, hay que tener en cuenta los sucesos:

A_1 = "Sacar un 2 en el primer dado, un 3 en el segundo y par en el tercero"

A_2 = "Sacar un 2 en el primer dado, un 5 en el segundo y un 5 en el tercero"

A_3 = "Sacar un 3 en el primer dado, un 2 en el segundo y par en el tercero"

A_4 = "Sacar un 3 en el primer dado, par en el segundo y un 2 en el tercero"

A_5 = "Sacar par en el primer dado, un 2 en el segundo y un 3 en el tercero"

A_6 = "Sacar par en el primer dado, un 3 en el segundo y un 2 en el tercero"

Todos ellos son incompatibles, con $P(A_i)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{72}$, por tanto, la probabilidad del suceso "obtener un 2, un 3 y un número par" es $6\cdot\frac{1}{72}=\frac{1}{12}$

c) **Obtener un 2 exactamente.**
Teniendo en cuenta los sucesos:

A_1 = "Sacar un 2 en el primer dado y cualquier número en los otros dos"

A_2 = "Sacar un 2 en el segundo dado y cualquier número en los otros dos"

A_3 = "Sacar un 2 en el tercer dado y cualquier número en los otros dos"

Todos ellos son incompatibles, con $P(A_i)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$, por tanto, la probabilidad del suceso "obtener un 2, un 3 y un número par" es $3\cdot\frac{25}{216}=\frac{25}{72}$

27. Se lanzan dos dados de seis caras al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que la suma de las puntuaciones sume 7.**
Utilizamos la siguiente tabla para contar los casos:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Por tanto, la probabilidad es $P=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

b) **Que el producto de las puntuaciones sea 24.**
Utilizamos la siguiente tabla para contar los casos:

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Por tanto, la probabilidad es $P=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

c) **Que salga un 1.**
El suceso C = "Que salga un 1" está compuesto de 10 resultados sucesos elementales. Por tanto la probabilidad es $P(C)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

d) **Que no salga ningún 1.**

El suceso D = "Que no salga ningún 1" se puede calcular como producto de los sucesos independientes "que no salga un 1 en el primer dado" y "que no salga un 1 en el segundo dado".

Por tanto $P(D)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

e) **Que salga al menos un 1.**

$$P(\overline{D})=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$$

28. Una moneda está trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es el doble de la probabilidad de salir cruz. Si lanzamos la moneda tres veces, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que salga cara las tres veces.**

Como los sucesos C = "salir cara" y X = "salir cruz" son complementarios, tenemos que:

$$P(C)+P(X)=1 \Rightarrow 2P(X)+P(X)=1 \Rightarrow 3P(X)=1 \Rightarrow P(X)=\frac{1}{3} \Rightarrow P(C)=\frac{2}{3}$$

Por tanto:

$$P(CCC)=P(C)\cdot P(C)\cdot P(C)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

b) **Que salgan dos caras.**

$$P(CCX)+P(CXC)+P(XCC)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

c) **Que no salga ninguna cara.**

$$P(XXX)=P(X)\cdot P(X)\cdot P(X)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

d) **Que salga al menos una cara.**

$$P(\overline{XXX})=1-P(XXX)=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$$

29. De una urna que contiene 7 bolas blancas, 5 bolas verdes, 8 bolas azules y 1 bola roja se extrae una bola, se vuelve a introducir en la urna y se saca otra bola. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Las dos bolas son azules.**

Consideramos los sucesos:

A = "la primera bola es azul"

B = "la segunda bola es azul"

Como son sucesos independientes (ya que reintroducimos la bola):

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{8}{21}\cdot\frac{8}{21}=\frac{64}{441}$$

b) **Una bola es blanca y la otra roja.**

Consideramos los sucesos:

A_1 = "la primera bola es blanca" y B_1 = "la segunda bola es roja"

A_2 = "la primera bola es roja" y B_2 = "la segunda bola es blanca"

La probabilidad es:

$$P(A_1\cap B_1)+P(A_2\cap B_2)=P(A_1)\cdot P(B_1)+P(A_2)\cdot P(B_2)=\frac{7}{21}\cdot\frac{1}{21}+\frac{1}{21}\cdot\frac{7}{21}=\frac{14}{441}=\frac{2}{63}$$

c) **Una de las bolas es roja.**
Consideramos los sucesos:
A = "la primera bola es roja y la segunda no"
B = "la segunda bola es roja y la primera no"
Como son sucesos incompatibles, tenemos que:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{21}\cdot\frac{20}{21}+\frac{20}{21}\cdot\frac{1}{21}=\frac{40}{441}$$

d) **Una de las bolas es verde.**
Consideramos los sucesos:
A = "la primera bola es verde y la segunda no"
B = "la segunda bola es verde y la primera no"
Como son sucesos incompatibles, tenemos que:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{21}\cdot\frac{16}{21}+\frac{16}{21}\cdot\frac{5}{21}=\frac{160}{441}$$

e) **Las dos bolas son verdes.**
Consideramos los sucesos:
A = "la primera bola es verde"
B = "la segunda bola es verde"
Como son sucesos independientes (ya que reintroducimos la bola):
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{5}{21}\cdot\frac{5}{21}=\frac{25}{441}$$

f) **Ninguna de las bolas es verde.**
Consideramos los sucesos:
A = "la primera bola no es verde"
B = "la segunda bola no es verde"
Como son sucesos independientes (ya que reintroducimos la bola):
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{16}{21}\cdot\frac{16}{21}=\frac{256}{441}$$

g) **Alguna bola es verde.**
Es el complementario del anterior: $P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)=1-\frac{256}{441}=\frac{185}{441}$

PROBABILIDAD DE SUCESOS INDEPENDIENTES

30. En una clase hay 17 chicos y 13 chicas. Si se eligen dos alumnos al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que los dos sean chicos.**
Consideramos los sucesos:
A = "la primera persona elegida es un chico"
B = "la segunda persona elegida es un chico”
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{17}{30}\cdot\frac{16}{29}=\frac{136}{435}$$

b) **Que los dos sean chicas.**
Consideramos los sucesos:
C = "la primera persona elegida es una chica"
D = "la segunda persona elegida es una chica”
$$P(C\cap D)=P(C)\cdot P(D/C)=\frac{13}{30}\cdot\frac{12}{29}=\frac{26}{145}$$

c) **Que uno de ellos sea chico.**
Consideramos los sucesos:
E = "la primera persona elegida es un chico y la segunda una chica"
F = "la primera persona elegida es una chica y la segunda un chico"
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{17}{30}\cdot\frac{13}{29} + \frac{13}{30}\cdot\frac{17}{29} = \frac{442}{870}$$

d) **Que al menos uno de ellos sea chica.**
Es la complementaria del apartado a): $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{136}{435} = \frac{296}{435}$

e) **Que ninguno sea chico.**
Es el mismo caso del apartado b), ya que si ninguno es chico significa que ambas con chicas, por tanto, la probabilidad es $\frac{26}{145}$.

31. En una clase hay 12 chicos y 15 chicas. De los chicos, hay 7 que visten con vaqueros y de las chicas 3. Se elige un alumno al azar. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que vista con vaqueros.**
Sean los sucesos:
A = "la persona elegida es un chico"
B = "la persona elegida es una chica"
V = "la persona elegida lleva vaqueros"
Entonces, la probabilidad de que lleve vaqueros es:
$$P(V) = P(A)\cdot P(V/A) + P(B)\cdot P(V/B) = \frac{12}{27}\cdot\frac{7}{12} + \frac{15}{27}\cdot\frac{3}{15} = \frac{10}{27}$$

b) **Que sea chico y no lleve vaqueros.**
$$P\left(\overline{V} \cap A\right) = P(A)\cdot P\left(\overline{V}/A\right) = \frac{12}{27}\cdot\frac{5}{12} = \frac{5}{27}$$

c) **Que sea chica y lleve vaqueros.**
$$P(V \cap B) = P(B)\cdot P(V/B) = \frac{15}{27}\cdot\frac{3}{15} = \frac{1}{9}$$

d) **Que sea chica y no lleve vaqueros.**
$$P\left(\overline{V} \cap B\right) = P(A)\cdot P\left(\overline{V}/B\right) = \frac{15}{27}\cdot\frac{12}{15} = \frac{4}{9}$$

e) **Que sea chico y lleve vaqueros.**
$$P(V \cap A) = P(A)\cdot P(V/A) = \frac{12}{27}\cdot\frac{7}{12} = \frac{7}{27}$$

32. Una urna contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se extraen tres bolas consecutivamente. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que salgan el 3, luego el 2 y finalmente el 5.**
Sean los sucesos A = {sacar en la primera bola un 3}, B = {sacar en la segunda bola un 2} y C = {sacar en la tercera bola un 5}, entonces:
$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)\cdot P(C/A \cap B) = P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A \cap B)$$
Por tanto, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{720}$

b) **Que salgan el 0, el 9 y un número par.**

Sean los sucesos

A_1 = {sacar en la primera bola un 0, en la segunda un 9 y en la tercera par distinto de 0},

A_2 = {sacar en la primera bola un 0, en la segunda par distinto de 0 y en la tercera un 9},

A_3 = {sacar en la primera bola un 9, en la segunda un 0 y en la tercera par distinto de 0},

A_4 = {sacar en la primera bola un 9, en la segunda par distinto de 0 y en la tercera un 0},

A_5 = {sacar en la primera bola par distinto de 0, en la segunda un 0 y en la tercera un 9},

A_6 = {sacar en la primera bola par distinto de 0, en la segunda un 9 y en la tercera un 0},

Todos ellos son incompatibles. Teniendo en cuenta la fórmula:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)\cdot P(C/A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B)$$

Tenemos que la probabilidad de que salga el 0, el 9 y un número par es:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right)=\sum_{i=1}^{6}P(A_i)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{30}$$

c) **Que salga el 1.**

Sean los sucesos

A_1 = {sacar en la primera bola un 1},

A_2 = {sacar en la primera bola cualquier número y en la segunda un 1},

A_3 = {sacar en las dos primeras bolas cualquier número y en la tercera un 1},

Tenemos que $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}=\frac{242}{720}=\frac{121}{360}$

d) **Que no salga el 3.**

Sean los sucesos A = {no sacar en la primera bola un 3}, B = {no sacar en la segunda bola un 3} y C = {no sacar en la tercera bola un 3}, entonces:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)\cdot P(C/A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B)$$

Por tanto, $P(A\cap B\cap C)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{10}$

33. De una bolsa que contiene 10 bolas negras y 8 bolas blancas se extraen dos bolas consecutivamente. Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

Sean los sucesos:

A = {sacar las dos bolas del mismo color}

N_1 = {sacar la primera bola negra},

N_2 = {sacar la segunda bola negra},

B_1 = {sacar la primera bola blanca},

B_2 = {sacar la segunda bola blanca},

Tenemos que $A=(N_1\cap N_2)\cup(B_1\cap B_2)$ y por tanto, como $N_1\cap N_2$ y $B_1\cap B_2$ son incompatibles:

$$P(A)=P(N_1\cap N_2)+P(B_1\cap B_2)=P(N_1)\cdot P(N_2/N_1)+P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)$$

Así, $P(A)=\frac{10}{18}\cdot\frac{9}{17}+\frac{8}{18}\cdot\frac{7}{17}=\frac{146}{306}=\frac{73}{153}$

34. De una urna que contiene 2 bolas blancas, 4 bolas negras, 5 bolas verdes y 6 bolas rojas se extraen dos bolas al azar. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que la primera bola sea blanca y la segunda verde.**
Sean los sucesos:
B = {sacar la primera bola blanca}
V = {sacar la segunda bola verde},
Entonces $P(B\cap V)=P(B)\cdot P(V/B)=\frac{2}{17}\cdot\frac{5}{16}=\frac{5}{136}$

b) **Que las dos bolas sean negras.**
Sean los sucesos:
N_1 = {sacar la primera bola negra}
N_2 = {sacar la segunda bola negra},
Entonces $P(N_1\cap N_2)=P(N_1)\cdot P(N_2/N_1)=\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{16}=\frac{3}{68}$

c) **Que una de las bolas sea roja.**
Sean los sucesos:
R_1 = {sacar la primera bola roja y la segunda de otro color}
R_2 = {sacar la segunda bola roja y la primera de otro color},
Entonces $P(R_1\cup R_2)=P(R_1)+P(R_2)=\frac{6}{17}\cdot\frac{11}{16}+\frac{11}{17}\cdot\frac{6}{16}=\frac{33}{68}$

d) **Que ninguna bola sea roja.**
Sean los sucesos:
R_1 = {sacar la primera bola roja}
R_2 = {sacar la segunda bola roja},
Entonces $P(\overline{R_1}\cap\overline{R_2})=P(\overline{R_1})\cdot P(\overline{R_2}/\overline{R_1})=\frac{11}{17}\cdot\frac{10}{16}=\frac{55}{136}$

e) **Que al menos una bola sea roja.**
Se trata del complementario el anterior: $P\left(\overline{\overline{R_1}\cap\overline{R_2}}\right)=1-P(\overline{R_1}\cap\overline{R_2})=1-\frac{55}{136}=\frac{81}{136}$

35. En mi clase hay 12 chicos y 18 chicas. A 10 de los chicos les gustan las matemáticas y a 10 de las chicas también. Si se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Que sea chico y le gusten las matemáticas.**
Sean los sucesos:
A = {que la persona elegida sea un chico}
M = {que a la persona elegida le gusten las matemáticas},
Entonces $P(A\cap M)=P(A)\cdot P(M/A)=\frac{12}{30}\cdot\frac{10}{12}=\frac{1}{3}$

b) **Que sea chica y no le gusten las matemáticas.**
Sea el suceso B = {que la persona elegida sea una chica}

Entonces $P\left(B\cap\overline{M}\right)=P(B)\cdot P\left(\overline{M}/B\right)=\dfrac{18}{30}\cdot\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{5}$

c) **Que sea chico y no le gusten las matemáticas.**

$$P\left(A\cap\overline{M}\right)=P(A)\cdot P\left(\overline{M}/A\right)=\frac{12}{30}\cdot\frac{2}{12}=\frac{1}{15}$$

d) **Que sea chica y le gusten las matemáticas.**

$$P(B\cap M)=P(B)\cdot P(M/B)=\frac{18}{30}\cdot\frac{10}{18}=\frac{1}{3}$$

36. En una pajarería hay 30 canarios en una jaula, 18 machos y 12 hembras. De los machos, 4 son blancos y de las hembras, 2. Se cogen dos canarios al azar. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) **Los dos son machos, uno de ellos blanco.**

Sean los sucesos:

A = {el primer pájaro es un macho blanco y el segundo un macho de otro color}

B = {el primer pájaro es un macho de otro color y el segundo un macho blanco},

Entonces $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{4}{30}\cdot\dfrac{14}{29}+\dfrac{14}{30}\cdot\dfrac{4}{29}=\dfrac{56}{435}$

b) **Uno es hembra.**

Sean los sucesos:

A = {el primer pájaro es un macho y el segundo hembra}

B = {el primer pájaro es una hembra y el segundo un macho}

Entonces $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{18}{30}\cdot\dfrac{12}{29}+\dfrac{12}{30}\cdot\dfrac{18}{29}=\dfrac{216}{435}=\dfrac{72}{145}$

c) **Los dos son hembras blancas.**

Sean los sucesos:

A = {el primer pájaro es una hembra blanca} y B = {el segundo pájaro es una hembra blanca}

Entonces $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=\dfrac{2}{30}\cdot\dfrac{1}{29}=\dfrac{2}{435}$

d) **Uno es una hembra blanca y el otro un macho.**

Sean los sucesos:

A = {el primer pájaro es una hembra blanca y el segundo un macho}

B = {el primer pájaro es un macho y el segundo una hembra blanca},

Entonces $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{2}{30}\cdot\dfrac{18}{29}+\dfrac{18}{30}\cdot\dfrac{2}{29}=\dfrac{36}{435}=\dfrac{12}{145}$

e) **Los dos son blancos.**

Sean los sucesos:

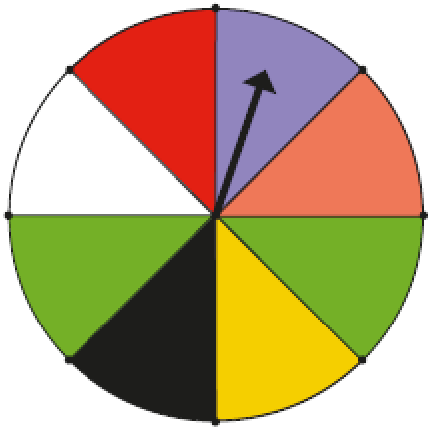
A = {el primer pájaro es blanco} y B = {el segundo pájaro es blanco}

Entonces $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=\dfrac{6}{30}\cdot\dfrac{5}{29}=\dfrac{1}{29}$

DESAFÍO PISA - PÁG. 289

EN LA TÓMBOLA

A Laura y Juan les han llamado la atención unos juegos que hay en una tómbola de la feria de su pueblo. Uno de los juegos consiste en lanzar dos dados y hacer una tirada en una ruleta como la que se muestra en la figura.



Si al lanzar los dados su suma es múltiplo de 5, entonces puede hacer una tirada en la ruleta. Se obtiene un premio de tipo 1 si la ruleta se para en el color rojo, un premio de tipo 2 si se para en el color verde y un premio de tipo 3 si se para en el color azul.
El caso es que se quedan un rato viendo el juego y deciden jugar. ¿Podrías ayudarlos a responder a las siguientes cuestiones?

ACTIVIDAD 1. ¿Con qué probabilidad podrán hacer una tirada de ruleta?

A: $\frac{7}{36}$. Hay 4 formas diferentes de sacar un 5 y 3 formas diferentes de sacar un 10, por lo que la probabilidad de obtener un múltiplo de 5 es $P(M_5)=\frac{7}{36}$

ACTIVIDAD 2. La probabilidad de obtener algún premio es:

C: $\frac{7}{96}$. Como la probabilidad de que salga un color premiado es $\frac{3}{8}$ y los sucesos "obtener un 5 en la tirada" y "obtener un color premiado en la ruleta" son independientes, la probabilidad es $\frac{7}{36}\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{96}$

ACTIVIDAD 3. La probabilidad de obtener un premio de tipo 3 será:

A: $\frac{7}{288}$ ya que $\frac{7}{36}\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{288}$

ACTIVIDAD 4. La probabilidad de no obtener premio sabiendo que han realizado una tirada de ruleta es:

A: $\frac{35}{288}$, ya que $\frac{7}{36}\cdot\frac{5}{8}=\frac{35}{288}$

ACTIVIDAD 5. La probabilidad de no obtener premio es:

A: $\frac{89}{96}$ ya que $1-\frac{7}{96}=\frac{89}{96}$