6. Funciones lineales y cuadráticas

ACTIVIDADES

1. A partir del enunciado verbal que nos indica la relación entre las dos variables, podemos obtener el resto de datos y formas de expresar la función.

a)

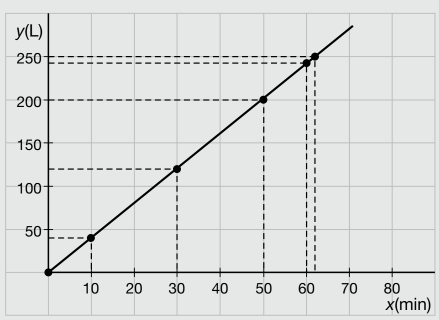
x (min)	0	10	30	50	60	62,5
$y = f(x)$ (L)	0	40	120	200	240	250

b) $D(f) = [0{,}62{,}5]$. A los 62,5 minutos, la bañera estará completamente llena.

$R(f) = [0{,}250]$

$y = f(x) = 4x$

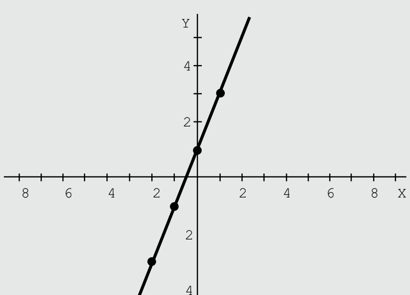
c) A partir de los datos de la tabla de valores:



2. Respuesta abierta.

3. $f(x) = 2x + 1$

x	–2	–1	0	1	2
y	–3	–1	1	3	5



— $D(f) = \mathbb{R}$

$R(f) = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje OX: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

Puntos de corte con el eje OY: (0, 1)

Crecimiento y decrecimiento: la función es creciente en todo el intervalo de x.

Tasa de variación media: la TVM en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ corresponde a la pendiente de la recta que es 2.

Máximos y mínimos: no presenta.

Continuidad y discontinuidad: es función continua en todo el intervalo de x.

Simetría y periodicidad: la gráfica no es simétrica respecto al eje de coordenadas ni respecto al origen de coordenadas. La función no es periódica.

4. a) Los puntos de corte con los ejes son (–3, 0), (–1, 0) y (0, 9)

b) Es creciente en los intervalos (–3, –2) y $(-1, +\infty)$ y es decreciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y (–2, –1).

c) Es simétrico respecto a la recta $x = -2$.

d) La TVM en el intervalo (–2, –1) es –1:

$$\frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{0-1}{1} = -1$$

5. a) Se obtiene trasladando la gráfica de la función dos veces hacia la derecha.

b) Al ser periódica, se verificará que:

$f(7) = f(3 + 4) = f(3) = 1$

$f(13) = f(1 + 4 \cdot 3) = f(1) = 2$

$f(1603{,}5) = f(3{,}5 + 4 \cdot 400) = f(3{,}5) = 1{,}5$

6. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) La función presenta un máximo relativo en $x = -2{,}5$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

c) Puntos de corte con el eje OX: (–4, 0), (–1, 0) y (3, 0)

Punto de corte con el eje OY: (0, –2 ,3)

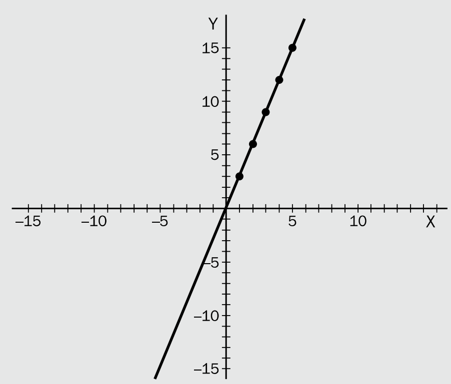
d) La función crece en los intervalos: $(-\infty, -2{,}5) \cup (1, \infty)$

La función decrece en el intervalo: (–2, 5 ,1)

7. a) $x \rightarrow$ longitud del lado del triángulo equilátero.

$y \rightarrow$ perímetro del triángulo equilátero.

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15



b) Una función afín.

c) $m = 3$

La expresión algebraica es $y = 3x$.

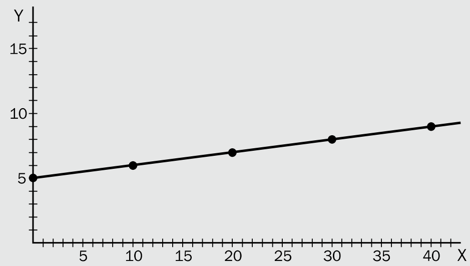
d) $y = 3x = 3 \cdot 8 = 24$

El perímetro es 24 cm.

8. a) $x \rightarrow$ longitud del lado del triángulo equilátero.

$y \rightarrow$ perímetro del triángulo equilátero.

x	0	10	20	30	40
y	5	6	7	8	9



b) Una función afín.

c) $m = \dfrac{1}{10} = \dfrac{2}{20} = 0{,}1$

La pendiente es 0,1.

La ordenada en el origen es 5.

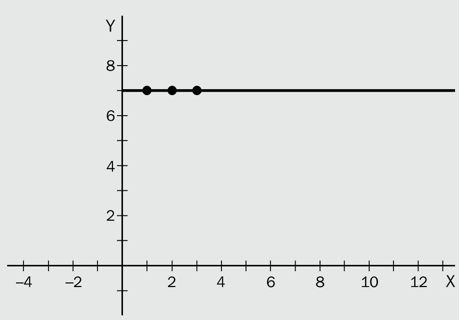
La expresión algebraica es $y = 0{,}1x + 5$.

d) $x = 60 \Rightarrow y = 0{,}1 \cdot 60 + 5 = 11$

Costará 11 euros.

9. a)

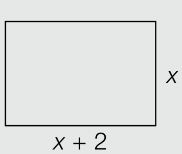
Tiempo en horas (x)	1	2	3
Coste en euros (y)	7	7	7



b) La pendiente de la recta es 0.

La ordenada en el origen, $b = 7$.

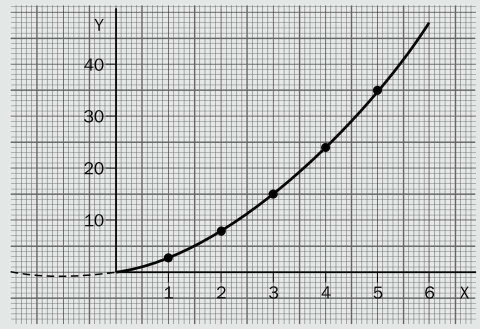
10.



$x \rightarrow$ longitud de la altura del rectángulo.

$y \rightarrow$ área del rectángulo.

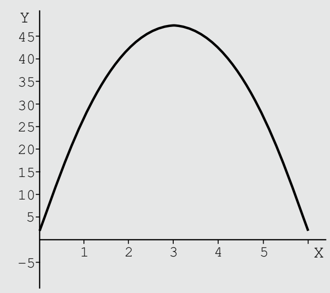
x	1	2	3	4	5
y	3	8	15	24	35



$y = x(x+2) \Rightarrow y = x^2 + 2x$

11.

t(s)	0	1	2	3	4	5	6
y(m)	2	27	42	47	42	27	2



12. a) $V\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{11}{12}\right)$ b) $V\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{53}{6}\right)$

c) $V\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{61}{8}\right)$ d) $V\left(-\dfrac{1}{2}, -13\right)$

13. a) $y = 8x^2$

La coordenada x del vértice es: $x = \dfrac{-b}{2a} = 0$

La coordenada y del vértice es: $y = 8 \cdot 0^2 = 0$

Vértice: (0, 0)

Eje: $x = \dfrac{-b}{2a} = 0$

Puntos de corte con el eje OX y OY: (0, 0)

b) $y = x^2 - 2x$

La coordenada x del vértice es:

$x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} \Rightarrow x = 1$

La coordenada y del vértice es:

$y = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow y = -1$

Otra manera más sencilla de hallar y es a partir de la expresión algebraica:

$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

Vértices: (1, –1)

Eje: $x = 1$

Puntos de corte con el eje *OX*: (0, 0), (2, 0)

Puntos de corte con el eje *OY*: (0, 0)

c) $y = -x^2 - 2x + 1$

Vértices: (–1, 2)

Eje: $x = -1$

Puntos de corte con el eje *OX*:

$(-1+\sqrt{2}, 0)$, $(-1-\sqrt{2}, 0)$

Puntos de corte con el eje *OY*: (0, 1)

d)

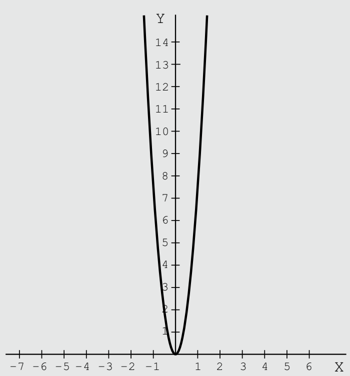
Vértice: (0, 3)

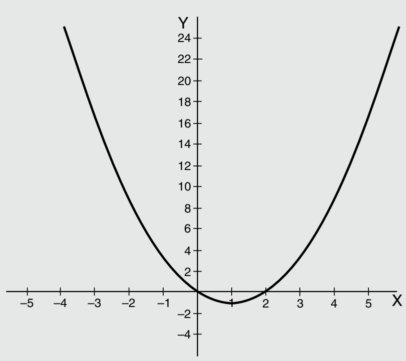
Eje: $x = 0$

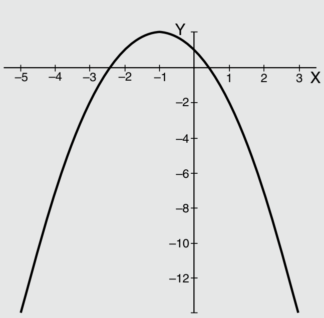
Puntos de corte con el eje *OX*: no existen

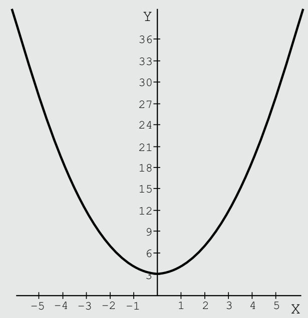
Puntos de corte con el eje *OY*: (0, 3) dos variables, podemos obtener el resto de datos y formas de expresar la función.

14.









15. a) Es cierta.

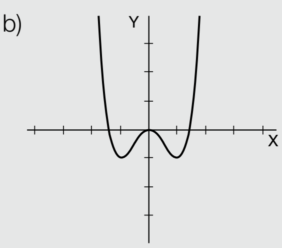
b) Es cierta.

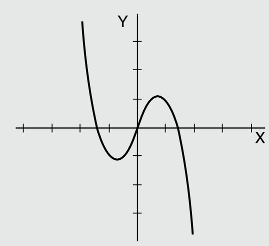
c) Es falsa, en el intervalo (–1, 3), es: $f(x) > g(x)$.

d) Es cierta.

16. a) El gráfico de una función par es simétrico respecto al eje de ordenadas y el de una impar es simétrico respecto al origen de coordenadas.

b)





17. Funciones de primer grado son: *a, b, e.*

Funciones de segundo grado son: *c, d, f.*

18. a) $TVM[1,3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{4\cdot 3 - 4\cdot 1}{2} = \frac{12-4}{2} = \frac{8}{2} = 4$

b) $TVM[1,3] = \frac{g(3)-g(1)}{3-1} = \frac{(2\cdot 3+4)-(2\cdot 1+4)}{2} =$

$= \frac{10-6}{2} = \frac{4}{2} = 2$

c) $TVM[1,3] = \frac{h(3)-h(1)}{3-1} = \frac{(-3\cdot 3-1)-(-3\cdot 1-1)}{2} =$

$= \frac{-10-(-4)}{2} = \frac{-10+4}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

d) $TVM[1,3] = \frac{i(3)-i(1)}{3-1} =$

$= \frac{\left(-3^2-2\cdot 3-1\right)-\left(-1^2-2\cdot 1-1\right)}{2} =$

$= \frac{(-9-6-1)-(-1-2-1)}{2} = \frac{(-16)-(-4)}{2} =$

$= \frac{-16+4}{2} = -\frac{12}{2} = -6$

e) $TVM[1,3] = \frac{j(3)-j(1)}{3-1} = \frac{\left(3^2-9\right)-\left(1^2-9\right)}{2} =$

$= \frac{0-(-8)}{2} = \frac{8}{2} = 4$

19. a) $\text{TVM}[-1,1]=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{(-2\cdot 1+5)-[-2\cdot(-1)+5]}{1+1}=$

$\dfrac{3-7}{2}=-\dfrac{4}{2}=-2$

Por tanto, como la tasa de variación media es negativa, la función *f* es decreciente.

b) $\text{TVM}[-2,0]=\dfrac{g(0)-g(-2)}{0-(-2)}=\dfrac{0-\left[2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)\right]}{2}=$

$=-\dfrac{14}{2}=-7$

Por tanto, como la tasa de variación media es negativa, la función *g* es decreciente.

c)

Por tanto, como la tasa de variación media es positiva, la función *h* es creciente.

d) $\text{TVM}[-3,-1]=\dfrac{i(-1)-i(-3)}{-1-(-3)}=$

$=\dfrac{[6\cdot(-1)-2]-[6\cdot(-3)-2]}{-1+3}=$

$=\dfrac{-8-(-20)}{2}=\dfrac{-8+20}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

Por tanto, como la tasa de variación media es positiva, la función *i* es creciente.

20. a) $\text{TVM}[-1,1]=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{-2-6}{2}=-\dfrac{8}{2}=-4$

b) $\text{TVM}[-1,1]=\dfrac{g(1)-g(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{-4-0}{2}=-\dfrac{4}{2}=-2$

c) $\text{TVM}[-1,1]=\dfrac{h(1)-h(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{1-(-7)}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

21. a) La función f tiene una discontinuidad evitable para $x = 1$.

b) La función *g* tiene para $x = -1$ y $x = 2$ una discontinuidad de salto finito.

c) La función *h* tiene para $x = -2$ una discontinuidad de salto finito y para $x = 2$ una discontinuidad evitable.

d) La función *i* es continua en su dominio.

22. a) La gráfica de la función *f* es simétrica respecto al eje de ordenadas; por tanto, es par.

b) La gráfica de la función *g* es simétrica respecto al origen de coordenadas; por tanto, es impar.

c) La gráfica de la función *h* es simétrica respecto al eje de ordenadas; por tanto, es par.

d) La gráfica de la función *i* es simétrica respecto al origen de coordenadas; por tanto, es impar.

23. a) La función *f* es periódica y su período es 2□.

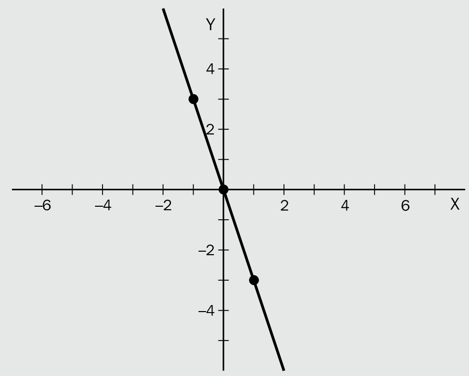
b) La función *g* es periódica y su período es □.

c) La función *h* no es periódica.

24. Respuesta abierta.

25. a)

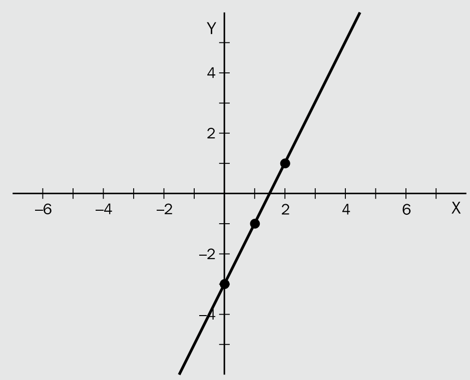
x	–1	0	1
y	3	0	–3



Función lineal. $m = -3$, $b = 0$.

b)

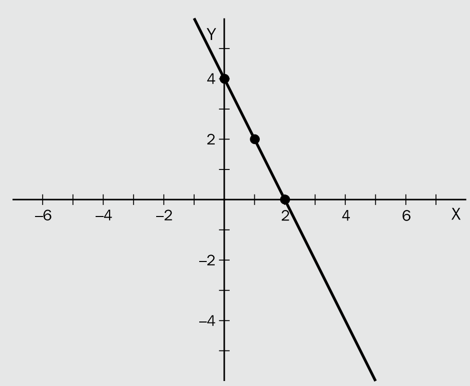
x	0	1	2
y	–3	–1	1



Función afín. $m = 2$, $b = -3$.

c)

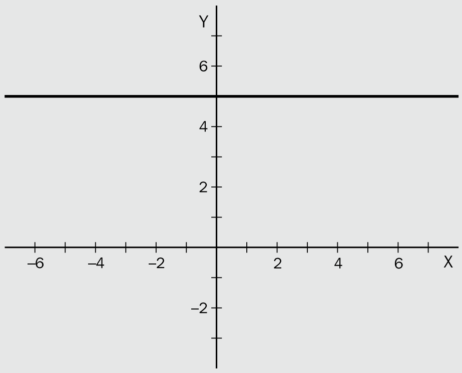
x	0	1	2
y	4	2	0



Función afín. $m = -2$, $b = 4$.

d)

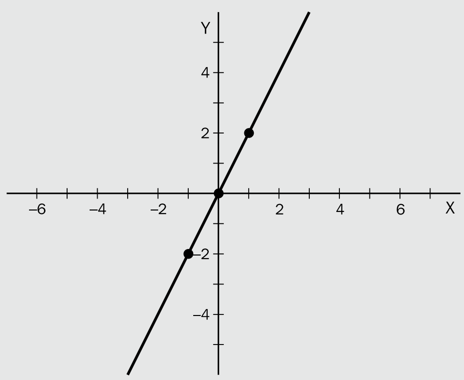
x	0	1	2
y	5	5	5



Función constante $m = 0$, $b = 5$.

e)

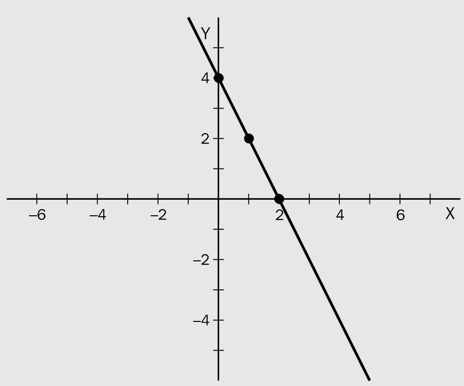
x	–1	0	1
y	–2	0	2



Función constante $m = 2$, $b = 0$.

f)

x	–1	0	1
y	–6	–6	–6



Función constante $m = 0$, $b = –6$.

26. a) $y = 5$ c) $y = -3x$

b) $y = 4$ d) $y = \dfrac{2}{3}x$

27. Si la representación gráfica de la función afín es una recta paralela a $y = 2x$, tendrá la misma pendiente, es decir, $m = 2$. Por tanto: $y = 2x + b$.

Puesto que pasa por el punto $P(2, 7)$, se cumple:

$7 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow 7 - 4 = b \Rightarrow b = 3$

La expresión algebraica es: $y = 2x + 3$.

28. Una función afín es de la forma $f(x) = mx + b$.

$f(1) + 3 = f(2) \Rightarrow m \cdot 1 + b + 3 = m \cdot 2 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 3$

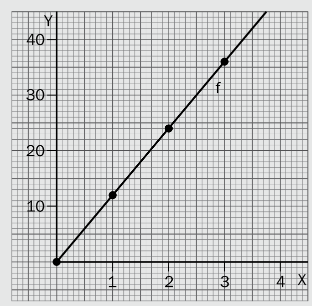
$f(x) = 3x + b;$

$4 \cdot f(2) = f(6) \Rightarrow 4(3 \cdot 2 + b) = 3 \cdot 6 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow 4b - b = 18 - 24 \Rightarrow b = \dfrac{-6}{3} = -2$

La expresión algebraica es: $f(x) = 3x - 2$.

29.



a) Función lineal.

b) $m = 12$, $b = 0$. Por lo tanto, $y = 12x$.

c) $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \mathbb{R}$

d) Puntos de corte con el eje OX: (0, 0)

Puntos de corte con el eje OY: (0, 0)

Función creciente en todo el intervalo de x.

TVM en el intervalo [1, 3]:

e) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) = 6$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -6$

Es función impar ya que $f(-x) = -f(x)$

30. a) $m = tg\,45° = 1$

$y = x + b$

$P(-3, 2)$: $2 = -3 + b \Rightarrow b = 5$

$y = x + 5$

b) $m = tg\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + b$

$Q(3, 1)$: $1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} + b \Rightarrow b = 1 - \sqrt{3}$

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 1 - \sqrt{3}$

31. $y = mx + b$, $P(1, -5)$, $b = -2$

$-5 = m - 2 \Rightarrow m = -3$

$y = -3x - 2$

32. $A(-2, 1)$, $m = \dfrac{4}{3}$

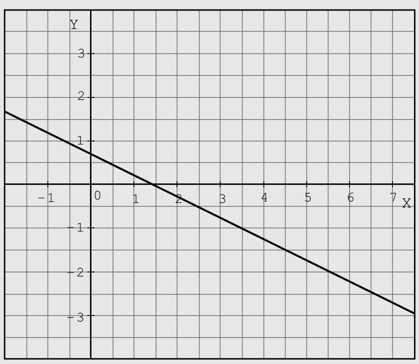
$y = mx + b$;

$1 = \dfrac{4}{3} \cdot (-2) + b \Rightarrow b = \dfrac{11}{3}$

$y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{11}{3}$

33. a)

b)



c) La pendiente es negativa, por lo que la recta es decreciente.

d) Puntos de corte con el eje x:

$0 = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Puntos de corte con el eje y:

$y = 0 + \dfrac{3}{4} \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}$

Los puntos de corte con los ejes son $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \dfrac{3}{4}\right)$ la pendiente $y = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^x$.

34. a) La relación que se establece entre las funciones cuadráticas y los gráficos es:

f – **2**; g – **1**; h – **3**

b) Sí, la gráfica de la función g puede obtenerse trasladando 2 unidades hacia arriba la gráfica de la función f y la gráfica de la función h**,** trasladando 4 unidades hacia abajo la de la función g.

35. Representamos la función de la forma:

$y = ax^2 + bx + c$.

Puesto que la imagen de 0 es 24, se verifica:

$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 24 \Rightarrow c = 24 \Rightarrow$

$f(x) = ax^2 + bx + 24$

La gráfica de la función pasa por el punto $P(3, 0)$:

$0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 9a + 3b + 24 \Rightarrow 3a + b = -8$

Dado que una de las antiimágenes de 0 por la función es 4, se cumple:

$0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 16a + 4b + 24 \Rightarrow 4a + b = -6$

Obtenemos este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3a + b = -8 \\ 4a + b = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a + b = -8 \\ -4a - b = 6 \end{array}\right\}$$

$-a = -2 \Rightarrow a = 2$

$3a + b = -8 \Rightarrow 3 \cdot 2 + b = -8 \Rightarrow b = -14$

Por tanto, es: $y = 2x^2 - 14x + 24$.

36. a) $x = -1$, $V(-1, -8)$

b) $x = 0$, $V(0, 2)$

c) $x = \dfrac{1}{4}$, $V\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$

d) $x = -4$, $V(-4, -1)$

37. a) $x^2 + 10x + 25 = 0 \Rightarrow x = -5$

Puntos de corte con el eje OX: $(-5, 0)$

b) $-x^2 - 8x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$ y $x = 1$

Puntos de corte con el eje OX: $(-9, 0)$ y $(1, 0)$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 1$

Puntos de corte con el eje OX: $(1, 0)$ y $(2, 0)$

d) $2x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución.

No hay puntos de corte con el eje OX.

38. a) $y = x^2 - 6x - 7$

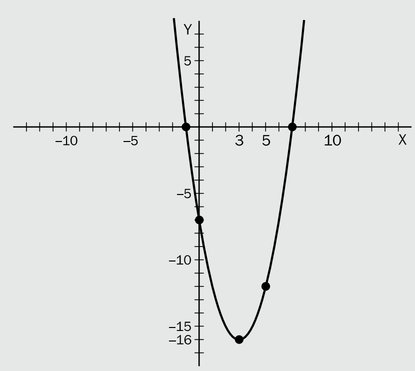
$a = 1 > 0$, ramas de la parábola orientadas hacia arriba, $V(3, -16)$, $x = 3$.

Puntos de corte con el eje OX:

$x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow x = -1$ y $x = 7$

Puntos de corte con el eje OY: $y = -7$

x	–1	0	3	5	7
y	0	–7	–16	–12	0



— $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [-16, +\infty)$

Puntos de corte con el eje *OX*: (–1, 0) y (7, 0)

Puntos de corte con el eje *OY*: (0, –7)

Función decreciente en el intervalo $(-\infty, 3)$ y creciente en el intervalo $(3, +\infty)$. Presenta un mínimo absoluto en $x = 3$.

Función continua en todo el intervalo de *x*.

La gráfica no es simétrica respecto al eje de ordenadas o al origen de coordenadas. La función no es periódica.

b) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4}$

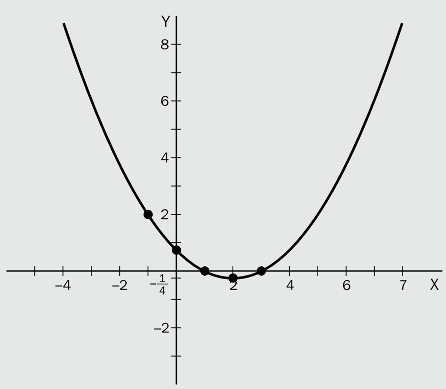
$a = \frac{1}{4} > 0$, ramas de la parábola orientadas hacia arriba, $V\left(2, -\frac{1}{4}\right)$, $x = 2$.

Puntos de corte con el eje *OX*:

$\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = 3$

Puntos de corte con el eje *OY*: $y = \frac{3}{4}$

x	–1	0	1	2	3
y	2	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0



— $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

Puntos de corte con el eje *OX*: (1, 0), (3, 0)

Puntos de corte con el eje *OY*: $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

Función decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y creciente en el intervalo $(2, +\infty)$. Presenta un mínimo absoluto en $x = 2$.

Función continua. La gráfica no es simétrica respecto al eje de ordenadas o al origen de coordenadas. La función no es periódica.

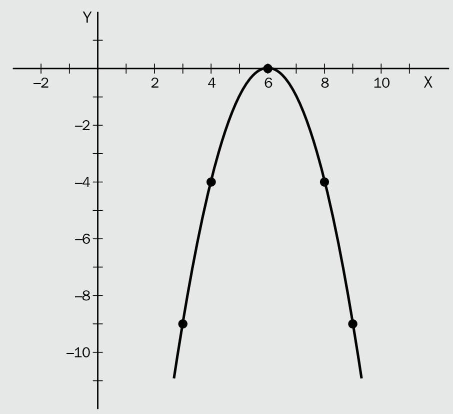
c) $y = -x^2 + 12x - 36$

$a = -1 < 0$, ramas de la parábola orientadas hacia abajo, $V(6, 0)$, $x = 6$.

$y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 12x - 36 \Rightarrow x = 6$

$x = 0 \Rightarrow y = -36$

x	3	4	6	8	9
y	–9	–4	0	–4	–9



— $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [0, -\infty)$

Puntos de corte con el eje *OX*: (6, 0)

Puntos de corte con el eje *OY*: (0, –36)

Función creciente en el intervalo $(-\infty, 6)$ y decreciente en el intervalo $(6, +\infty)$. Presenta un máximo absoluto en $x = 6$.

Función continua. La gráfica no es simétrica respecto al eje de ordenadas o al origen de coordenadas. La función no es periódica.

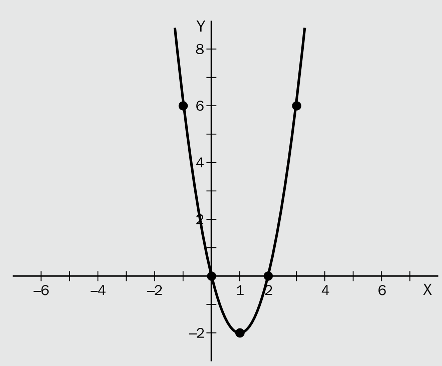
d) $y = 2x^2 - 4x$

$a = 2 > 0$, ramas de la parábola orientadas hacia arriba, $V(1, -2)$, $x = 1$.

$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 4x \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

x	–1	0	1	2	3
y	6	0	–2	0	6



— $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [-2, +\infty)$

Puntos de corte con el eje *OX*: (0, 0), (2, 0)

Puntos de corte con el eje *OY*: (0, 0)

Función decreciente en el intervalo (–∞, 1) y creciente en el intervalo (1, +∞). Presenta un máximo absoluto en $x = 1$.

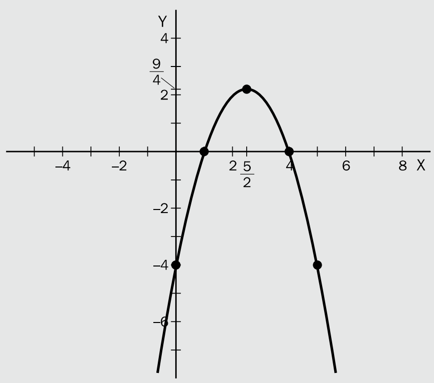
Función continua. La gráfica no es simétrica respecto al eje de ordenadas o al origen de coordenadas. La función no es periódica.

e) $y = -x^2 + 5x - 4$

$a = -1 < 0$, ramas de la parábola orientadas hacia abajo, $V\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $x = \frac{5}{2}$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 5x - 4 \Rightarrow x = 1$ y $x = 47$

x	0	1	$\frac{5}{2}$	4	5
y	–4	0	$\frac{5}{2}$	0	–4



— $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \left[\frac{9}{4}, -\infty\right)$

Puntos de corte con el eje OX: (1, 0), (4, 0)

Puntos de corte con el eje OY: (0, –4)

Función creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$

y decreciente en el intervalo $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Presenta un máximo absoluto en $x = \frac{5}{2}$.

Función continua. La gráfica no es simétrica respecto al eje de ordenadas o al origen de coordenadas. La función no es periódica.

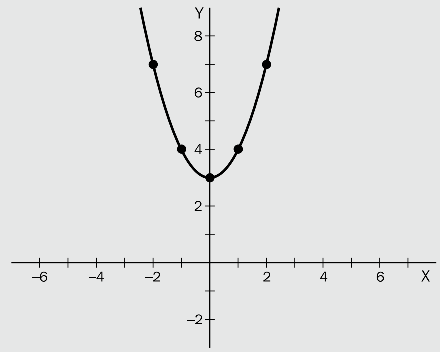
f) $y = x^2 + 3$

$a = 1 > 0$, ramas de la parábola orientadas hacia arriba, $V(0, 3)$, $x = 0$.

$y = 0 \infty 0 = x^2 + 3 \infty$ no tiene solución

$x = 0 \Rightarrow y = 3$

x	–2	–1	0	1	2
y	7	4	3	4	7



— $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [3, +\infty]$. No corta al eje OX.

Punto de corte con el eje OY: (0, 3).

Función decreciente en el intervalo (–∞, 0) y creciente en el intervalo (0, +∞). Presenta un mínimo absoluto en $x = 0$.

Función continua. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas: función par. La función no es periódica.

39. $\left.\begin{array}{l} 10 = a - b + c \\ 2 = c \\ 4 = 4a + 2b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8 = a - b \\ 2 = 4a + 2b \end{array}\right\}$

La solución del sistema de dos ecuaciones es $a = 3$ y $b = -5$.

La solución es a = 3, y $b = -5$ y $c = 2$; $y = 3x^2 - 5x + 2$.

40. a) Eje de abscisas: (–2, 0) y (3, 0); eje de ordenadas: (0, –6).

b) Eje de abscisas: (4, 0); eje de ordenadas: (0, –8).

c) Eje de abscisas: (–1,5, 0) y (1, 0) y ; eje de ordenadas: (0, 3).

41. a) $a = 1$, $b = 6$ y $c = 5$.

La abscisa del vértice es $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3$.

La ordenada del vértice es:

$f(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$

Por tanto, el vértice es $V(-3, -4)$.

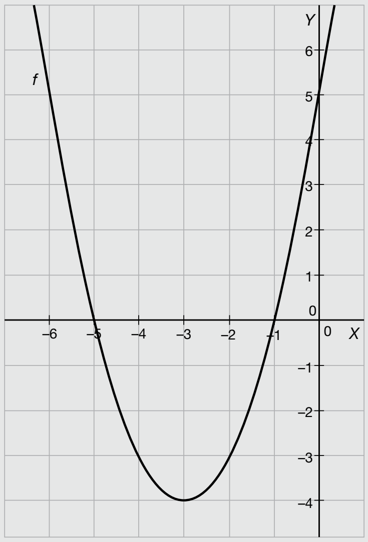
$x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \Leftrightarrow$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1 = -5, x_2 = -1$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (–5, 0) y (–1, 0).

Tenemos que $x = 0 \Rightarrow y = 5$. Así, el punto de intersección con el eje OY es (0, 5).

La representación gráfica de f es:

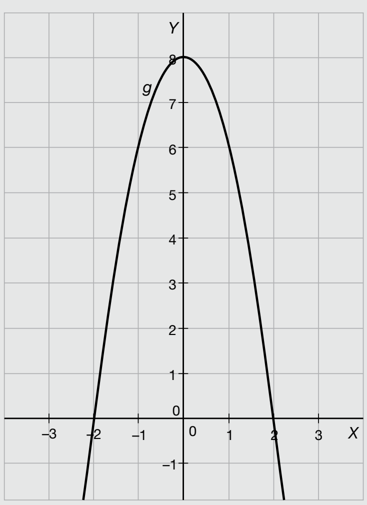


b) $a = -2$, $b = 0$ y $c = 8$. La abscisa del vértice es $-\dfrac{b}{2a} = 0$.

La ordenada del vértice es $g(0) = -2 \cdot 0^2 + 8 = 8$. Por tanto, el vértice es V (0, 8).

$-2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$.
Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (–2, 0) y (2, 0).

La representación gráfica de g es:

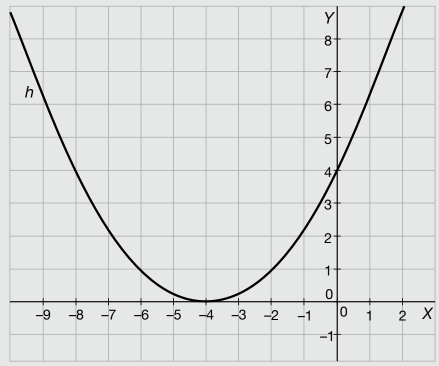


c) $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 2$ y $c = 4$. La abscisa del vértice es $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2 \cdot \dfrac{1}{4}} = -\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}} = -4$. La ordenada del vértice es

$f(-4) = \dfrac{1}{4}(-4)^2 + 2 \cdot (-4) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$. Por tanto, el vértice es V (–4, 0).

Tenemos que $x = 0 \Rightarrow y = 4$. Así, el punto de intersección con el eje OY es (0, 4).

La representación gráfica de h es:



42. Los puntos de corte de la función f con el eje OX son (–4, 2) y (2, 0). Así, la expresión algebraica es $f(x) = a \cdot (x-2) \cdot (x+4) = a \cdot \left(x^2 + 2x - 8\right)$. Tenemos aún que determinar el valor de a.

Sabemos que el punto (0, –6) pertenece a la gráfica de f. Así, $-6 = a \cdot \left(0^2 + 2 \cdot 0 - 8\right) \Rightarrow -6 = -8a \Rightarrow a = \dfrac{6}{8} \Rightarrow a = \dfrac{3}{4}$.

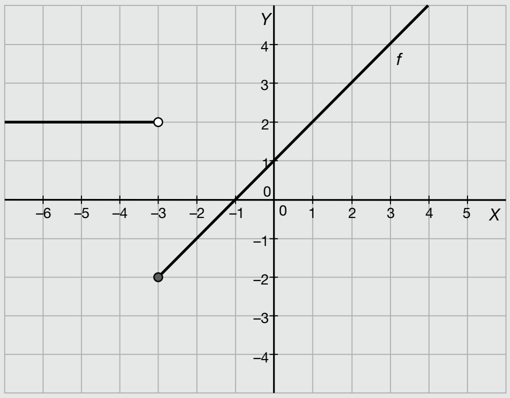
Por tanto, la expresión algebraica de f es $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x - 6$.

43.
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Recorrido: $[-4{,}5; +\infty)$
- Expresión algebraica: $f(x) = \dfrac{1}{2}x \cdot (x-6) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x$; utilizar las coordenadas del vértice de la parábola para determinar el valor del coeficiente: $\dfrac{1}{2}$
- Puntos de cortes con el eje OX: (0, 0) y (6, 0)

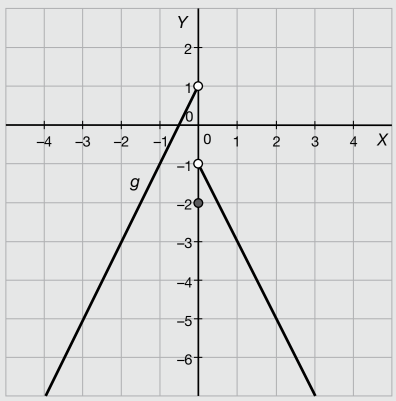
  Puntos de cortes con el eje OY: (0, 0)
- La función es decreciente en el intervalo (–∞, 3) y es creciente en (3, +∞).
- La función tiene un mínimo absoluto en $x = 3$ y no tiene máximos.
- La función es continua en todo su dominio.
- Eje de simetría: la recta $x = 3$.
- La función no es periódica.
- Tasa de variación media en el intervalo [1, 2]:

  $\text{TVM}[1{,}2] = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = \dfrac{-4-(-2{,}5)}{1} = -4 + 2{,}5 = -1{,}5$

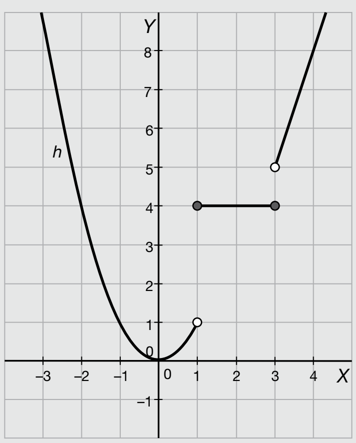
44. a)



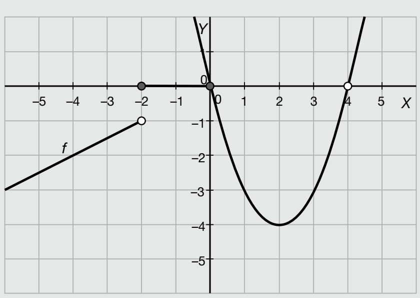
b)



c)



45.



El dominio de la función es (–∞, 4) y su recorrido es (–∞, 0].

46. En el primer intervalo, tenemos que $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)}=\dfrac{2-0}{1}=2$. Por tanto, la expresión algebraica del primer intervalo de *f* es $y=2x+b$. Sustituyendo los valores de las coordenadas de uno de los puntos de la recta, por ejemplo (–2, 0), obtenemos el valor de *b*, que es 4. Por tanto, el primer intervalo de la función es $y=2x+4$.

En el segundo intervalo, tenemos que $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{2-3}{1}=-1$. Por tanto, la expresión algebraica del segundo intervalo de *f* es $y=-x+b$. Sustituyendo los valores de las coordenadas de uno de los puntos de la recta, por ejemplo (3, 0), obtenemos el valor de *b,* que es 3. Por tanto, el segundo intervalo de la función es $y=-x+3$.

El tercer intervalo es una función cuadrática que corta una sola vez el eje *OX* en *x* = 4. Así, la expresión algebraica es $y=a\cdot(x-4)^2=a\cdot\left(x^2-8x+16\right)$. Sustituyendo los valores de las coordenadas de uno de los puntos de la parábola, por ejemplo (5, 1), obtenemos el valor de *a*, que es 1. Por tanto, el tercer intervalo de la función es $y=x^2-8x+16$.

Por tanto, la función definida a trozos es:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4 \text{ si } x\le -1\\ -x+3 \text{ si } -1<x\le 3\\ x^2-8x+16 \text{ si } x>3\end{cases}$$

47.
- Dominio: [–5, 7]
- Recorrido: [–3, 7]
- Puntos de cortes con el eje *OX*: (0, 0) y (7, 0)
- Puntos de cortes con el eje *OY*: (0, 0)
- La función es decreciente en el intervalo (–5, 1), constante en (1, 4) y creciente en (4, 7).
- La función tiene un mínimo relativo en *x* = –1 y un mínimo absoluto en *x* = 4. La función tiene un máximo relativo en *x* = 7 y un máximo absoluto en *x* = –5.
- La función es discontinua para *x* = 1 y para *x* = 4. Son discontinuidades de salto finito.
- La función no tiene ejes de simetría.
- La función no es periódica.
- Tasa de variación media en el intervalo [–5, 1]: $\text{TVM}[-5,1]=\dfrac{f(1)-f(-5)}{1-(-5)}=\dfrac{-1-5}{1+5}=-1$; en [1, 4] es cero pues la función es constante, y en [4, 7] es $\text{TVM}[4,7]=\dfrac{f(7)-f(4)}{7-4}=\dfrac{0-(-3)}{3}=\dfrac{3}{3}=1.$

48.
- Dominio: $\mathbb{R}-\{1\}$
- Recorrido: $\mathbb{R}-\{0\}$
- Puntos de cortes con el eje *OX*: no tiene
- Puntos de cortes con el eje *OY*: (0, –1)
- La función es decreciente en el intervalo (–∞, 1) y en (1, +∞).

- La función no tiene ni mínimos ni máximos.
- La función es discontinua en $x = 1$. Es una discontinuidad de salto infinito.
- La función no tiene simetría.
- La función no es periódica.

49. Para el primer intervalo:

$$x^2+7x+10=0 \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1=-5, x_2=-2$$

Para el segundo intervalo:

$-x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x_1=-2, x_2=2$

Para el tercer intervalo:

$$x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2} \Leftrightarrow$$

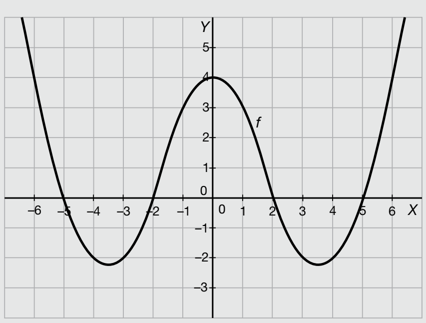
$$x=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{7\pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1=2, x_2=5$$

La abscisa del vértice de la parábola del primer intervalo es $-\frac{b}{2a}=-\frac{7}{2\cdot 1}=-\frac{7}{2}=-3{,}5$ y la ordenada es $f(-3{,}5)=(-3{,}5)^2+7\cdot(-3{,}5)+10=$ $=12{,}25-24{,}5+10=-2{,}25$. Por tanto, su vértice es (–3,25, –2,25).

La abscisa del vértice de la parábola del segundo intervalo es $-\frac{b}{2a}=0$ y la ordenada es $f(0)=-0^2+4=4$. Por tanto, su vértice es (0, 4).

La abscisa del vértice de la parábola del tercer intervalo es $-\frac{b}{2a}=-\frac{-7}{2\cdot 1}=\frac{7}{2}=3{,}5$ y la ordenada es $f(3{,}5)=3{,}5^2-7\cdot 3{,}5+10=12{,}25-24{,}5+10=-2{,}25$. Por tanto, su vértice es (3,25, –2,25).

La gráfica de la función *f* es:

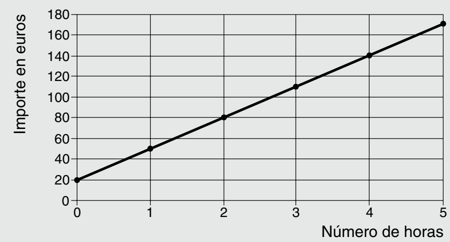


Así, la función es decreciente en los intervalos (–∞, –3,5) y (0, 3,5), y creciente, en (–3,5, 0) y (3,5, +∞).

La función f tiene dos mínimos absolutos para $x = -3{,}5$ y $x = 3{,}5$ en que toma el valor –2,25. La función tiene un máximo relativo para $x = 0$ en que toma el valor 4, no teniendo máximos absolutos.

50. a)

Número de horas (x)	0	1	2	3	4	5
Importe en euros (y)	20	50	80	110	140	170



b) La función es: $y = 30x + 20$

Hallamos el número de horas que ha trabajado si ha cobrado 95 €.

$$95=30x+20 \Rightarrow 75=30x \Rightarrow x=\frac{75}{30}=2{,}5 \text{ horas.}$$

51. a) Designamos por x el número de paquetes de helados y por y el importe del envío. Tenemos: $y = mx + b$

Dado que por 20 paquetes de helados pagamos 103 €, resulta: $103 = m \cdot 20 + b$.

Y dado que por 30 paquetes de helados pagamos 153 €, entonces: $153 = m \cdot 30 + b$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}20m+b=103\\30m+b=153\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-20m-b=-103\\30m+b=\ \ 153\end{array}\right\}$$

$$10m \quad = 50 \Rightarrow m=\frac{50}{10}=5$$

$$20\cdot 5+b=103 \Rightarrow b=103-100=3$$

La expresión algebraica es: $y = 5x + 3$.

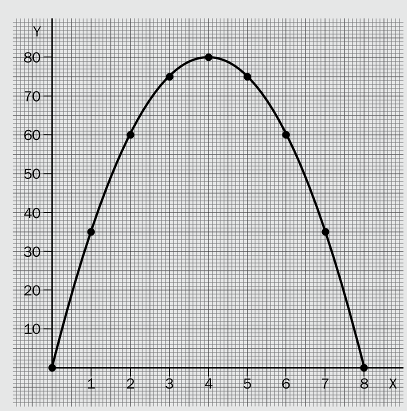
b) $y=5x+3 \Rightarrow y=5\cdot 25+3=128$

Deberemos pagar 128 €.

52. a) $x \rightarrow$ tiempo en segundos.

$y \rightarrow$ altura en metros.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	35	60	75	80	75	60	35	0



b) Analíticamente:

$t = 8$; $h(8) = 40 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2 = 0$.

La pelota está a 0 metros de altura.

Gráficamente: la parábola pasa por el punto (8, 0).

c) La pelota alcanza la altura máxima a los 4 segundos.

d) La trayectoria de la pelota es ascendente en el intervalo (0, 4) y descendente en el intervalo (4, 8).

53. Hacemos pasar una parábola de forma $y = ax^2 + bx + c$ por los puntos (0, 4), (–1, 1) y (2, –2):

$$\left.\begin{array}{r} 4 = c \\ 1 = a - b + c \\ -2 = 4a + 2b + c \end{array}\right\} \Rightarrow a = -2,\ b = 1,\ c = 4$$

54. a) $A(x) = \dfrac{x \cdot (8 - x)}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x$

b) Como es una función decreciente ($a < 0$), el vértice corresponde a un máximo.

$$x = -\frac{4}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 4 \Rightarrow A(4) = -\frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 = 8$$

55. a) Para Carquiler:

$P_c(k) = 30 + 0{,}5 \cdot k$

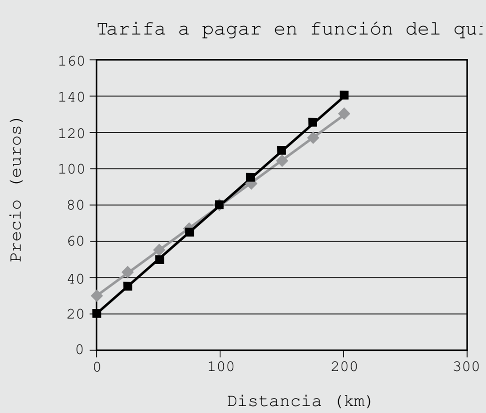
Para Velorent:

$P_v(k) = 20 + 0{,}6 \cdot k$

b)

Distancia (km)	Precio con Carquiler (€)	Precio con Velorent (€)
0	30	20
25	42,5	35
50	55	50
75	67,5	65
100	80	80
125	92,5	95
150	105	110
175	117,5	125
200	130	140

c)



d) Buscamos los valores de k que cumplen:

$30 + 0{,}5 \cdot k < 20 + 0{,}6 \cdot k$

Resolviendo la inecuación:

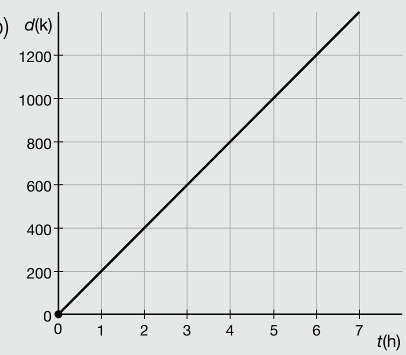
Para distancias de más de 100 km, Carquiler es más económica que Velorent.

56. Respuesta abierta.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

1. a)

b)



c) En 3 h el tren había recorrido km. **Nota:** se puede buscar esa información en la gráfica.

d) El tren había salido de la estación de Málaga a

h. **Nota:** se puede

buscar esa información en la gráfica.

e) Tenemos que 5 h y 36 min son 5,6 h. Así, las dos estaciones distan de km.

2. a) Gracias a la gráfica, podemos comprobar que a 5 m de altura el dron comenzó a volar.

b) También en la gráfica de h, podemos ver que el dron estaba a 35 m de altura a los 3 s.

c) En el primer segundo el dron estaba a 15 m de altura.

d) Tenemos que $h(x) = mx + b$ donde $b = 5$, que es la ordenada en el origen. Tenemos también que $m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{10}{1} = 10$. Entonces, la expresión algebraica es $h(x) = 10x + 5$.

e) El dron volaba a $v_{media} = m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 10$ m/s.

3. a) La altura de la primera plataforma es

$$h(10) = -\frac{1}{8} \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 - 48 =$$

$$= -\frac{100}{8} + 70 - 48 = -12{,}5 + 70 - 48 = 9{,}5\,\text{cm}$$

b) Gracias a la gráfica, podemos verificar que la altura máxima fue de 50 cm.

Algebraicamente tenemos: $a = -\frac{1}{8}$, $b = 7$ y $c = -48$. Así, la ordenada del vértice es:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{7^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot(-48)}{4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)} = -\frac{49-24}{-\frac{1}{2}} = \frac{25}{\frac{1}{2}} = 50$$

c) Tenemos que la abscisa del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{7}{\frac{1}{4}} = 28\,\text{cm}$$

La distancia alcanzada en la horizontal fue 28 – 10 = 18 cm.

d) La altura de la segunda plataforma es:

$$h(40) = -\frac{1}{8}\cdot 40^2 + 7\cdot 40 - 48 = -\frac{1600}{8} + 280 - 48 =$$

$$= -200 + 280 - 48 = 32\,\text{cm}$$

e) Las dos plataformas distan 40 – 10 = 30 cm.

4. a) Cuesta 5 euros.

b) Debemos pagar 10 euros.

c) Podamos alquilar el patinete durante 12 h.

d) El dominio es [0,24] y el recorrido es $\{5\}\cup\{10\}\cup\{15\}\cup\{20\}\cup\{25\}$.

e) El precio de dos días sería $25 + 25\cdot 0{,}9 = 25 + 22{,}5 = 47{,}5$ euros.

5. a) El chalé de la amiga se sitúa a 400 m de la casa de Ana.

b) Tarda 8 min en llegar al chalé de su amiga.

c) Tarda 8 min en recorrer 400 m, esto es, 480 s. A través de una regla de tres, donde x es la velocidad media, en metros por segundo, tenemos que $x = \frac{400}{480} \simeq 0{,}83\,\text{m/s}$.

d) Caminaron 400 – 150 = 250 m.

e) Tenemos el primer intervalo de la función en $y = 50x$, una vez que es una función lineal y que la pendiente es igual a 50.

En el segundo intervalo de la función, tenemos que la pendiente es $m = \frac{150-400}{16-8} = \frac{-250}{8} = -31{,}25$. Por tanto, $y = -31{,}25x + b$. El punto (16,150) pertenece a la gráfica de la función. Así, sustituyendo los valores de las coordenadas en la expresión algebraica, tenemos que $150 = -31{,}25\cdot 16 + b \Leftrightarrow 150 = -500 + b \Leftrightarrow b = 650$. Por tanto, $y = -31{,}25x + 650$.

Así, la expresión algebraica de la función definida a trozos es:

$$y = \begin{cases} 50x & \text{si } 0 \le x < 8 \\ -31{,}25x + 650 & \text{si } 8 \le x \le 16 \end{cases}$$

7. Estudio de otras funciones

ACTIVIDADES

1. a) $y = \frac{k}{x} \Rightarrow y\cdot x = k$. Según la tabla de valores:

$60\cdot 1 = 30\cdot 2 = \ldots = 10\cdot 6 \Rightarrow k = 60$

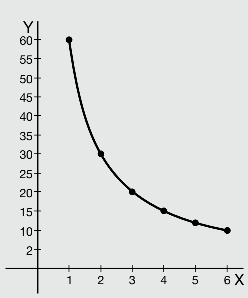
Por tanto: $y = \frac{60}{x}$

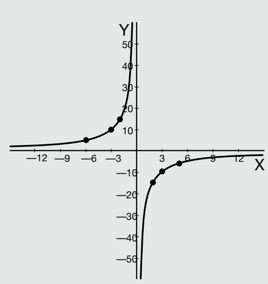
b) Según la tabla de valores:

$-15\cdot 2 = -10\cdot 3 = \ldots = 2\cdot(-15) \Rightarrow k = -30$

Por tanto: $y = \frac{-30}{x}$

La representación gráfica de estas funciones es:





2. a) $f(2) = 3^2 = 9$

b) $f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 3^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$

3. $f(2) = 25;\ x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

4. a) $f(2) = 25;\ f(3) = 125;\ f(4) = 625$

b) $f(2) = \frac{1}{25};\ f(3) = \frac{1}{125};\ f(4) = \frac{1}{625}$

c) $4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3;$

$4^x = 1 \Rightarrow 4^x = 4^0 \Rightarrow x = 0$