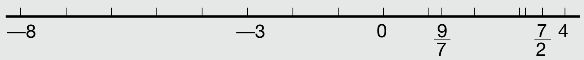
5. Inecuaciones

ACTIVIDADES

1. $4 > \frac{7}{2} > \pi > \frac{9}{7} > 0 > -3 > -8$



2. a) $-10^3 < 0{,}1^3 < 10^{-2} < 0{,}1 < 0{,}01^{-2}$

b) $(-2)^3 < -2^2 < (-2)^{-3} < 2^{-3} < 2^2$

3. a) Falsa; b) Cierta; c) Cierta; d) Cierta; e) Cierta; f) Cierta; g) Cierta; h) Cierta; i) Falsa; j) Falsa.

4. a) $6 - 9 > 1 - 5$

b) $\frac{4}{3} > 3 \cdot (-2)$

c) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2} > \frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{3} \cdot 5 > 8 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$

e) $\frac{1}{3} \leq 0{,}333...$

f) $0{,}125 > \frac{1}{100}$

g) $2^{-3} < \frac{1}{2}$

h) $5 \cdot (3-1) \leq 10$

i) $7^2 - 3^2 \leq 40$

j) $3 \cdot (2-7) < -10$

5. Respuesta sugerida:

a) $a = 3$; b) $a = 5$; c) $a = -6$; d) $a = 10$.

6. Si $a < 0$, resulta $a^2 > 0$; $a^3 < 0$. Por tanto: $a^2 > a^3$, siempre se cumple la condición del enunciado. Por ejemplo:

$a = -2 \rightarrow a^2 = 4; a^3 = -8$

Si $a > 0$ también se puede cumplir la condición del enunciado siempre que sea $0 < a < 1$.

Veámoslo con algunos ejemplos:

$a = 0{,}2 \rightarrow a^2 = 0{,}04; a^3 = 0{,}008$

$a = 0{,}9 \rightarrow a^2 = 0{,}81; a^3 = 0{,}729$

7. a) $-10 + 3 \quad -8 + 3 \rightarrow -7 \quad -5$

b) $-10 \cdot (-2) \geq -8 \cdot (-2) \rightarrow 20 \geq 16$

c) $10 \geq 8$

8. En la desigualdad $6 > 5$, dividimos cada miembro por 3 y obtenemos: $2 > \frac{5}{3}$. Ahora multiplicamos cada miembro por -2, con lo que cambia el sentido de la desigualdad y resulta: $-4 < \frac{-10}{3}$

9. a) $\frac{3}{4} < \frac{7}{5} \rightarrow 20 \cdot \frac{3}{4} < 20 \cdot \frac{7}{5} \rightarrow 15 < 28$

b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{5}{4} < \frac{10}{3} \rightarrow$
$\rightarrow 12 \cdot \frac{5}{4} < 12 \cdot \frac{10}{3} \rightarrow 3 \cdot 5 < 4 \cdot 10 \rightarrow$
$\rightarrow 15 < 40$

c) $\frac{2}{3} > -\frac{1}{4} \rightarrow 12 \cdot \frac{2}{3} > 12 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \rightarrow$
$\rightarrow 4 \cdot 2 > 3 \cdot (-1) \rightarrow 8 > -3$

10. Respuesta sugerida:

a) Algunos ejemplos de valores que cumplen $a + b < c$; $a < b$; $b < c$ son:

$a = 0$; $b = 1$; $c = 2$

$a = 1$; $b = 2$; $c = 5$

$a = -2$; $b = 0$; $c = 1$

b) Ejemplos de valores tales que $a + b < c$; $a > c$:

$a = 1$; $b = -2$; $c = 0$

$a = 3$; $b = -5$; $c = 2$

$a = -1$; $b = -3$; $c = -3$

— No hay valores de a y b que verifiquen que $a + b < c$; $a > c$; $b > c$, puesto que al sumar dos números mayores que un determinado número c, se obtiene una cantidad mayor que c.

11. b) una incógnita; c) dos incógnitas; e) dos incógnitas; f) dos incógnitas.

12. a) 4, 1 y 2 son solución.

b) Todos son solución.

c) Ninguno es solución.

13. a) Agrupamos los términos en x en el primer miembro y los términos independientes en el segundo, operamos y obtenemos $-4x < -6$.

b) Multiplicamos por 2 ambos miembros, agrupamos los términos en x en el primer miembro y obtenemos: $x - 6x > -2$.

14. Agrupamos los términos en x en el primer miembro y los términos independientes en el segundo, y operamos. Después, observamos el signo del coeficiente de la incógnita; si es negativo, cambiamos el signo de cada miembro de la inecuación.

a) $3x - 4 > -5$

b) $-x + 3x > -7$; $2x > -7$

c) $20 - 4x \geq 3x - 2$; $-4x - 3x \geq -2 - 20$;
$-7x \geq -22$; $7x \leq 22$

d) $-2x \geq 3x - 60 + 12x$; $-2x - 3x - 12x \geq 60$;
$-17x \geq -60$; $17x \leq 60$

15. Respuesta sugerida:

Sumamos 28 a cada miembro y obtenemos: $2x+28\geq 1$

Si ahora dividimos por 2: $x+14\geq \frac{1}{2}$

16. La expresión algebraica que se tiene que sumar es: $-2x-5$.

17. a) $x<-3$

b) $x<\frac{7}{6}$

c) $7x\geq 56 \Rightarrow x\geq 8$

d) $\frac{3}{4}x<\frac{1}{7}\Rightarrow x<\frac{4}{21}$

e) $5\cdot(3x+8)<2\cdot(x+20)$

$15x-2x<40-40$

$13x<0$

$x<0$

f) $2x-12\leq 5x-1$

$-11\leq 3x$

$x\geq -\frac{11}{3}$

g) $24\cdot(x+1)+63>6x-18$

$18x>-57$

$x>-\frac{19}{6}$

h) $4x-6\leq 3x$

$x\leq 66$

18. a) $x>\frac{4}{3}\Rightarrow S=\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$;

b) $x<-\frac{1}{2}\Rightarrow S=\left(-\infty,-\frac{1}{2},\right)$;

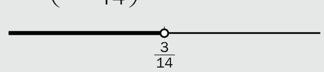
c) $x>\frac{1}{7}\Rightarrow S=\left(\frac{1}{7},+\infty\right)$

19. a) $-7x+21x<5-2$

$14x<3$

$x<\frac{3}{14}$

$\boldsymbol{S}=\left(-\infty,\frac{3}{14}\right)$



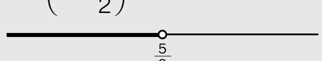
b) $6x+15<4x+20$

$6x-4x \quad 20-15$

$2x<5$

$x<\frac{5}{2}$

$\boldsymbol{S}=\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$



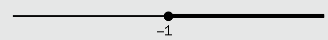
c) $15\left(\frac{3x-2}{5}\right)\leq 15\left(\frac{2x-1}{3}\right)$

$9x-6\leq 10x-5$

$-x \quad 1$

$x\geq -1$

$\boldsymbol{S}=[-1,+\infty)$

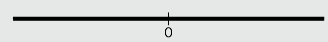


d) $5x-15\geq 2x+3x-15$

$5x-2x-3x\geq -15+15$

$0x\geq 0$

$\boldsymbol{S}=\mathbb{R}$



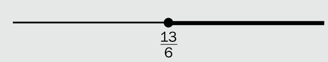
e) $6\left(3x-\frac{5}{2}\right)\geq 6\left(2x-\frac{1}{3}\right)$

$18x-15\geq 12x-2$

$6x\geq 13$

$x\geq \frac{13}{6}$

$\boldsymbol{S}=\left[\frac{13}{6},+\infty\right)$



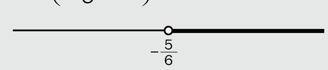
f) $6\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{2x-2}{6}\right)<6\left(\frac{5x+1}{2}\right)$

$9x-2x+2x-2<15x+3$

$-6x<5$

$x>-\frac{5}{6}$

$\boldsymbol{S}=\left(-\frac{5}{6},+\infty\right)$



20. Respuesta sugerida:

a) $x>-3$; $2x+1>-5$

b) $x\leq 5$; $3x-2\leq 13$

21. a) $x\geq 3\Rightarrow S=[3,+\infty)$

b) $S=\varnothing$

c) $S=(-\infty,7)$

d) $S=[1,\infty)$

e) $S=(-\infty,1]$

f) $S=(-\infty,4)$

22. a) $5x - y = 5 \cdot 5 - (-1) = 25 + 1 = 26$

$26 > -3 \Rightarrow (5, -1)$ es solución

b) $5x - y = 5 \cdot 3 - 1 = 15 - 1 = 14$

$14 > -3 \Rightarrow (3, 1)$ es solución

c) $5x - y = 5\,(-2) - 4 = -10 - 4 = -14$

$-14 < -3 \Rightarrow (-2, 4)$ no es solución

d) $5x - y = 5 \cdot 0 - 5 = 0 - 5 = -5$

$-5 < -3 \Rightarrow (0, 5)$ no es solución

23. Respuesta sugerida:

a) $-2x + y < 3$

(0, 0): $-2 \cdot 0 + 0 = 0 < 3$

(1, 1): $-2 \cdot 1 + 1 = -1 < 3$

b) $3x \geq 2y$

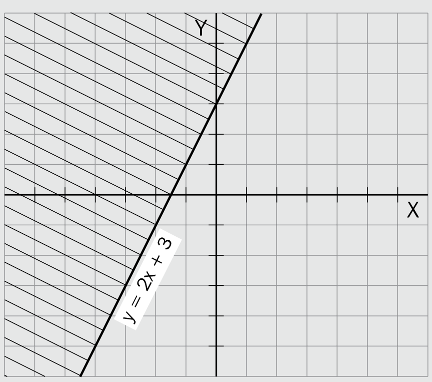
(1, 0): $3 \cdot 1 \geq 2 \cdot 0$

(2, 1): $3 \cdot 2 \geq 2 \cdot 1$

24. a) $y = 2x + 3$

x	$y = 2x + 3$
–1	1
0	3
1	5

(0, 0): $0 \ngeq 2 \cdot 0 + 3 \Rightarrow$ los valores de las coordenadas del punto (0, 0) no son solución de la inecuación.

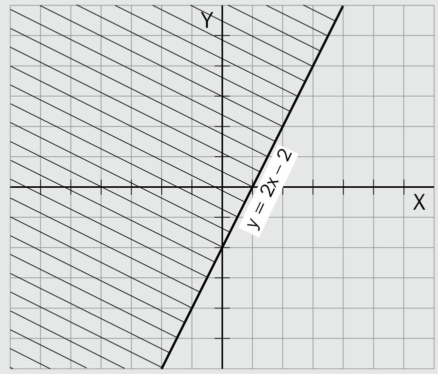


b) $5x - y = 3x + 2$

$y = 2x - 2$

x	$y = 2x - 2$
0	–2
1	0
2	2

(0, 0): $5 \cdot 0 - 0 < 3 \cdot 0 + 2 \Rightarrow$ los valores de las coordenadas del punto (0, 0) son solución de la inecuación.

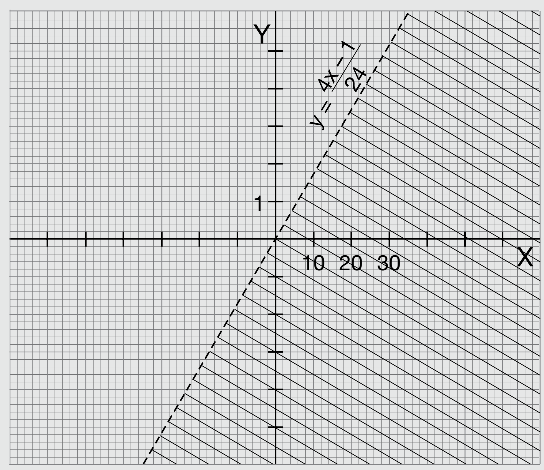


c) $\dfrac{x-1}{3} = 2y - \dfrac{1}{4}$

$y = \dfrac{4x-1}{24}$

x	$y = \dfrac{4x-1}{24}$
–1	3
0	1
1	–1

(0, 1): $\dfrac{0-1}{3} \ngeq 2 \cdot 1 - \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ los valores de las coordenadas del punto (0, 1) no son solución de la inecuación.



25. La relación que se establece entre las inecuaciones y la representación gráfica de sus soluciones es: a) 4; b) 1; c) 2; d) 3

26. a) $S = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ d) $S = [1/5, 2/5]$

b) $S = (-1/2, 1)$ e) $S = (-4/3, -4/5)$

c) $S = \varnothing$

27. a) $S = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ c) $S = (-4, \infty)$

b) S = d) $S = (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

28. a) $S = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

b) $S = (0, 2)$

29. $x \rightarrow$ longitud de la base del rectángulo

Datos:

Altura del rectángulo: $\frac{x}{3}$

Inecuación: $2x + 2 \cdot \frac{x}{3} \le 24 \Leftrightarrow 6x + 2x \le 72 \Leftrightarrow x \le 9$

La longitud de la base del rectángulo debe ser mayor que 0 cm y menor o igual que 9 cm.

30. Sea x el precio unitario de venta de las calculadoras. Si se desea obtener un beneficio mínimo del 30 % sobre el precio de venta, se tiene que cumplir que:

$$\frac{x-10}{x} \ge \frac{30}{100}$$
$$100x - 1000 \ge 30x$$
$$x \ge \frac{1000}{70} = 14{,}3$$

Deberá vender cada calculadora a un precio igual o mayor que 14,3 €.

31. Representamos por x la puntuación obtenida al lanzar el primer dado.

Puntuación del segundo dado: $7 - x$

$$x - (7 - x) < 3$$
$$x - 7 + x < 3$$
$$x + x < 3 + 7$$
$$2x < 10 \quad \Rightarrow x < \frac{10}{2} = 5$$

Respuesta: Las puntuaciones que podemos haber obtenido al lanzar el primer dado son 1, 2, 3 y 4. Las puntuaciones que podemos haber obtenido en cada uno de los dados son:

Primer dado	1	2	3	4
Segundo dado	6	5	4	3

32. Designamos por y la medida del lado de longitud desconocida.

El perímetro vale: $P = 2 \cdot 12 + 2y = 24 + 2y$

El área vale: $A = 12y < 360 \Rightarrow 2y < 60$

Hacemos uso de esta desigualdad y del hecho de que $y > 0$ para obtener los valores entre los cuales está comprendido el perímetro:

$24 < 24 + 2y < 24 + 60 \Rightarrow 24 < P < 84$

El perímetro puede tener los valores comprendidos entre 24 cm y 84 cm.

33. $x \rightarrow$ número de butacas vacías

Datos:

Número de butacas llenas: $350 - x$

Inecuación:

$$(350 - x) \cdot 4{,}5 > 1460 \Leftrightarrow x < \frac{-115}{-4{,}5} = 25{,}6$$

Como máximo quedarán vacías 25 butacas.

34. Respuesta sugerida:

En un aula, hay una tarima de 25 cm de alto y una pizarra cuyo extremo inferior está a 62,5 cm del suelo. ¿Cuántas cajas de cartón de 65 mm de altura se pueden apilar sobre la tarima, una encima de otra, para que no tapen la pizarra a los alumnos?

Si pasamos todos los valores a milímetros y designamos por x el número de cajas que se pueden apilar, tenemos:

$$250 + 65 \cdot x \le 625$$

$$65x \le 375 \Rightarrow x \le \frac{375}{65} = \frac{75}{13} = 5{,}76... < 6$$

Se pueden apilar como máximo cinco cajas.

35. Sea x los kilogramos de café natural que deberá haber en la mezcla. El número de kilogramos de café torrefacto en la mezcla será:

El precio de un kilogramo de mezcla debe estar comprendido entre 3,9 € y 4,3 €:

$$3{,}9 \le \frac{x \cdot 3{,}6 + (3 - x) \cdot 4{,}8}{3} \le 4{,}3$$
$$3 \cdot 3{,}9 \le 3{,}6x + 14{,}4 - 4{,}8x \le 4{,}3 \cdot 3$$
$$11{,}7 \le -1{,}2x + 14{,}4 \le 12{,}9$$
$$-2{,}7 \le -1{,}2x \le -1{,}5$$

Resultan estas dos condiciones:

$$1{,}2x \le 2{,}7 \Rightarrow x \le 2{,}25$$
$$1{,}2x \ge 1{,}5 \Rightarrow x \ge 1{,}25$$

Según el enunciado, $x > \frac{2}{3}$. Por tanto, el número de kilogramos de café natural en tres kilogramos de mezcla es un valor del intervalo (1,5, 2,25]

36. a) $5 > 3$ c) $3 > -7$

b) $2 < 8$ d) $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

37. $-\frac{5}{2} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{7}{6}$

38. No. Por ejemplo, si consideramos las desigualdades $30 > -5$ y $-2 > -3$ y las multiplicamos miembro por miembro, obtenemos la desigualdad $-60 < 15$.

39. a) Cierta.

b) Cierta.

c) Falsa. Si multiplicamos por un mismo número negativo diferente de cero los dos miembros de una desigualdad obtenemos una desigualdad de sentido contrario.

d) Falsa. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

40. Sólo se cumple si *a* y *b* tienen el mismo signo. Queda excluido el caso de que *a* o *b* sean cero ya que la división por cero no tiene sentido.

Estos ejemplos cumplen la condición:

$3 < 5 \Rightarrow 1 < \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{3};$

$-7 < -6 \Rightarrow 1 > \frac{-6}{-7} \Rightarrow \frac{1}{-6} < \frac{1}{-7}$

En cambio éstos no la cumplen:

$-3 < 5 \Rightarrow 1 > \frac{5}{-3} \Rightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{-3};$

$7 > -6 \Rightarrow 1 > \frac{-6}{7} \Rightarrow \frac{1}{-6} < \frac{1}{7}$

41. a) Es solución; b) Es solución; c) No es solución; d) No es solución; e) No es solución; f) Es solución.

42. Respuesta sugerida:

a) $x = 0, \quad x = 1 \quad y \quad x = 2$

b) $x = 0, \quad x = 1 \quad y \quad x = 2$

c) $x = 21, y = 2; \; x = 21, y = 5 \; y \; x = 1, y = 1$

43. a) $\frac{1}{2}x - 5 \geq 3x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 3x \geq 5 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}x \geq 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x \leq -5$

b) $2 - \frac{4}{7}x < x - 1 \Leftrightarrow -\frac{4}{7}x - x < -1 - 2 \Leftrightarrow -\frac{11}{7}x < -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{11}{7}x > 3$

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x < \frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x < 2 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x < \frac{4}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x > -\frac{4}{3}$

44. Tenemos que:

$mx + 11 \leq 5x + 4 \Leftrightarrow mx - 5x \leq 4 - 11 \Leftrightarrow (m-5) \cdot x \leq -7$

Por tanto, $m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$.

45. Respuesta abierta.

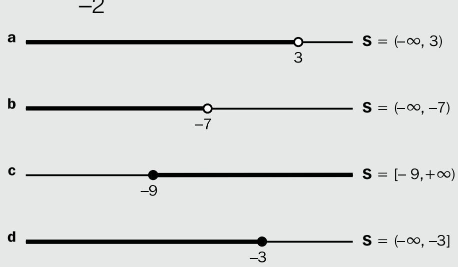
46. a) $x < \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow S = (-\infty, 3)$

b) $x < \frac{14}{-2} = -7 \Rightarrow S = (-\infty, -7)$

c) $x \geq -9 \Rightarrow S = [-9, +\infty)$

d) $x \leq \frac{6}{-2} = -3 \Rightarrow S = (-\infty, -3]$

47.



48. a) $S = \mathbb{R}$; b) $S = \varnothing$; c) $S = \varnothing$;

d) $x \geq \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow S = [0, +\infty)$.

49. Respuesta sugerida:

2x   10

2 (x + 3)   16

— Son equivalentes.

50. No, ya que el conjunto solución de estas inecuaciones es de alguna de las formas siguientes:

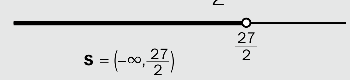
$S = (-\infty, a)$ $S = (-\infty, a]$ $S = (a, +\infty)$ $S = [a, +\infty)$

$S = \mathbb{R}$

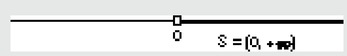
$S = \varnothing$ Δ

51. a) $5x - 2x \leq 9 + 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{12}{3} = 4$

b) $2x < 21 + 6 \Leftrightarrow x < \frac{27}{2}$



c) $-4x - x < 12 - 12 \Leftrightarrow x > 0$



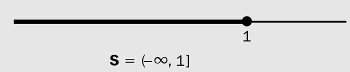
d) $14x - 8x - 6x < -3 + 2 \Leftrightarrow 0x < -1$

$S = \varnothing$

e) $2x - 15x + 13x < 3 - 8 - 3 \Leftrightarrow 0x < -8$

$S = \varnothing$

f) $-3x - 2x - 5x \geq 1 - 12 + 1 \Leftrightarrow x \leq 1$



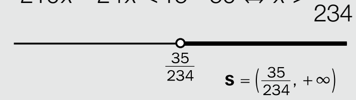
g) $-5x + 3x + 2x > 21 - 1 \Leftrightarrow 0x > 20$

$S = \varnothing$

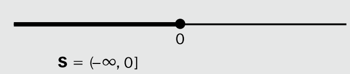
h) $5x - 5x < -9 + 15 - 6 \Leftrightarrow 0x < 0$

$S = \varnothing$

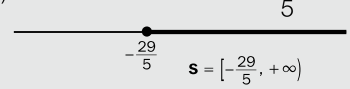
i) $-210x - 24x < 15 - 50 \Leftrightarrow x > \frac{35}{234}$



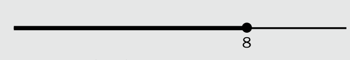
j) $-2x - 3x + 7x \leq 4 - 10 + 6 \Leftrightarrow x \leq 0$



k) $3x - 8x \leq 20 + 9 \Leftrightarrow x \geq -\frac{29}{5}$



l) $5x - 2x + 3x \leq 30 + 1 + 15 + 2 \Leftrightarrow x \leq 8$



53. a) Tenemos que:

$$5+\frac{2-x}{3}>4 \Leftrightarrow \frac{2-x}{3}>-1 \Leftrightarrow 2-x>-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x>-5 \Leftrightarrow x<5$$

El conjunto solución es $S=(-\infty,5)$.

b) Tenemos que:

$$-\frac{3x-2}{2}\le\frac{7}{4} \Leftrightarrow -2\cdot(3x-2)\le 7 \Leftrightarrow -6x+4\le 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6x\le 3 \Leftrightarrow 6x\ge -3 \Leftrightarrow x\ge -\frac{3}{6} \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$$

El conjunto solución es $S=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

c) Tenemos que:

$$\frac{1}{2}+\frac{1-2x}{3}>\frac{19}{2} \Leftrightarrow 3+2\cdot(1-2x)>3\cdot 19 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3+2-4x>57 \Leftrightarrow -4x>52 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x<-52 \Leftrightarrow x<-\frac{52}{4} \Leftrightarrow x<-13$$

El conjunto solución es $S=(-\infty,-13)$.

54. Tenemos que:

$$3x-\frac{4}{5}\ge\frac{mx}{2} \Leftrightarrow 30x-8\ge 5mx \Leftrightarrow 30x-5mx\ge 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (30-5m)\cdot x\ge 8 \Leftrightarrow x\ge\frac{8}{30-5m}$$

Por tanto, como

$S=\left[\frac{8}{25},+\infty\right)$, $30-5m=25 \Leftrightarrow -5m=-5 \Leftrightarrow m=1$

55. a) $7-2\cdot(x+3)\ge 5 \Leftrightarrow 7-2x-6\ge 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x\ge 4 \Leftrightarrow 2x\le -4 \Leftrightarrow x\le -2$

El conjunto solución es $S=(-\infty,-2]$.

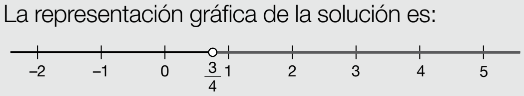
La representación gráfica de la solución es:

b) $8\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)+2x<2\cdot(x-1) \Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)+x<x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-4x+x<x-1 \Leftrightarrow -4x<-3 \Leftrightarrow 4x>3 \Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$

El conjunto solución es $S=\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.

La representación gráfica de la solución es:



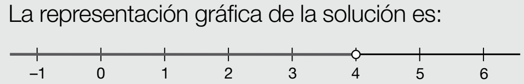
c) $\frac{5\cdot(x+4)+9}{4}<\left(\frac{7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{5\cdot(x+4)+9}{4}<\frac{49}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\cdot(x+4)+9<49 \Leftrightarrow 5x+20+9<49 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x<20 \Leftrightarrow x<4$

El conjunto solución es $S=(-\infty,4)$.

La representación gráfica de la solución es:



56. El conjunto solución es $S=(-1,+\infty)$; esto es, $x>-1$.

Así, $2+\frac{m-x}{4}<m \Leftrightarrow 8+m-x<4m \Leftrightarrow -x<3m-8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>-3m+8$.

Por tanto, $-3m+8=-1 \Leftrightarrow -3m=-9 \Leftrightarrow m=3$.

57. a) $2x-3y>5$

$2\cdot 2-3\,(-1)=4+3=7$

$7>5 \Rightarrow (2,-1)$ es solución de la inecuación.

b) $4x+3y>0$

$4\cdot 2+3\cdot(-1)=8-3=5$

$5>0 \Rightarrow (2,-1)$ no es solución de la inecuación.

58. Respuesta sugerida:

a) $3x-2y\ge 7$

$P\,(10,0): 3\cdot 10-2\cdot 0=30\ge 7$

$Q\,(5,1): 3\cdot 5-2\cdot 1=13\ge 7$

b) $5x-y>1$

$P\,(1,0): 5\cdot 1-0=5>1$

$Q\,(2,2): 5\cdot 2-2=8>1$

59. a) Por ejemplo: (4,0), (0,–12) y (2,–3).

b) Por ejemplo: (35,0), (0,7) y (7,6).

c) Por ejemplo: (3,0), (1,–2) y (0,–3).

d) Por ejemplo: (–1,–1), (–2,0) y (0,–1).

60. a) Como el punto $(1,m)$ es solución de la inecuación, sus coordenadas cumplen la desigualdad. Por tanto, si sustituimos las coordenadas:

$$\frac{3}{2}\cdot 1-3m>1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}-3m>1 \Leftrightarrow -3m>1-\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$-3m>-\frac{1}{2} \Leftrightarrow m<\frac{1}{6}$$

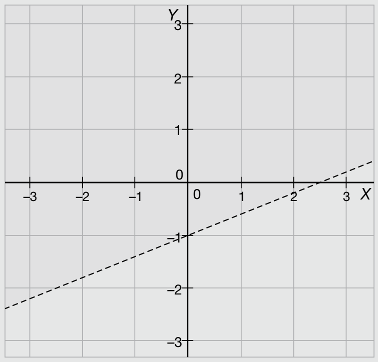
Así, todos los puntos $(1,m)$ en que $m<\frac{1}{6}$ son soluciones de la inecuación.

b) Como el punto $(m,-1)$ es solución de la inecuación, sus coordenadas cumplen la desigualdad. Así, si sustituimos las coordenadas:

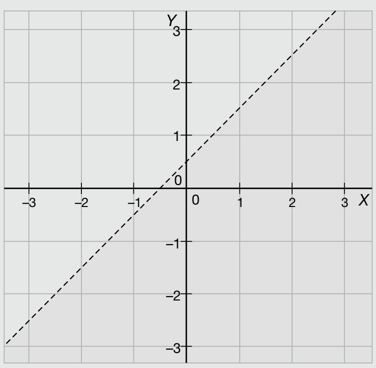
$$-4m+5\cdot(-1)\le\frac{7}{3} \Leftrightarrow -4m-5\le\frac{7}{3} \Leftrightarrow -4m\le\frac{7}{3}+5 \Leftrightarrow$$
$$-4m\le\frac{22}{3} \Leftrightarrow m\ge -\frac{22}{12} \Leftrightarrow m\ge -\frac{11}{6}$$

Por tanto, todos los puntos $(m,-1)$ en que $m\ge -\frac{11}{6}$ son soluciones de la inecuación.

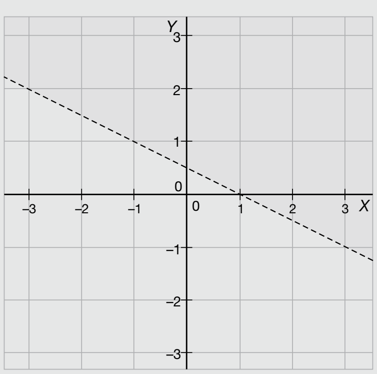
61. a) Representamos con un trazo descontinuo la recta $2x-5y=5$, que equivale a $y=\frac{2}{5}x-1$. Tomamos, por ejemplo, el punto (0,0) y los valores de las coordenadas son solución de la inecuación. Así, el semiplano que es solución de la inecuación es:



b) Representamos con un trazo continuo la recta $-x+4y=2+3x$, que equivale a $y=x+\frac{1}{2}$. Tomamos, por ejemplo, el punto (0,0) y los valores de las coordenadas son solución de la inecuación. Así, el semiplano que es solución de la inecuación es:



c) Representamos con un trazo continuo la recta $2\cdot(x+3)+4y=8$, que equivale a $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Tomamos, por ejemplo, el punto (0,0) y los valores de las coordenadas no son solución de la inecuación. Así, el semiplano que es solución de la inecuación es:



62. Calculamos la ordenada en el origen, b. Como la recta corta al eje de ordenadas en el punto (0,3), la ordenada en el origen es $b = 3$. Así pues, la expresión algebraica de la recta es $y = mx + 3$.

Calculamos la pendiente, m. Para ello, nos fijamos en la gráfica y consideramos un punto de la recta cuyas coordenadas sean fáciles de determinar; por ejemplo, el punto (1,5;0). Como es un punto de la recta, tendrá que verificar la ecuación de la recta:

$$0=m\cdot 1{,}5+3 \Leftrightarrow m=-\frac{3}{1{,}5} \Leftrightarrow m=-2$$

Así, la ecuación de la recta es $y=-2x+3$.

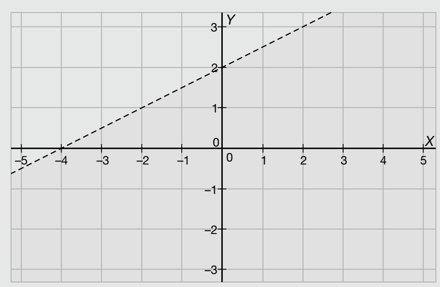
El punto (0,0) pertenece al semiplano. Cuando sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación, tenemos que $0=-2\cdot 0+3 \Leftrightarrow 0=3$, que no es verdadera, pues nunca lo sería, pero nos indica el sentido de la desigualdad.

La inecuación del semiplano es, por tanto, $y<-2x+3$.

63. Tenemos que

$$-2x+6y-3=9+x \Leftrightarrow 6y=3x+12 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+2$$

Representamos la recta con un trazo descontinuo. Tomamos, por ejemplo, el punto (0,0) y los valores de las coordenadas son solución de la inecuación. Así, el semiplano que es solución de la inecuación es:

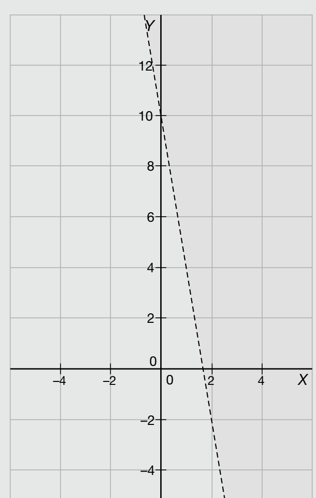


En GeoGebra, en la entrada del editor, escribimos la inecuación original. No es necesario transformarla en otra inecuación equivalente (experiméntalo). De inmediato el programa nos proporciona el semiplano que habíamos representado.

64. Tenemos que

$$14x-18+y=-y+2 \Leftrightarrow 2y=-14x+20 \Leftrightarrow y=-7x+10$$

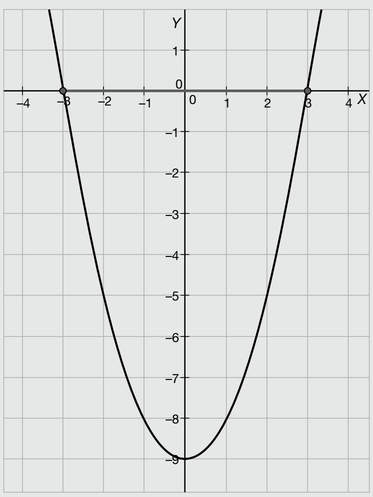
Representamos la recta con un trazo continuo. Tomamos, por ejemplo, el punto (0,0) y los valores de las coordenadas no son solución de la inecuación. Así, el semiplano que es solución de la inecuación es:



En GeoGebra, en la entrada del editor, escribimos la inecuación original (puedes escribir ≥ en el editor como >= o utilizar el botón α en el editor y elegir el signo correspondiente). No es necesario transformarla en otra inecuación equivalente (experiméntalo). De inmediato, el programa nos proporciona el semiplano que habíamos representado.

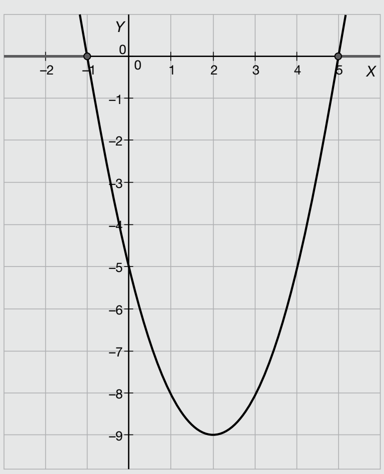
65. a) Tenemos que $x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x_1=-3, x_2=3$. Como el coeficiente de la x es positivo, el conjunto solución de la inecuación es $S=[-3,3]$.

La resolución gráfica de la inecuación es el segmento de recta en rojo:



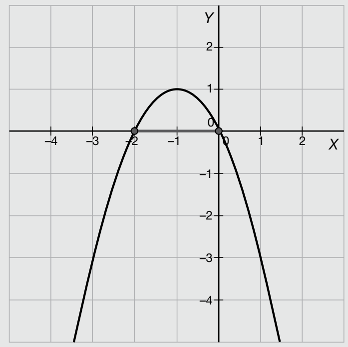
b) Tenemos que $(x+1)\cdot(x-5)=0 \Leftrightarrow x_1=-1, x_2=5$. Como el coeficiente de la x es positivo, el conjunto solución de la inecuación es $S=(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$.

La resolución gráfica de la inecuación es el segmento de recta en rojo:



c) Tenemos que $-x\cdot(x+2)=0 \Leftrightarrow x_1=-2, x_2=0$. Como $-x\cdot(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow x\cdot(x+2)\leq 0$, $S=[-2,0]$.

La resolución gráfica de la inecuación es el segmento de recta en rojo:



66. a) La ecuación de segundo grado corta el eje de abscisas en $x=-4$ y $x=4$. Así, la ecuación es $a\cdot(x+4)\cdot(x-4)=0 \Leftrightarrow a\cdot\left(x^2-16\right)=0$. Cuando $x=0$, $a\cdot\left(0^2-16\right)=-16 \Leftrightarrow a=1$. Por tanto, la inecuación de segundo grado es $x^2-16\geq 0$.

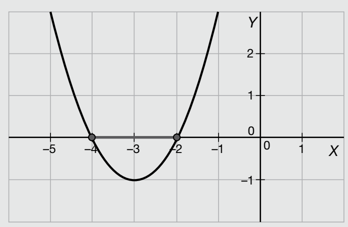
b) La ecuación de segundo grado corta el eje de abscisas en $x=-4$ y $x=2$. Así, la ecuación es $a\cdot(x+4)\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow a\cdot\left(x^2+2x-8\right)=0$. Cuando $x=0$, $a\cdot\left(0^2+2\cdot 0-8\right)=8 \Leftrightarrow a=-1$. Por tanto, la inecuación de segundo grado es $-x^2-2x+8<0$.

67. Tenemos que

$$x^2+6x+8=0 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm 2}{2} \Leftrightarrow x_1=-4, x_2=-2$$

La representación gráfica es:



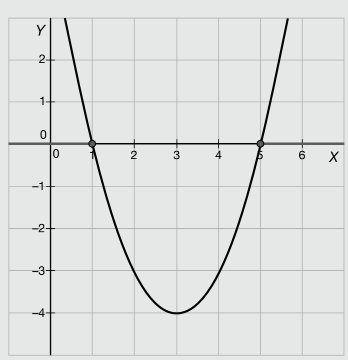
68. Tenemos que

$$2x^2-12x+10=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{6\pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=1, x_2=5$$

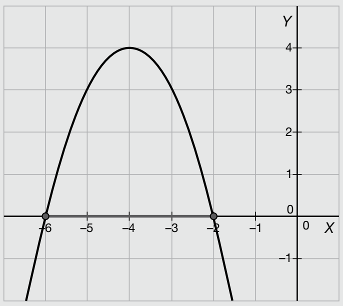
La representación gráfica es:



69. Tenemos que

$$-x^2-8x-12=0 \Leftrightarrow x^2+8x+12=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{64-48}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-8\pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1=-6, x_2=-2$$

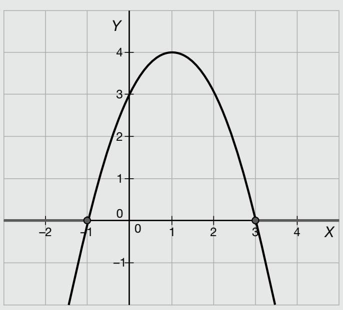
La representación gráfica es:



70. Tenemos que

$$-x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1=-1, x_2=3$$

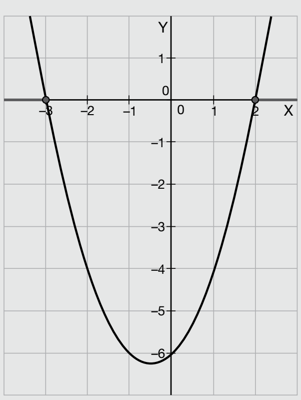
La representación gráfica es:



71. Tenemos que

$$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm 5}{2} \Leftrightarrow x_1=-3, x_2=2$$

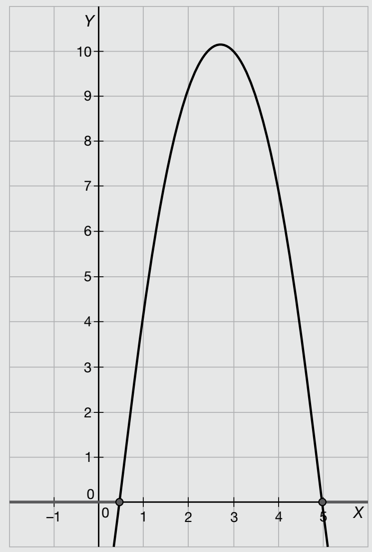
La representación gráfica es:



72. Tenemos que

$$-2x^2+11x-5=0 \Leftrightarrow 2x^2-11x+5=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{4} \Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{81}}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{11\pm 9}{4} \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}, x_2=5$$

La representación gráfica es:



73. Tenemos que $4x<24 \Leftrightarrow x<\frac{24}{4} \Leftrightarrow x<6$. Por tanto, el lado del cuadrado tiene que ser mayor que 0 y menor que 6.

74. Tenemos que

$$3\cdot(x+1)\leq 13{,}5 \Leftrightarrow 3x+3\leq 13{,}5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x\leq 10{,}5 \Leftrightarrow x\leq\frac{10{,}5}{3} \Leftrightarrow x\leq 3{,}5$$

Así, $x + 1 = 3{,}5 + 1 = 4{,}5$ cm. Por tanto, el triángulo equilátero tiene sus lados mayores que 0 y menores o iguales a 4,5 cm.

75. Si llamamos x al número de compañeros de Enrique, tenemos que $50-4x\geq 8 \Leftrightarrow -4x\geq -42 \Leftrightarrow 4x\leq 42 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\leq\frac{42}{4} \Leftrightarrow x\leq 10{,}5$. Por tanto, Enrique tiene como máximo 10 compañeros.

76. Si llamamos x al número de horas que Paloma debe trabajar, tenemos que $12{,}5x-4{,}3\geq 83 \Leftrightarrow 12{,}5x\geq 87{,}3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\geq\frac{87{,}3}{12{,}5} \Leftrightarrow x\geq 6{,}984$. Por tanto, Paloma ha de trabajar al menos 7 horas al día.

77. Si llamamos x al número de cajas de 25 kg, entonces tenemos $2x$ cajas de 10 kg.

Así, $25x+10\cdot(2x)\leq 1000 \Leftrightarrow 25x+20x\leq 1000 \Leftrightarrow$.

$\Leftrightarrow 45x\leq 1000 \Leftrightarrow x\leq 22{,}\overline{2}$

Por tanto, en el montacargas había 22 cajas de 25 kg y 44 cajas de 10 kg.

78. Tenemos que el área del rectángulo es $(x+1)\cdot(x+3)=x^2+4x+3$. Así, $x^2+4x+3<35 \Leftrightarrow x^2+4x-32<0$.

Por tanto,

$$x^2+4x-32=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+128}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{144}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm 12}{2} \Leftrightarrow x_1=-8, x_2=4$$

Como la longitud es negativa para valores inferiores a –1 y se anula para ese valor, los valores posibles para x pertenecen al intervalo (–1,4).

79. Tenemos que

$$\frac{x\cdot(x+6)}{2}\leq 8 \Leftrightarrow x\cdot(x+6)\leq 16 \Leftrightarrow x^2+6x-16\leq 0$$

Así,

$$x^2+6x-16=0 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{100}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm 10}{2} \Leftrightarrow x_1=-8, x_2=2$$

Como la altura es negativa para valores inferiores a 0 y se anula para ese valor, los valores posibles para x pertenecen al intervalo (0,2].

80. Tenemos que

$$-5t^2+15t\leq 5 \Leftrightarrow -5t^2+15t-5\leq 0$$

Así,

$$-5t^2+15t-5=0 \Leftrightarrow t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow$$

$$t=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} \Leftrightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow t_1=0{,}38, t_2=2{,}62$$

La altura del cohete fue menor o igual a 5 m en los instantes pertenecientes a la unión de intervalos $(0;0{,}38]\cup[2{,}62;3)$.

81. x = número de unidades vendidas

$$\left(25-\frac{5}{100}25\right)x>15\,000+15x \Rightarrow 23{,}75x>$$

$$>15\,000+15x \Rightarrow 8{,}75x>15\,000 \Rightarrow x>1\,714{,}3$$

Debe vender 1715 unidades como mínimo.

82. El perímetro del triángulo es $3x$ y el del rectángulo vale: $2x + 10$. La condición del enunciado es:

$3x < 2x + 10$

$x < 10$

83. Llamemos x al dinero en euros que tiene Cristina. Así, María posee $2x + 10$ euros.

Tenemos que $x+(2x+10)\geq 13 \Leftrightarrow 3x+10\geq 13 \Leftrightarrow 3x\geq 3 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Tenemos también que $x+(2x+10)\leq 34 \Leftrightarrow 3x+10\leq 34 \Leftrightarrow 3x\leq 24 \Leftrightarrow x\leq 8$.

Por tanto, Cristina tiene entre 1 y 8 euros, y María, entre $2\cdot 1 + 10 = 12$ y $2\cdot 8 + 10 = 26$ euros.

84. $\rho_s=\dfrac{\rho_c}{2}$;

$$m_c\geq m_s \Rightarrow \rho_c V_c\geq \rho_s V_s \Rightarrow \rho_c V_c\geq \frac{\rho_c}{2}V_s \Rightarrow V_c\geq$$

$$\geq\frac{V_s}{2} \Rightarrow \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 L\geq 2\left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2}\right) \Rightarrow L\geq\frac{16}{3}r$$

85. Llamando x al número de películas en Blu-ray que Paco iba a comprar, tenemos que $18{,}5x+5{,}5+1{,}5\cdot(x-1)\leq 112$. Es decir,

$$18{,}5x+5{,}5+1{,}5x-1{,}5\leq 112 \Leftrightarrow 20x\leq 112-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20x\leq 108 \Leftrightarrow x\leq\frac{108}{20} \Leftrightarrow x\leq 5{,}4$$

Por tanto, Paco solo puede comprar 5 películas.

86. Calculamos el área del triángulo en forma de un polinomio:

$$A_{\text{triángulo}}=\frac{(x+3)\cdot(2x+4)}{2} \Leftrightarrow A_{\text{triángulo}}=(x+3)\cdot(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{triángulo}}=x^2+5x+6$$

Según la cuadratura de la parábola:

$$A_{\text{parábola}}=\frac{4}{3}\cdot A_{\text{triángulo}} \Leftrightarrow A_{\text{parábola}}=\frac{4}{3}\cdot\left(x^2+5x+6\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{parábola}}=A_{\text{parábola}}=\frac{4}{3}x^2+\frac{20}{3}x+8$$

Así, porque $\frac{4}{3}x^2+\frac{20}{3}x+8\leq 56$, tenemos que:

$$\frac{4}{3}x^2+\frac{20}{3}x+8=56 \Leftrightarrow 4x^2+20x+24=168 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+20x-144=0 \Leftrightarrow x^2+5x-36=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{169}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm 13}{2} \Leftrightarrow x_1=-9, x_2=4$$

Como la altura es negativa para valores inferiores a –3 y se anula para ese valor, los valores posibles para x pertenecen al intervalo (–3,4].

87. Cada lado del rombo mide $\dfrac{20}{4}=5\,\text{cm}$.

Consideremos uno de los cuatro triángulos rectángulos que constituyen el rombo. Aplicamos el teorema de Pitágoras, llamando x al cateto que se sitúa sobre el eje de las ordenadas: $5^2=3^2+x^2 \Leftrightarrow 25=9+x^2 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=4$. Por tanto, el vértice de la parábola es $V(0,4)$.

La ecuación de la parábola tiene dos soluciones: $x = -3$ y $x = 3$. Así, su expresión es $a\cdot(x+3)\cdot(x-3)=a\cdot(x^2-9)$. Como el vértice de la parábola es $V(0,4)$, tenemos que $a\cdot\left(0^2-9\right)=4 \Leftrightarrow -9a=4 \Leftrightarrow a=-\dfrac{4}{9}$.

Por tanto, todos los puntos de la diagonal menor del rombo pueden describirse por la inecuación de segundo grado $-\dfrac{4}{9}x^2+4\geq 0$.

88. Como la base mide 6 cm y el área del triángulo es 9 cm², tenemos que $\frac{6 \cdot \text{altura}}{2} = 9 \Leftrightarrow 6 \cdot \text{altura} = 18 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \text{altura} = 3\,\text{cm}$ .Por tanto, el vértice de la parábola es $V(1,-3)$.

La ecuación de la parábola tiene dos soluciones: $x = -2$ y $x = 4$. Así, su expresión es $a \cdot (x+2) \cdot (x-4) =$ $= a \cdot (x^2 - 2x - 8)$. Como el vértice de la parábola es $V(1,-3)$, tenemos que

$a \cdot \left(1^2 - 2 \cdot 1 - 8\right) = -3 \Leftrightarrow -9a = -3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$.

Por tanto, todos los puntos del lado desigual del triángulo isósceles pueden describirse por la inecuación de segundo grado $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \leq 0$.

89. $x \geq 1$; $x \leq 5$; $y \geq -2$; $y \leq 7$

90. $\frac{b \cdot h}{2} > b^2 \Rightarrow \frac{h}{2} > b \Rightarrow h > 2b$. La altura deltriángulo debe ser mayor que el doble de la base.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

1. a) La distancia del coche al pueblo es $d = 150 - 60t$, siendo t el tiempo en horas. Como la distancia es siempre positiva o cero, tenemos que $150 - 60t \geq 0$.

b) Tenemos que

$150 - 60t \geq 0 \Leftrightarrow 60t \leq 150 \Leftrightarrow t \leq \frac{150}{60} \Leftrightarrow t \leq 2{,}5$.

c) Miguel tardó 2 horas y 30 minutos.

d) A través de una regla de tres, llamando x al tiempo en horas que el coche tarda en llegar a la casa, tenemos que $x = \frac{3}{40} = 0{,}075\,\text{h} = 0{,}075 \cdot 60\ \text{min} = 4\ \text{min}\ 30\ \text{s}$.

e) El viaje duró 2 h 34 min y 30 s.

2. a) El espacio libre en el disco duro es 1 000 · 0,5 = 150 GB.

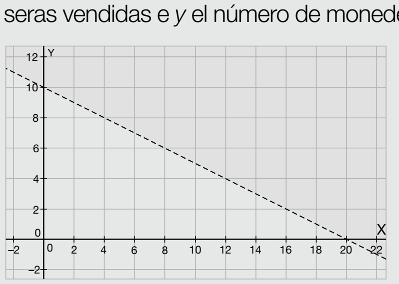
b) $4{,}8x \leq 150$

c) $4{,}8x \leq 150 \Leftrightarrow x \leq \frac{150}{4{,}8} \Leftrightarrow x \leq 31{,}25$. Así, Eva puede guardar hasta 31 películas en HD en su portátil.

d) El espacio libre en el disco duro después de que Eva guarde las 15 películas en HD es igual a $150 - 15 \cdot 4{,}8 = 150 - 72 = 78\,\text{GB}$.

e) Tenemos que $2x \leq 78 \Leftrightarrow x \leq 39$. Por tanto, Eva puede guardar hasta 39 películas SD en el espacio que queda en el disco duro de su portátil.

3. a) Tenemos que $4x + 8y \geq 80$, siendo x el número de pulseras vendidas e y el número de monederos vendidos.

b) 

c) Sí, pues el punto (20,0) pertenece al semiplano.

d) No, puesto que el punto (0,8) no pertenece al semiplano.

e) Por ejemplo, el punto (4,8) está en la condición dada y pertenece al semiplano.

4. a) Sabemos que el vértice de la parábola es (0,6). Es igual a $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Por tanto, $b = 0$.

b) Tenemos que $-\frac{\Delta}{4a} = 6 \Leftrightarrow -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 6 \Leftrightarrow c = 6$.

c) $y = ax^2 + 6$. El punto (0,0) pertenece a la parábola. Así, $4 = a \cdot 6^2 + 6 \Leftrightarrow 4 = 36a + 6 \Leftrightarrow 36a = -2 \Leftrightarrow$ $a = -\frac{2}{36} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{18}$.

d) $y \leq -\frac{1}{18}x^2 + 6$, pues el punto (0,0) pertenece a la inecuación.

e) Tenemos que

$-\frac{1}{18}x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{18}x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = 108 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{108} \Leftrightarrow x \simeq 10{,}4$

Por tanto, la longitud de la zona de paseo es 10,4 – 6 = 4,4 metros.

5. a) $(6x+2) \cdot (4x+1) - 4x^2 = 24x^2 + 14x + 2 - 4x^2 =$ $= 20x^2 + 14x + 2$

b) $20x^2 + 14x + 2 \leq 1080$

c) $20x^2 + 14x + 2 = 1080 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20x^2 + 14x - 1078 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x^2 + 7x - 539 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 21560}}{20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{21609}}{20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 147}{20} \Leftrightarrow x_1 = -7{,}7, x_2 = 7$

Por tanto, x pertenece al intervalo $\left(-\frac{1}{3}, 7\right)$ una vez que la longitud del desarrollo no puede ser negativa o cero.

d) $V(x) = x \cdot (6x+2) \cdot (4x+1) = x \cdot \left(24x^2 + 14x + 2\right) =$ $= 24x^3 + 14x^2 + 2x$

e) $x = 6$. Así, $V(6) = 24 \cdot 6^3 + 14 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 = 5700\,\text{cm}^3$.