3. a) Usando una regla de tres, llamando x el peso del diamante en miligramos, tenemos que:

$$x = 1{,}2 \cdot 200 \rightarrow x = 240\,\text{mg} = 0{,}24\,\text{g}$$

b) El error absoluto fue $|0{,}24 - 0{,}236| = 0{,}004$.

c) Una cota del error absoluto es 0,005.

d) Usando una regla de tres, llamando x el peso del diamante en quilates, tenemos que:

$$x = \frac{236}{200} \rightarrow x = 1{,}18 \text{ quilates}$$

e) El error relativo fue de $\dfrac{0{,}004}{0{,}236} \simeq 0{,}017$.

4. a) La arista del cubo mide $\sqrt[3]{4096} = 16$ pies.

b) Usando una regla de tres, llamando x la longitud de la arista en centímetros, tenemos que:

$$x = 16 \cdot 30{,}48 \rightarrow x = 487{,}68\,\text{cm} = 4{,}8768\,\text{m}$$

Así, la arista del cubo mide 4,8768 metros.

c) El error absoluto fue de $|4{,}8768 - 5| = |-0{,}1232| = 0{,}1232$.

d) El error relativo fue de $\dfrac{0{,}1232}{4{,}8768} = 0{,}0253$.

e) Usando una regla de tres, llamando x la longitud del diámetro del cilindro en centímetros, tenemos que:

$$x = 5 \cdot 30{,}48 \rightarrow x = 152{,}4 \text{ cm} = 1{,}524\,\text{m}$$

f) El volumen del cilindro es: $V = \pi \cdot 0{,}762^2 \cdot 4{,}8768 \rightarrow \rightarrow V = \pi \cdot 0{,}580644 \cdot 4{,}8768 \rightarrow V = 8{,}896\,\text{m}^3$.

g) El volumen del cubo sin contar en cilindro es $4{,}8768^3 = 115{,}986$ m^3. Por tanto el volumen de la escultura es 115,986 - 8,896 = 107,09 m^3.

5. a) Usando una regla de tres, llamando x el tiempo aproximado de revolución de la ISS en segundos, tenemos que:

$$x = 93 \cdot 60 = 5\,580$$

Por tanto, la ISS tarda 5 580 segundos aproximadamente para dar una vuelta completa alrededor de la Tierra.

b) Usando una regla de tres, llamando x el tiempo exacto de revolución de la ISS en segundos, tenemos que:

$$x = 92{,}69 \cdot 60 = 5\,561{,}4$$

Así, el tiempo exacto de revolución de la ISS es de 5 561,4 segundos.

c) El error absoluto fue de $|5580 - 5561{,}4| = 18{,}6$ s.

d) Una cota del error absoluto es 18,7.

e) El error relativo es de $\dfrac{18{,}6}{5561{,}4} \simeq 0{,}00334$.

2. Potenciación y radicación

ACTIVIDADES

1. Por ejemplo:

La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s

La distancia de la Tierra al Sol es de $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m.

Los polinomios están formados por monomios de distintos grados.

2. Por ejemplo:

3^2 $\quad 2^{5/2}$ $\quad 7^{\pi}$

Se pueden calcular sin utilizar la calculadora las potencias de exponente entero y en algunos casos las de exponente racional ($4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$)

3. a) 8

b) –8

c) –8

d) 8

4. a) 9/4

b) 9/4

c) –9/2

d) –9/4

5. Aplicando las propiedades de las potencias y simplificando:

a) 243/32 | d) π^{-19}

b) 1 | e) $x \cdot y$

c) 1 | f) $(a/b)^9$

6. La a y la d son falsas. La b y la c son ciertas.

7. a) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{11}{15}}$; b) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^{4-\frac{2}{5}+1} = \left(\dfrac{-3}{4}\right)^{\frac{23}{5}}$;

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{9}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{23}{10}}$; d) 1.

8. Redondeando a 2 cifras significativas en todos los casos:

$2{,}7 \cdot 10^6$ $\quad 6{,}8 \cdot 10^{-8}$ $\quad 4{,}0 \cdot 10^{-4}$ $\quad 7{,}5 \cdot 10^{-7}$

$5{,}1 \cdot 10^2$ $\quad 5{,}5 \cdot 10^7$ $\quad 1{,}2 \cdot 10^7$

9. 542000; 41876000; 0,001; 0,000157; –0,03

Cifras significativas:

$5,42 \cdot 10^5$: tres; $4,1876 \cdot 10^7$: cinco; 10^{-3}: una; $1,57 \cdot 10^{-4}$: tres; $-3 \cdot 10^{-2}$: una.

10. a) $1,5166 \cdot 10^4$

b) $2,088775706 \cdot 10^{-11}$

c) 25169082,13

d) 3,817

e) $8,751203291 \cdot 10^{-12}$

f) 0,113736263

g) $-4,13 \cdot 10^{-4}$

11. $9,385 \cdot 10^{-6} < 3,56 \cdot 10^{-3} < 7,863 \cdot 10^{-3} <$
$< 3,295 \cdot 10^{0} < 1,57 \cdot 10^{1} < 4,25 \cdot 10^{2} <$
$< 5,32 \cdot 10^{2} < 8,42 \cdot 10^{5}$

12. $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{25}$ y $\frac{169}{81}$

— $\sqrt{\frac{125}{4}} = \pm 5,59016...$; $\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\ \frac{3}{4}$;
$\sqrt{\frac{99}{35}} = \pm 1,68183...$; $\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\ \frac{4}{5}$;
$\sqrt{\frac{111}{38}} = \pm 1,70910...$; $\sqrt{\frac{169}{81}} = \pm\ \frac{13}{9}$.

— Números racionales: $\pm\frac{3}{4}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{13}{9}$.

Números irracionales: ± 5,59016..., ± 1,68183..., ± ± 1,70910...

13. Son semejantes $-2\sqrt{5}$ y $6\sqrt{5}$; $4\sqrt[3]{2}$ y $-6\sqrt[3]{2}$.

14. $\sqrt{\frac{11}{13}}$: dos raíces, una positiva y una negativa, ± 0,91986...

$\sqrt[4]{-\frac{13}{18}}$: no existe ninguna raíz real.

$\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$: signo negativo, $-\frac{3}{4}$.

$\sqrt[3]{\frac{3}{24}}$: signo positivo, $\frac{1}{2}$.

$\sqrt[8]{-\frac{108}{72}}$: no existe ninguna raíz real.

$\sqrt[3]{-\frac{111}{333}}$: signo negativo, -0,69336...

$\sqrt[4]{-\frac{625}{81}}$: no existe ninguna raíz real.

$\sqrt{\frac{1052}{4208}}$: dos raíces, una positiva y una negativa, $\pm\frac{1}{2}$.

$\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$: signo positivo, 0,87055...

15. $\sqrt[30]{3^{15}}$ $\sqrt[30]{2^{10}}$ $\sqrt[30]{4^{6}}$

16. a) $(-2+5-8+3-5+7)\sqrt{7} = 0\sqrt{7} = 0$

b) $\frac{2}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} + 5\sqrt{2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} + 5\sqrt{2}$

c) $-8\sqrt{11} + 5\sqrt{17}$

17. $\sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt{\frac{a}{2b}}$; $\sqrt{\frac{144}{16c}} = \sqrt{\frac{9}{c}}$;

$\sqrt{\frac{12a}{3a}} = \sqrt{4} = \pm 2.$

18. Previamente reducir los radicales a índice común.

a) $-6\sqrt[30]{3^{15} \cdot 5^6 \cdot 3^{10}} = -20,68$

b) $3\sqrt[18]{4^6 \cdot 2^3 \cdot 8^2} = 6,73$

19. Son falsas las igualdades *a* y *d*. Son verdaderas *b, e* y *f.*

En la igualdad *c* es cierto que $\sqrt{81} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ pero es falso que $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = 3\sqrt{27}$

20. $\sqrt[4]{5^4} = 5$; $+\sqrt{5^2} = +\ 5$; $\left(\frac{12}{7}\right)^2 = +\frac{144}{49}$;

$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{2^4} = 2.$

21. a) $2\sqrt{3} + \sqrt{21}$; b) $11 + \sqrt{33}$;

c) $9\sqrt{7} + \sqrt{14}$; d) $3\sqrt{5} + 5$.

22. a) $121 + 22\sqrt{2} + 2 = 123 + 22\sqrt{2}$;

b) $6 - 2\sqrt{30} + 5 = 11 - 2\sqrt{30}$;

c) $10 - 17 = -7$;

d) $49 - 21 = 28$.

23. $2 - \sqrt{3}$; $\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$; $\sqrt{3} + 5$.

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$;

$(\sqrt{3} - 5\sqrt{2})(\sqrt{3} + 5\sqrt{2}) = 3 - 25 \cdot 2 =$
$= 3 - 50 = -47$;

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$;

$(\sqrt{3} - 5)(\sqrt{3} + 5) = 3 - 25 = -22.$

24. a) $3^2 \cdot 5 \cdot a \cdot b^2\sqrt{5} = 45ab^2\sqrt{5}$;

b) $(ab)^3\sqrt[3]{7a}$;

c) $-12 \cdot 2^3 \cdot a^3\sqrt{2a} = -96a^3\sqrt{2a}$;

d) $\frac{16}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}.$

25. a) $\sqrt{\dfrac{16^2}{3^2}a}=\sqrt{\dfrac{256}{9}a}$;

b) $-\sqrt{7^2\cdot 11^6\cdot 2a}$;

c) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\cdot b^2\cdot 3^3\cdot b^3}=\sqrt{\dfrac{27}{16}b^5}$;

d) $\sqrt[3]{3a^6b^4}$.

26. Factorizando el radicando y extrayendo factores:

$6\sqrt[4]{6}$ $\quad x^6\sqrt[7]{x^5}$ $\quad 2\sqrt[6]{2^4}$

27. a) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

b) $\dfrac{-17\sqrt[3]{17^2}}{2\cdot 17}=\dfrac{-\sqrt[3]{289}}{2}$;

c) $\dfrac{1\cdot(5-\sqrt{2})}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})}=\dfrac{5-\sqrt{2}}{25-2}=$

$=\dfrac{5-\sqrt{2}}{23}$;

d) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{15})}{(\sqrt{7}-\sqrt{15})(\sqrt{7}+\sqrt{15})}=$

$=\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{45}}{7-15}=-\dfrac{\sqrt{21}+3\sqrt{5}}{8}$;

e) $\dfrac{9(\sqrt{14}-\sqrt{10})}{14-10}=\dfrac{9(\sqrt{14}-\sqrt{10})}{4}$;

f) $\dfrac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{5}+2\sqrt{30}}{4-6}=$

$=-2\sqrt{5}-\sqrt{30}=-\sqrt{5}(2+\sqrt{6})$

28. a) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-2}+\dfrac{3-3\sqrt{2}}{1-2}=-1-\sqrt{2}-3+3\sqrt{2}=$
$=2\sqrt{2}-4$

b) $\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3-2}+\dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2}=$
$=3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=5\sqrt{3}-\sqrt{2}$

29. Aplicamos la definición de logaritmo y expresamos el argumento en forma de potencia.

a) $2^x = 2^4$; $x = 4$

b) $3^x = 3^{-3}$; $x = -3$

c) $10^x = 10^{-2}$; $x = -2$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$; $x = -4$

30. 4; 5; 1; –2; –4; 6; –1; 3.

31. a) log (27ab);

b) log (12 · 240);

c) log (a^3b^5);

d) log ($5^3\sqrt[4]{32}$).

32. a) log (27*a*) – log (b) = log 27 + log *a* – log b;

b) 5 (log 3 – log *x*);

c) log (5*x*) – log (7 – *x*) = log 5 + log *x* - log (7 – *x*);

d) log 27 – $\frac{1}{2}$ log (15*z*) =

= log 27 – $\frac{1}{2}$ (log 15 + log *z*);

e) 2 (log (10*x*) – log (9*y*)) =

= 2 (log 10 + log *x* – log 9 – log *y*) =

= 2 (1 + log *x* + 2 log 3 – log *y*);

f) $\frac{1}{2}$ (log (8*x*) – log 9) =

= (log 8 + log *x* – 2 log 3).

33. a) log (*a* · *b*) = log *a* + log *b* = 3 + 4 = 7;

b) log $\dfrac{a}{b}$ = log *a* – log *b* = 3 – 4 = –1;

c) log a^2 = 2 log *a* = 2 · 3 = 6;

d) $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}=\dfrac{4}{3}$.

34. Aplicamos la expresión del cambio de base.

a) $\log_2 5=\dfrac{\log 5}{\log 2}=2{,}32$

b) $\log_3 0{,}2=\dfrac{\log 0{,}2}{\log 3}=-1{,}46$

35. 9,20 – 9,20 · 0,03 = 8,92 €

36. 83 + 83 · 0,25 = 103,75 ∑

103,75 – 103,75 · 0,20 = 83 ∑

El precio después de las rebajas es el mismo que el precio inicial antes de aplicar el aumento.

37. 60,57 €; 36,24 %.

38. *I* = *c* · *i* · *n* = 5 400 · 0,038 · 5 = 1026 € ;
5 400 + 1 026 = 6426 €.

39. 0,0475 *c* = 2 745,8 – *c* ⇒ *c* = 2 621,28 €.

40. a) I_1 = 24 000 · 0,06 · 1 = 1 440 ;

I_2 = 25 440 · 0,06 · 1 = 1526,4 ;

I_3 = 26 966,4 · 0,06 · 1 = 1 617,98 ;

I_4 = 28 584,38 · 0,06 · 1 = 1 715,1

c_4 = 28 584,38 + 1 715,1= 30 299,44 €.

b) c_4 = 24 000 · (1 + 0,06)4 = 30 299,44 €.

El segundo procedimiento comporta menos cálculos.

41. *I* = 3 000 · 0,05 · 2 = 300 € ;

I = 3000 · [(1 + 0,048) · 2 – 1] = 294,91 €.

Resulta más beneficiosa la opción a interés simple.

42. c_4 = 6 000 · (1 + 0,068)4 = 7 806,14 €.

43. $c = \dfrac{c_n}{(1+i)^n} = \dfrac{4\,565{,}40}{(1+0{,}03)^2} = 4\,303{,}33$

44. Aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log 36 = \log 6^2 = 2 \cdot \log 6 = 1{,}556$

b) $\log 216 = \log 6^3 = 3 \cdot \log 6 = 2{,}334$

c) $\log 6\,000 = \log 6 + \log 1\,000 = 3{,}778$

d) $\log 0{,}06 = \log 6 + \log 10^{-2} = -1{,}222$

45. Aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} = \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{a}} b = \dfrac{1}{2}\dfrac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\log_a b}{\frac{1}{2}\log_a a} = c$

b) $\log_{a^2} b^2 = 2\log_{a^2} b = 2\dfrac{\log_a b}{\log_a a^2} = 2\dfrac{\log_a b}{2\log_a a} = c$

c) $\log_{\frac{1}{a}} \dfrac{1}{b} = -\log_{\frac{1}{a}} b = -\dfrac{\log_a b}{\log_a \frac{1}{a}} = -\dfrac{\log_a b}{\log_a a^{-1}} = c$

46. a) $(+5)^2(+5)^5(+5)^{-2} = (+5)^{2+5-2} = (+5)^5$;

b) $\dfrac{(-9)^5 \cdot (-9)^4}{(-9)^{-3} \cdot (-9)^2} = (-9)^5 \cdot (-9)^4 \cdot (-9)^3 \cdot (-9)^{-2} =$

$= (-9)^{5+4+3-2} = (-9)^{10}$

47. a) $\dfrac{1}{12^5}$ b) $\dfrac{1}{(a-1)^3}$ b) $\left(\dfrac{3}{8x}\right)^2$

48. a) Racional; b) irracional; c) racional; d) racional; e) irracional; f) irracional.

49. a) $x\sqrt{5} = \sqrt{30} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}$, es irracional.

b) $\sqrt{4} + 3x = \sqrt{\dfrac{4}{9}} \Rightarrow 2 + 3x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 + 9x = 2 \Rightarrow 9x = 2 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x = -4 \Rightarrow x = -\dfrac{4}{9}$

es un número racional.

c) $x + \sqrt{7} = 2 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{7}$, es irracional.

d) $\dfrac{x}{\sqrt{21}} = 3 \Rightarrow x = 3\sqrt{21}$, es irracional.

50. Aplicando las propiedades de las potencias:

a) $(-4)^{\frac{1}{5}} \cdot (-4)^{\frac{2}{5}} = (-4)^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}} = (-4)^{\frac{3}{5}}$

b) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{7}{8}} : \left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{3}{8}} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{7}{8}-\frac{3}{8}} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{4}{8}} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

c) $\left[\left(\dfrac{9}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{7}{2}} = \left(\dfrac{9}{2}\right)^{\frac{1}{3}\frac{7}{2}} = \left(\dfrac{9}{2}\right)^{\frac{7}{6}}$

d) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{2+\frac{2}{3}} = \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{8}{3}}$

e) $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

51. Aplicando las propiedades de las potencias:

a) $\left(\sqrt{15}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt{15}\right)^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}} = \sqrt{5}$

b) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)^{\frac{10}{9}} : \left(\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)^{\frac{4}{9}} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)^{\frac{6}{9}} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)^{\frac{2}{3}}$

c) $\left[\left(3+\sqrt{7}\right)^{\frac{7}{4}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(3+\sqrt{7}\right)^{\frac{7}{4}\frac{1}{2}} = \left(3+\sqrt{7}\right)^{\frac{7}{8}}$

d) $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{\frac{8}{15}}$

e) $\left[\left(-\dfrac{21}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{6}{5}} = \left(-\dfrac{21}{4}\right)^{\frac{2}{3}\frac{6}{5}} = \left(-\dfrac{21}{4}\right)^{\frac{4}{5}}$

52. Aplicando las propiedades de las potencias:

a) $\left(\dfrac{13}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{13}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{13}{5}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{13}{5}\right)^{-\frac{1}{6}} = \left(\dfrac{5}{13}\right)^{\frac{1}{6}}$

b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{5}{3}} = \left(\dfrac{3}{7}\right)^{-\frac{11}{12}} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{\frac{11}{12}}$

c) $\left[(-6)^3\right]^4 : (-6)^{13} = (-6)^{12} : (-6)^{13} = (-6)^{-1} = -\dfrac{1}{6}$

d) $\left(-\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(-\dfrac{5}{4}\right)^{-\frac{3}{5}} : \left(-\dfrac{5}{4}\right) = \left(-\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{2}{5}-\frac{3}{5}} : \left(-\dfrac{5}{4}\right) =$

$= \left(-\dfrac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{5}-1} = \left(-\dfrac{5}{4}\right)^{-\frac{6}{5}} = \left(-\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$

e) $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{1}{4}} : \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left[\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{7}{6}} =$

$= \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} \cdot \left[\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{7}{6}} = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{-\frac{5}{12}} \cdot \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{-\frac{7}{12}} =$

$= \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{-1} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

53. Aplicando la relación entre las raíces y las potencias y operando:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt{2} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} =$

$= 5 \cdot 2 = 10$

b) $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{5^2} \cdot \sqrt[5]{5^3} \cdot \sqrt[4]{7^7} = 7^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{3}{5}} \cdot 7^{\frac{7}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}} \cdot 5^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}} =$

$= 7^{\frac{8}{4}} \cdot 5 = 7^2 \cdot 5 = 49 \cdot 5 = 245$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{(-8)^2} \cdot \sqrt[3]{(-3)^4}}{\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{-3}} = (-8)^{\frac{2}{3}} \cdot (-3)^{\frac{4}{3}} \cdot (-8)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-3)^{-\frac{1}{3}} =$

$= (-8)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} \cdot (-3)^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} \cdot (-3) = (-2) \cdot (-3) = 6$

d) $\dfrac{\sqrt[6]{9^4} \cdot \sqrt[5]{(-5)^2}}{\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[5]{-5}} = 9^{\frac{4}{6}} \cdot (-5)^{\frac{2}{5}} \cdot 9^{-\frac{1}{6}} \cdot (-5)^{-\frac{1}{5}} = 9^{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} \cdot (-5)^{\frac{2}{5}-\frac{1}{5}} =$

$= 9^{\frac{1}{2}} \cdot (-5)^{\frac{1}{5}} = 3\sqrt[5]{-5}$

e) $\dfrac{\sqrt[8]{121^7}\cdot\sqrt[3]{4^5}}{\sqrt[8]{121^3}\cdot\sqrt[3]{4^2}\cdot(-3)^{-3}}=121^{\frac{7}{8}}\cdot 4^{\frac{5}{3}}\cdot 121^{-\frac{3}{8}}\cdot 4^{-\frac{2}{3}}\cdot(-3)^3=$

$=121^{\frac{7}{8}-\frac{3}{8}}\cdot 4^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}\cdot(-27)=121^{\frac{1}{2}}\cdot 4\cdot(-27)=$

$=11\cdot 4\cdot(-27)=-1188$

54. Aplicamos la expresión del cambio de base.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[6]{2^{-3}}}{3\cdot 2^{\frac{1}{6}}}=3\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot(-1)\cdot 2^{-\frac{3}{6}}\cdot 3^{-1}\cdot 2^{-\frac{1}{6}}=$

$=(-1)\cdot 3^{1+\frac{1}{3}-1}\cdot 2^{-\frac{3}{6}-\frac{1}{6}}=(-1)\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}=(-1)\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=$

$=-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2}}=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$

b) $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\frac{9}{12}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot(-5)^{\frac{2}{3}}}{(-5)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{4}}=$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot(-5)^{\frac{2}{3}}\cdot(-5)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-1}\cdot(-5)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{5}}\cdot(-5)=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot(-5)=$

$=-5\sqrt[5]{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-5\sqrt[5]{\frac{16}{9}}$

c) $\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^{\frac{3}{8}}}{\left(\frac{25}{10}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot(0{,}25)^{\frac{7}{8}}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{8}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{7}{8}}=$

$=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{8}-\frac{7}{8}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{2}{5}}$

d) $\dfrac{49^{\frac{3}{8}}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot(-3)^{\frac{4}{5}}}{49^{\frac{1}{8}}\cdot(-3)^{\frac{2}{5}}}=49^{\frac{3}{8}}\cdot 49^{\frac{1}{4}}\cdot(-3)^{\frac{4}{5}}\cdot 49^{-\frac{1}{8}}\cdot(-3)^{-\frac{2}{5}}=$

$=49^{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}\cdot(-3)^{\frac{4}{5}-\frac{2}{5}}=49^{\frac{1}{2}}\cdot(-3)^{\frac{2}{5}}=7\sqrt[5]{(-3)^2}=7\sqrt[5]{9}$

e) $\dfrac{\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{9}{21}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot(-4)^{-\frac{2}{3}}}=$

$=\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot(-4)^{\frac{2}{3}}=$

$=\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(-4)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot(-4)^{\frac{2}{3}}=$

$=\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\cdot(-4)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4)=(-4)\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=$

$=-4\sqrt{\frac{7}{3}}$

55.

A	B	A + B	A – B	A · B	A : B
$3{,}2\cdot 10^{6}$	$2{,}5\cdot 10^{4}$	$3{,}225\cdot 10^{6}$	$3{,}175\cdot 10^{6}$	$8\cdot 10^{10}$	$1{,}28\cdot 10^{2}$
$-6{,}2\cdot 10^{10}$	$2{,}5\cdot 10^{12}$	$2{,}438\cdot 10^{12}$	$-2{,}562\cdot 10^{12}$	$-1{,}55\cdot 10^{23}$	$-2{,}48\cdot 10^{-2}$
$1{,}5\cdot 10^{-4}$	$1{,}2\cdot 10^{-6}$	$1{,}512\cdot 10^{-4}$	$1{,}488\cdot 10^{-4}$	$1{,}8\cdot 10^{-10}$	$1{,}25\cdot 10^{2}$
$3{,}2\cdot 10^{6}$	$1{,}25\cdot 10^{4}$	$3{,}2125\cdot 10^{6}$	$3{,}1875\cdot 10^{6}$	$4\cdot 10^{10}$	$2{,}56\cdot 10^{2}$

56. Si el 48% se ha evaporado, queda 100 – 48 = 52 %.

El 52 % de $3{,}6\cdot 10^{24}$ es: $\dfrac{52}{100}\cdot 3{,}6\cdot 10^{24}=1{,}872\cdot 10^{24}$

57.

Planeta	Masa
Mercurio	$3{,}2857\cdot 10^{20}$
Venus	$4{,}86881\cdot 10^{21}$
Tierra	$5{,}974\cdot 10^{20}$
Marte	$6{,}39218\cdot 10^{21}$
Júpiter	$2{,}2211332\cdot 10^{24}$
Saturno	$5{,}687248\cdot 10^{23}$
Urano	$8{,}6623\cdot 10^{22}$
Neptuno	$1{,}021554\cdot 10^{23}$
Plutón	$1{,}1948\cdot 10^{19}$

58. a) $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

b) $\pi\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{2\pi^3}{\pi^2}=2$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^5\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{3^2}\right]^2\cdot(-3)=-\left(\frac{1}{3^3}\right)^2\cdot 3=-\frac{3}{3^6}=-\frac{1}{3^5}=-\frac{1}{243}$

59. a) $\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{2\cdot 3^6}=3^3\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5^2}=3\cdot 5\sqrt{2}=15\sqrt{2}$;

d) $\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

Son semejantes a $\sqrt{2}$: $\sqrt{1458}$, $\sqrt{450}$ y $\sqrt{8}$.

60. a) $2\sqrt{3}$

b) $-10\sqrt{2}-9\sqrt{3}$

c) $\frac{12}{6}\sqrt{15}=2\sqrt{15}$

d) $\frac{16}{6}\sqrt{11}-\frac{31}{12}\sqrt{7}=\frac{8}{3}\sqrt{11}-\frac{31}{12}\sqrt{7}$

61. a) $\sqrt{3^3\cdot a^6\cdot b^3}=3a^3b\sqrt{3b}$

b) $3\cdot 5^2\sqrt{3^{15}a^{10}b^{15}}=3^8\cdot 5^2a^5b^7\sqrt{3b}$

62. a) $3\sqrt{2}-5\cdot 2\sqrt{2}+7\cdot 5\sqrt{2}-4\cdot 3\sqrt{2}=$

$=(3-10+35-12)\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

b) $-3\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 5\sqrt{5}+8\cdot 5\sqrt{3}-$

$-10\cdot 2\sqrt{5}=31\sqrt{3}-30\sqrt{5}$

c) $7\cdot 5^2-\frac{2}{5}\sqrt{5}+\frac{3}{7}+6\cdot 5\sqrt{5}=$

$=\frac{148}{5}\sqrt{5}+\frac{1228}{7}$

63. a) $\sqrt{7^2a^4b}$

b) $\sqrt{11^7a^6b^3}$

c) $\sqrt{2^2\cdot 3^4a^2\,2\cdot 3b}=\sqrt{2^3\cdot 3^5a^2b}$

d) $\sqrt{\frac{20^2a^6b^{10}}{7^2c^6}\cdot 9c}=\sqrt{\frac{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2a^6b^{10}}{7^2c^5}}$

64. a) $\frac{5^2\cdot 3\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{2^3\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{25}{8}\sqrt{6}$

b) $\frac{\sqrt{2^5\cdot 3^5}}{(\sqrt{3^6})^3}=\frac{2^2\cdot 3^2\cdot\sqrt{2\cdot 3}}{3^9}=\frac{2^2\sqrt{6}}{3^7}$

c) $\sqrt{\frac{2\cdot 3^2\cdot a^3b^2}{3^3\cdot a^2b}}=\sqrt{\frac{2ab}{3}}=\frac{\sqrt{6ab}}{3}$

d) $\frac{2\cdot 3\cdot 5^3\sqrt{3\cdot 5}}{2^2\cdot 3\cdot 5^3\sqrt{3\cdot 5}}=\frac{1}{2}$

65. a) $\sqrt{25}=5$

b) $2\cdot 8=16$

c) $\sqrt[8]{3^6}=3^{\frac{6}{8}}=3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{3^3}$

66. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{10}$

c) $\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$

d) $\frac{1-\sqrt{7}}{1-\sqrt{6}}=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}-\sqrt{42}}{1-6}=\frac{\sqrt{42}+\sqrt{7}-\sqrt{6}-1}{5}$

e) $\frac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=4+\sqrt{15}$

f) $\frac{\sqrt{70}+\sqrt{42}+\sqrt{110}+\sqrt{66}}{10-6}=\frac{\sqrt{70}+\sqrt{42}+\sqrt{110}+\sqrt{66}}{4}$

67. Los dos denominadores son conjugados entre sí, por tanto sumamos directamente las dos fracciones:

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$

$=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=$

$=\frac{5-\sqrt{15}+\sqrt{15}+3}{2}=\frac{8}{2}=4$

El número entero es 4.

68. Debemos comprobar si $\frac{3-\sqrt{2}}{2+\sqrt{8}}=\frac{4+\sqrt{2}}{8+6\sqrt{2}}$, es decir, si se verifica la siguiente igualdad:

$(3-\sqrt{2})\cdot(8+6\sqrt{2})=(2+\sqrt{8})\cdot(4+\sqrt{2})$

$(3-\sqrt{2})\cdot(8+6\sqrt{2})=24+18\sqrt{2}-8\sqrt{2}-12=$

$=12+10\sqrt{2};$

$(2+\sqrt{8})\cdot(4+\sqrt{2})=8+2\sqrt{2}+4\sqrt{8}+4=$

$=8+2\sqrt{2}+8\sqrt{2}+4=12+10\sqrt{2}$

Puesto que ambos resultados coinciden los segmentos de longitudes $3-\sqrt{2}$ cm y $2+\sqrt{8}$ cm son proporcionales a los segmentos de longitudes $4+\sqrt{2}$ cm y $8+6\sqrt{2}$ cm.

69. a) $\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$; por tanto:

4.º término: $15\sqrt{5}$

5.º término: $15\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=15\cdot 5=75$

6.º término: $75\sqrt{5}$

Serie: $3,\ 3\sqrt{5},\ 15, 15\sqrt{5},\ 75,\ 75\sqrt{5},\ldots$

b) $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

4.º término: $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$

5.º término: $4\sqrt{2}$

6.º término: $4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=8$

Serie: $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2},\ 8,\ldots$

c) $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=$

$=\frac{2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{1-2}=\sqrt{2}$

4.º término:

$(2+2\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4+2\sqrt{2}$

5.º término:

$(4+2\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}$

6.º término:

$(4+4\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}$

Serie:

$1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2},$

$4+4\sqrt{2},\ 8+4\sqrt{2},\ldots$

d) $\frac{5-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}=\frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{5}}{-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=$

$=\frac{5\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{-5}=1-\sqrt{5}$

4.º término:

$(10-6\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=10-10\sqrt{5}-6\sqrt{5}+6\cdot 5=$

$=40-16\sqrt{5}$

5.º término:

$(40-16\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=$

$=40-40\sqrt{5}-16\sqrt{5}+16\cdot 5=120-56\sqrt{5}$

6.º término:

$(120-56\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=$

$=120-120\sqrt{5}-56\sqrt{5}+56\cdot 5=400-176\sqrt{5}$

Serie:

$-\sqrt{5}, 5-\sqrt{5}, 10-6\sqrt{5},\ \ 40-16\sqrt{5},$

$120-56\sqrt{5},\ 400-176\sqrt{5}, \ldots$

70. a) $\frac{6\sqrt[11]{a^{11-7}}}{\sqrt[11]{a^7}\sqrt[11]{a^{11-7}}}=\frac{6\sqrt[11]{a^5}}{\sqrt[11]{a^7}\sqrt[11]{a^5}}=\frac{6\sqrt[11]{a^5}}{a}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4\cdot 3-5}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

Para racionalizar el denominador de una expresión, si es de la forma $\sqrt[m]{a^n}$ multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[m]{a^{m-n}}$.

71. a) $3x-5\sqrt{2}=4\sqrt{2}\Rightarrow 3x=9\sqrt{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{9\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{5}x-48=12\Rightarrow\sqrt{5}x=60\Rightarrow$

$x=\frac{60}{\sqrt{5}}=12\sqrt{5}$

c) $\sqrt{3}x-5\sqrt{2}=\sqrt{2}x\Rightarrow(\sqrt{3}-\sqrt{2})x=5\sqrt{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{3-2}=$

$=5\sqrt{6}+10$

d) $\frac{2x}{1+\sqrt{2}}+x(1-\sqrt{2})=5\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+x(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=5(1+\sqrt{2})\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+x(1-2)=5+5\sqrt{2}\Rightarrow$

$2x-x=5+5\sqrt{2}\Rightarrow x=5+5\sqrt{2}$

72. a) $\sqrt{2}+6\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{13}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{18\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}+\frac{3}{6\sqrt{3}}=9\sqrt{3}+3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{73}{6}\sqrt{3}$

c) $\frac{\pi}{5}\sqrt{5}-\frac{\pi}{5}\sqrt{5}+3\pi=3\pi$

d) $2\sqrt{3}\sqrt{7}+\frac{1}{7}\sqrt{3}+\frac{1+3\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\sqrt{7}+\frac{1}{7}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{27}+\frac{1}{3}=$

$=\left(2\sqrt{7}+\frac{34}{189}\right)\sqrt{3}+\frac{1}{3}$

73. 50. 3; –2; –1; 5.

74. log 2,125 = 0,3274; $10^{0,3274}$ = 2,125.

log 186,25 = 2,2701; $10^{2,2701}$ = 186,25.

log 99999 = 5,0000; $10^{5,0000}$ = 100000.

log 18432 = 4,2656; $10^{4,2656}$ = 18433.

75. a) $\log(2\cdot 7)=\log 2+\log 7=0{,}3010+0{,}8451=1{,}1461;$

b) $\log\sqrt{7^2}=\log 7=0{,}8451;$

c) $\log_2 7=\frac{\log 7}{\log 2}=\frac{0{,}8451}{0{,}3010}=2{,}8076;$

d) $\log\sqrt{\frac{2^3}{2\cdot 7^2}}=\log\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\log\frac{2}{7}=$

$=\log 2-\log 7=-0{,}5441$

76. La expresión *b* es equivalente a la expresión *c*:

$\log(2\cdot 4)+\log(3\cdot 5)=\log 2+\log 4+\log 3+\log 5=$

$=\log 5+\log 4+\log 3+\log 2=\log(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2)$

77. $\log\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-7\sqrt{7}}\right)+\log\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)=$

$=\log\left(\begin{array}{l}\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)\cdot\\ \cdot\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)\end{array}\right)=$

$=\log\left(\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}\right)^2-\left(\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)^2\right)=$

$=\log(8+3\sqrt{7}-8+3\sqrt{7})=$

$=\log(6\sqrt{7})=\log 6+\frac{1}{2}\log 7=1{,}200\,7$

78. a) $\log_2 5+\log_2 7-\log_2 10=\log_2(5\cdot 7)-\log_2 10=$

$=\log_2 35-\log_2 10=\log_2\left(\frac{35}{10}\right)=\log_2\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{\log\left(\frac{7}{2}\right)}{\log 2}$

b) $\log_7 5-2\cdot\log_7 3+\log_7 0{,}1=\log_7 5-\log_7 3^2+\log_7 0{,}1=$

$=\log_7 5-\log_7 9+\log_7 0{,}1=\log_7\left(\frac{5}{9}\right)+\log_7\left(\frac{1}{10}\right)=$

$=\log_7\left(\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{10}\right)=\log_7\left(\frac{1}{18}\right)=\frac{\log\left(\frac{1}{18}\right)}{\log 7}\simeq\frac{-1{,}255}{0{,}845}=-1{,}48$

c) $\frac{\log_3 4}{2}-\log_3\frac{4}{3}+\log_3 5=\log_3\sqrt{4}-\log_3\frac{4}{3}+\log_3 5=$

$=\log_3 2-\log_3\frac{4}{3}+\log_3 5=\log_3\left(\frac{2}{4/3}\right)+\log_3 5=$

$=\log_3\frac{3}{2}+\log_3 5=\log_3\left(\frac{3}{2}\cdot 5\right)=\log_3\frac{15}{2}=\frac{\log\frac{15}{2}}{\log 3}\simeq$

$\simeq\frac{0{,}875}{0{,}477}=1{,}834$

d) $3\cdot(\log_5 3+\log_5 2)-\log_5 12=3\cdot[\log_5(3\cdot 2)]-\log_5 12=$

$=3\cdot\log_5 6-\log_5 12=\log_5 6^3-\log_5 12=$

$=\log_5 216-\log_5 12=\log_5\left(\dfrac{216}{12}\right)=\log_5 18=\dfrac{\log 18}{\log 5}\simeq$

$\simeq\dfrac{1{,}255}{0{,}699}=1{,}795$

79. a) $\log(x-5)=2\Rightarrow x-5=10^2\Rightarrow x=105$

b) $\log(3x+1)=1\Rightarrow 3x+1=10^1\Rightarrow 3x=$

$=9\Rightarrow x=3$

c) $\log\dfrac{4x}{5}=3\Rightarrow\dfrac{4x}{5}=10^3\Rightarrow 4x=5\,000\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{5\,000}{4}=1\,250$

d) $\log\dfrac{3x+40}{x-19}=2\Rightarrow\dfrac{3x+40}{x-19}=10^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x+40=100x-1\,900\Rightarrow -97x=-1\,940\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{1\,940}{97}=20$

80. $2\log x+\dfrac{3}{4}\log x-\dfrac{1}{2}\log x+(2-3\log x)=$

$=2\cdot 1{,}5+\dfrac{3}{4}\cdot 1{,}5-\dfrac{1}{2}1{,}5+(2-3\cdot 1{,}5)=$

$=3+1{,}125-0{,}75-2{,}5=0{,}875$

81. a) 2 log$x$ + 3 log y − log ▯

b) $\log\left(a+a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{6}}\right)=\log(a+a)=\log(2a)=\log 2+\log a$

c) $3a\cdot\left(2\log a+\dfrac{3}{4}\log b+\log c\right)=$

$=6a\cdot\log a+\dfrac{9}{4}a\cdot\log b+3a\cdot\log c$

d) $\log\left(\dfrac{100}{ab^2}\right)=2\cdot\log 10-\log a-2\cdot\log b$

82. a) $3^x=3^3\Rightarrow x=3$

b) $4^x=\dfrac{48}{3}\Rightarrow 4^x=16\Rightarrow 4^x=4^2\Rightarrow x=2$

c) $2\cdot 2^x-3\cdot 2^x+2\cdot 2^x=2\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{64}{324}\Rightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{16}{81}\Rightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\Rightarrow x=4$

83. Respuesta abierta

84. El precio del libro con descuento es $12{,}95\cdot 0{,}95=12{,}3025\simeq 12{,}30$ euros. Así, Rodrigo ha pago el precio justo.

85. I = 8 000 · 0,025 · 3 = 600

Así, el interés simple producido es de 600 €.

86. El precio de las zapatillas con IVA es 90 · 1,21 = 108,9 €.

El precio con descuento es de 108,9 · 0,9 = 98,01 €.

Por tanto, Macarena pagó 98,01 € por sus zapatillas.

87. Tenemos que:

$300=5000\cdot i\cdot 2$

$300=10000\cdot i$

$i=\dfrac{300}{10000}=\dfrac{3}{100}$

El tipo de interés anual es del 3 %.

88. Tenemos que:

$I=6\,500\cdot 0{,}02\cdot\dfrac{1}{2}$

$I=65$

Así, Enrique, transcurridos 6 meses, dispondrá de 6 500 + 65 = 6 565 €.

89. Olga se quedó con 1 600 · 0,85 = 1 360 canciones en su reproductor de MP3 después de borrarlas. Así, el reproductor de MP3 ha quedado con 1 360 · 1,15 = 1 564 canciones.

Tenemos que $\dfrac{1\,564}{1\,600}=0{,}9775$. Por tanto, la cantidad de canciones en el reproductor de MP3 disminuyó 2,25 %.

90. a) −3; b) $\dfrac{3}{4}$; c) 6π cm.

91. Tenemos que el interés compuesto es $15000\cdot(1+0{,}055)^5=15000\cdot 1{,}055^5\simeq 19604{,}4$ euros.

92. $10\,000\cdot(1+x)^2=11\,449$

$(1+x)^2=\dfrac{11\,449}{10\,000}$

$(1+x)^2=1{,}1449$

$1+2x+x^2=1{,}1449$

$x^2+2x-0{,}1449=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 0{,}1449}}{2}$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+0{,}5796}}{2}$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4{,}5796}}{2}$

$x=\dfrac{-2\pm 2{,}14}{2}$

$x=\dfrac{-4{,}14}{2};x=\dfrac{0{,}14}{2}$

$x=0{,}07$

Por tanto, el tipo de interés anual es de un 7 %.

93. Respuesta abierta.

94. a) 45 % de $1{,}34\cdot 10^9$ =

$=\dfrac{45\cdot 1{,}34\cdot 10^9}{10^2}=6{,}03\cdot 10^8$

En el embalse hay $6{,}03\cdot 10^8$ m^3 de agua.

b) $1{,}34\cdot 10^9-6{,}03\cdot 10^8=7{,}37\cdot 10^8$

Son necesarios $7{,}37\cdot 10^8$ m^3 de agua.

95. Sea x la distancia entre B y C. Se tiene:

$$\frac{3}{5}x + x = \frac{400(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{\sqrt{18}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5}x = \frac{400(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{\sqrt{18}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{5 \cdot 400(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{8\sqrt{18}} = \frac{250(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{\sqrt{18}} =$$

$$= \frac{250\sqrt{18}(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}} = \frac{250(\sqrt{2304} - \sqrt{900})}{18} =$$

$$\frac{250 \cdot (48 - 30)}{18} = \frac{250 \cdot 18}{18} = 250$$

$$\frac{3}{5}x = \frac{3}{5} \cdot 250 = 150$$

La distancia entre A y B es de 150 km y la distancia entre B y C es de 250 km.

96. a) Un número narcisista es aquel que es igual a la suma de cada uno de sus dígitos elevados a la "n" potencia (donde "n" es el número de cifras del número). Por ejemplo, el 153 es un número narcisista puesto que $1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$.

b) Hay cuatro números narcisistas de 3 cifras: 153, 370, 371 y 407.

c) Hay tres números narcisistas de 4 cifras: 1634, 8208 y 9474.

97. Tenemos que:

$$P = 2 \cdot \log_5 10 + 2 \cdot \log_5 3$$

$$P = \log_5 10^2 + \log_5 3^2$$

$$P = \log_5 100 + \log_5 9$$

$$P = \log_5 (100 \cdot 9)$$

$$P = \log_5 (900)$$

$$P = \frac{\log 900}{\log 5} \simeq \frac{2{,}954}{0{,}699} = 4{,}226$$

Por tanto, el perímetro del rectángulo es 4,226 dm.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

1. a) El área del terreno original es $8 \cdot 6 = 48$ m^2.

b) La nueva longitud mide $8 \cdot 0{,}85 = 6{,}8$ m^2.

c) Su nueva anchura mide $6 \cdot 1{,}15 = 6{,}9$ m.

d) El terreno tiene ahora un área de $6{,}8 \cdot 6{,}9 = 46{,}92$ m^2.

e) La variación fue de $\frac{46{,}92}{48} = 0{,}9775$. Por tanto, el área del terreno disminuyó 2,25 %.

2. a) El interés simple obtenido es $15\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 2 = 1\,800$ €.

b) Juanjo tenía $15\,000 + 1\,800 = 16\,800$ €.

c) Juanjo se quedó con $16\,800 \cdot (1 + 0{,}05)^3 = 16\,800 \cdot 1{,}05^3 = 19\,448$ €.

d) El precio del coche sin IVA es $19\,448 \cdot 0{,}25 = 4\,862$ €.

e) El precio del coche con descuento es $4862 \cdot 0{,}9 = 4376$ €.

f) Juanjo pagó $4\,376 \cdot 1{,}21 = 5\,295$ € por el coche.

3. a) El volumen del acuario es $55 \cdot 30 \cdot 25 = 41\,250$ cm^3.

b) El volumen de agua del acuario es $41\,250 \cdot 0{,}6 = 24\,750$ cm^3.

c) En ese momento, el acuario tiene $24\,750 \cdot 1{,}2 = 29\,700$ cm^3 de agua.

d) Tenemos que $29\,700$ cm^3 = 29,7 dm^3 = 29,7 L.

e) La altura de agua en el acuario mide

$$\frac{29\,700}{55 \cdot 25} = \frac{29\,700}{1375} = 21{,}6\,\text{cm}$$

4. a) Tenemos que $\text{pH} = -\log\left(3 \cdot 10^{-3}\right) = 2{,}523$.

b) Es una disolución ácida pues su pH es menor que 7. Se llama ácido clorhídrico.

c) Tenemos que:

$$\text{pH} + \text{pOH} = 14 \rightarrow \text{pOH} = 14 - \text{pH} \rightarrow \text{pOH} =$$

$$= 14 - 2{,}523 = 11{,}477$$

d) Tenemos que:

$$\text{pOH} = -\log\left(\text{OH}^-\right) = 11{,}477 \rightarrow \log\left(\text{OH}^-\right) =$$

$$= -11{,}477 \rightarrow \text{OH}^- = 10^{-11{,}477} \rightarrow \text{OH}^- = 3{,}334 \cdot 10^{-12}\,\text{M}$$

e) Tenemos que:

$$\text{pH} + \text{pOH} = 14$$

$$-\log\left(\text{H}^+\right) - \log\left(\text{OH}^-\right) = 14$$

$$-\left[\log\left(\text{H}^+\right) + \log\left(\text{OH}^-\right)\right] = 14$$

$$-\log\left(\text{H}^+ \cdot \text{OH}^-\right) = 14 \rightarrow \log\left(\text{H}^+ \cdot \text{OH}^-\right) = -14$$

5. a) Por el teorema de Pitágoras, llamando x la altura del triángulo:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + x^2$$

$$4 \cdot 2 = 5 + x^2$$

$$x^2 = 8 - 5$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3}$$

Por tanto, la altura del triángulo es $\sqrt{3}$.

b) La base mide $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ dm.

c) Por el teorema de Pitágoras, llamando h a ese lado del triángulo:

$$h^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{5}\right)^2$$

$$h^2 = 3 + 9 \cdot 5$$

$$h^2 = 48$$

$$h = \sqrt{48}$$

$$h = 4\sqrt{3}\,\text{dm}$$

d) El perímetro del triángulo es:

$$2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{5} \simeq 18{,}7\,\text{dm} = 187\,\text{cm}$$

e) El triángulo tiene $\frac{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{5 \cdot 3} = 2\sqrt{15}\,\text{dm}^2$.