

4

Operaciones con polinomios



1. Operaciones con polinomios

PIENSA Y CALCULA

Desarrolla mentalmente:

a) $(x + 1)^2$

b) $(x - 1)^2$

c) $(x + 1)(x - 1)$

Solución:

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 - 2x + 1$

c) $x^2 - 1$

APLICA LA TEORÍA

1 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 4x^3 - 5x + 7$$

$$Q(x) = -9x^4 + 2x^3 + 3x - 8$$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $-9x^4 + 6x^3 - 2x - 1$

b) $9x^4 + 2x^3 - 8x + 15$

2 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7x^2 - 1$$

$$Q(x) = 3x^4 - 4x^2 + 6x - 9$$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $2x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 6x - 10$

b) $2x^5 - 8x^4 + 11x^2 - 6x + 8$

3 Dado el polinomio siguiente:

$$P(x) = -7x^5 + 6x^4 - 5x^2 + 3$$

a) Halla su opuesto: $-P(x)$

b) Suma $P(x)$ con $-P(x)$. ¿Qué polinomio se obtiene?

Solución:

a) $-P(x) = 7x^5 - 6x^4 + 5x^2 - 3$

b) $P(x) + [-P(x)] = 0$

Se obtiene el polinomio cero.

4 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 - 5x + 3$$

$$Q(x) = 4x + 2$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$4x^3 - 18x^2 + 2x + 6$$

$$\text{gr}(P(x) \cdot Q(x)) = 2 + 1 = 3$$

5 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x + 2$$

$$Q(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$3x^6 - 13x^5 + 13x^4 - 24x^3 + 34x^2 - 15x + 2$$

$$\text{gr}(P(x) \cdot Q(x)) = 4 + 2 = 6$$

6 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$$

$$Q(x) = -3x^2 + 2x - 1$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$-6x^5 + 19x^4 - 12x^3 + 14x^2 - 6x + 3$$

$$\text{gr}(P(x) \cdot Q(x)) = 2 + 1 = 3$$

7 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 - x - 1$$

$$Q(x) = x - 1$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$x^3 - 2x^2 + 1$$

$$\text{gr}(P(x) \cdot Q(x)) = 2 + 1 = 3$$

8 Desarrolla mentalmente:

a) $(x + 3)^2$

b) $(x + 5)(x - 5)$

c) $(x - 4)^2$

d) $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

Solución:

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $x^2 - 25$

c) $x^2 - 8x + 16$

d) $x^2 - 2$

9 Desarrolla y simplifica:

a) $(2x - 1/2)^2$

b) $(x/5 + 1)(x/5 - 1)$

c) $(3x + 2/3)^2$

d) $(2x + 3/4)(2x - 3/4)$

Solución:

a) $4x^2 - 2x + 1/4$

b) $x^2/25 - 1$

c) $9x^2 + 4x + 4/9$

d) $4x^2 - 9/16$

2. Teorema del resto y del factor

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el valor del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 9$ para los valores siguientes:

a) $x = 0$

b) $x = 1$

Solución:

a) $P(0) = 9$

b) $P(1) = 11$

APLICA LA TEORÍA

10 Calcula $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^2 + 8$$

$$Q(x) = x^2 - 2x - 1$$

Solución:

$$C(x) = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 20$$

$$R(x) = 48x + 28$$

11 Halla $P(x) : Q(x)$ por Ruffini, siendo:

$$P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3x - 1$$

$$Q(x) = x + 3$$

Solución:

$$C(x) = 2x^2 - 3$$

$$R(x) = 8$$

- 12** Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 4$$

- a) Para $x = 2$ b) Para $x = -2$

Solución:

- a) $P(2) = -2$
b) $P(-2) = 26$

- 13** ¿Cuál de estos números: 2 o -2 es raíz del polinomio $P(x) = 3x^3 - 6x^2 + 12x - 24$?

Solución:

- $P(2) = 0 \Rightarrow x = 2$ es raíz de $P(x)$
 $P(-2) = -96 \neq 0 \Rightarrow x = -2$ no es raíz de $P(x)$

- 14** Halla, sin hacer la división, el resto de dividir:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5 \text{ entre } x - 3$$

Solución:

$$\text{Resto} = P(3) = 23$$

- 15** Comprueba mentalmente, y sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ es divisible entre $x - 1$

Solución:

$$\text{Resto} = P(1) = 0$$

- 16** Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 5

$$(x^4 + kx^2 - 6x + 2) : (x + 1)$$

Solución:

Por el teorema del resto:

$$P(-1) = 5 \Rightarrow k + 9 = 5 \Rightarrow k = -4$$

- 17** Halla el valor de k para que el polinomio

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + kx + 8$$

sea divisible entre $x - 2$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 2k - 4 = 0 \Rightarrow k = 2$$

3. Factorización de polinomios

PIENSA Y CALCULA

Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^2 + 2x$ b) $x^2 + 6x + 9$ c) $x^2 - 4x + 4$ d) $x^2 - 4$

Solución:

- | | | | |
|-----------------|----------------|----------------|---------------------|
| a) $x(x + 2)$ | b) $(x + 3)^2$ | c) $(x - 2)^2$ | d) $(x + 2)(x - 2)$ |
| Raíces: | Raíces: | Raíces: | Raíces: |
| $x = 0, x = -2$ | $x = -3$ | $x = 2$ | $x = -2, x = 2$ |

APLICA LA TEORÍA

- 18** Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

- a) $x^2 + 5x$ b) $x^2 - 9$
c) $x^2 + 2x + 1$ d) $x^2 - 6x + 9$

Solución:

- a) $x(x + 5)$ b) $(x + 3)(x - 3)$
c) $(x + 2)^2$ d) $(x - 3)^2$

- 19** Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^3 - 4x$ b) $x^3 - 2x^2 + x$
c) $x^4 - 25x^2$ d) $x^3 + 6x^2 + 9x$

Solución:

a) $x(x + 2)(x - 2)$

Las raíces son: $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$

b) $x(x - 1)^2$

Las raíces son: $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$

c) $x^2(x + 5)(x - 5)$

Las raíces son: $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 5$

d) $x(x + 3)^2$

Las raíces son: $x_1 = 0, x_2 = x_3 = -3$

20 Factoriza los siguientes polinomios y calcula sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

c) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

d) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$

Solución:

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$

b) $(x - 1)^2(x - 3)$

$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 3$

c) $(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)$

$x_1 = -1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$

d) $(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$

$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5$

21 Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = -1, x_2 = 3$

b) $x_1 = 2, x_2 = 0$

c) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$

d) $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$

Solución:

a) $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$

b) $x(x - 2) = x^2 - 2x$

c) $(x + 2)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x(x - 2)^2(x + 3) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x$

22 Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$Q(x) = x^2 - x$

b) $P(x) = x^2 - 4$

$Q(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

c) $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$

$Q(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$

d) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Solución:

a) $P(x) = (x - 1)^2(x - 2)$

$Q(x) = x(x - 1)$

M.C.D.(P(x), Q(x)) = $x - 1$

m.c.m.(P(x), Q(x)) = $x(x - 1)^2(x - 2)$

b) $P(x) = (x - 2)(x + 2)$

$Q(x) = (x + 2)^2(x - 3)$

M.C.D.(P(x), Q(x)) = $x + 2$

m.c.m.(P(x), Q(x)) = $(x - 2)(x + 2)^2(x - 3)$

c) $P(x) = x^2(x + 1)(x - 2)$

$Q(x) = x(x + 1)^2(x - 3)$

M.C.D.(P(x), Q(x)) = $x(x + 1)$

m.c.m.(P(x), Q(x)) = $x^2(x + 1)^2(x - 2)(x - 3)$

d) $P(x) = (x - 2)^2(x + 3)$

$Q(x) = (x - 2)^2(x - 1)$

M.C.D.(P(x), Q(x)) = $(x - 2)^2$

m.c.m.(P(x), Q(x)) = $(x - 2)^2(x - 1)(x + 3)$

Ejercicios y problemas

1. Operaciones con polinomios

23 Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 5x^3 - 7x + 2$$

$$Q(x) = 8x^4 - 3x^3 + 6x - 4$$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $8x^4 + 2x^3 - x - 2$

b) $-8x^4 + 8x^3 - 13x + 6$

24 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x + 6$$

$$Q(x) = x^2 - 4x + 7$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$2x^6 - 13x^5 + 34x^4 - 38x^3 + 18x^2 - 45x + 42$$

$$\text{gr}(P(x) \cdot Q(x)) = 4 + 2 = 6$$

25 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 7$$

$$Q(x) = -2x^2 + 3x - 6$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$-2x^5 + 11x^4 - 18x^3 + 38x^2 - 21x + 42$$

$$\text{gr}(P(x) \cdot Q(x)) = 3 + 2 = 5$$

26 Desarrolla y simplifica:

a) $(3x - 1/3)^2$

b) $(x + 1/4)(x - 1/4)$

c) $(2x + 3/2)^2$

d) $(3x + 2/3)(3x - 2/3)$

Solución:

a) $9x^2 - 2x + 1/9$

b) $x^2 - 1/16$

c) $4x^2 + 6x + 9/4$

d) $9x^2 - 4/9$

2. Teorema del resto y del factor

27 Calcula $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 20x - 25$$

$$Q(x) = 2x^3 - 4x + 1$$

Solución:

$$C(x) = 2x^2 + x - 2$$

$$R(x) = 12x^2 + 11x - 23$$

28 Calcula $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$P(x) = 2x^7 + x^6 - 8x^5 - 3x^4 + x^2 + 4$$

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

Solución:

$$C(x) = 2x^4 + 5x^3 - 6x - 7$$

$$R(x) = -7x^2 + x - 3$$

29 Calcula $P(x) : Q(x)$ por Ruffini, siendo:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 2x - 6$$

$$Q(x) = x - 3$$

Solución:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 25$$

$$R(x) = -81$$

30 Halla $P(x) : Q(x)$ por Ruffini, siendo:

$$P(x) = x^5 - 8x^3 + 2x - 4$$

$$Q(x) = x + 2$$

Solución:

$$C(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x - 14$$

$$R(x) = 24$$

31 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio, para los valores que se indican:

$$P(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

a) Para $x = 2$

b) Para $x = -2$

Solución:

a) $P(2) = 29$

b) $P(-2) = -3$

32 Halla si los valores 5 y 3 son raíces del siguiente polinomio:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

Solución:

$$P(5) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ es raíz de } P(x)$$

$$P(3) = -24 \neq 0 \Rightarrow x = 3 \text{ no es raíz de } P(x)$$

33 Halla, sin hacer la división, el resto de dividir

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x + 5 \text{ entre } x + 3$$

Solución:

Por el teorema del resto:

$$\text{Resto} = P(-3) = 44$$

- 34** Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea -3

$$(x^4 + kx^3 - kx + 5) : (x - 2)$$

Solución:

Por el teorema del resto:

$$P(2) = -3 \Rightarrow 6k + 21 = -3 \Rightarrow k = -4$$

- 35** Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x + 21$ es divisible entre $x + 3$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$\text{Resto} = P(-3) = 0$$

- 36** Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - kx^2 + x - 6$ sea divisible entre $x + 2$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow -4k - 24 = 0 \Rightarrow k = -6$$

3. Factorización de polinomios

- 37** Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

- a) $x^2 - 25$ b) $x^2 - 8x + 16$
c) $x^4 - 2x^2 + 1$ d) $x^2 + 10x + 25$

Solución:

- a) $(x - 5)(x + 5)$
b) $(x - 4)^2$
c) $(x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2(x - 1)^2$
d) $(x + 5)^2$

- 38** Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $16x^3 - 4x$ b) $x^4 + 2x^3 + x^2$
c) $2x^4 - 18x^2$ d) $2x^3 + 12x^2 + 18x$

Solución:

a) $4x(4x^2 - 1) = 4x(2x + 1)(2x - 1)$

Las raíces son:

$$x_1 = 0, x_2 = -1/2, x_3 = 1/2$$

b) $x^2(x + 1)^2$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = -1$$

c) $2x^2(x + 3)(x - 3)$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = -3, x_4 = 3$$

d) $2x(x + 3)^2$

Las raíces son:

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = -3$$

- 39** Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^3 - x^2 - 5x - 3$
b) $x^3 - 2x^2 - 3x$
c) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$
d) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2$

Solución:

a) $(x - 3)(x + 1)^2$

Las raíces son:

$$x_1 = 3, x_2 = x_3 = -1$$

b) $x(x + 1)(x - 3)$

Las raíces son:

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 3$$

c) $(x - 1)(x - 2)^2(x + 3)$

Las raíces son:

$$x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$$

d) $x^2(x - 1)^2(x - 2)$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = 1, x_5 = 2$$

- 40** Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:

- a) $x_1 = 2, x_2 = -3$
b) $x_1 = -2, x_2 = 1$
c) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$
d) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 2$

Solución:

a) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

b) $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

c) $(x + 1)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

d) $x(x - 1)(x - 2)^2 = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$

Ejercicios y problemas

41 Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 4x$

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

b) $P(x) = x^2 + 2x - 3$

$Q(x) = x^2 - 3x + 2$

c) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Solución:

a) $P(x) = x(x - 2)^2$

$Q(x) = x(x + 2)(x - 2)$

M.C.D.($P(x)$, $Q(x)$) = $x(x - 2)$

m.c.m. ($P(x)$, $Q(x)$) = $x(x - 2)^2(x + 2)$

b) $P(x) = (x - 1)(x + 3)$

$Q(x) = (x - 1)(x - 2)$

M.C.D.($P(x)$, $Q(x)$) = $x - 1$

m.c.m. ($P(x)$, $Q(x)$) = $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

c) $P(x) = x^2(x - 1)(x - 3)$

$Q(x) = x(x - 1)^2$

M.C.D.($P(x)$, $Q(x)$) = $x(x - 1)$

m.c.m. ($P(x)$, $Q(x)$) = $x^2(x - 1)^2(x - 3)$

d) $P(x) = (x - 1)^2(x - 2)$

$Q(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

M.C.D.($P(x)$, $Q(x)$) = $(x - 1)(x - 2)$

m.c.m. ($P(x)$, $Q(x)$) = $(x - 1)^2(x - 2)^2$

Para ampliar

42 Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 3x^3 - 2x + 7$

$Q(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 2$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $x^4 - 2x^3 + x + 5$

b) $-x^4 + 8x^3 - 5x + 9$

43 Multiplica los siguientes polinomios:

$P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x + 7$

$Q(x) = 3x^2 - 2x + 5$

Halla el grado del producto.

Solución:

$3x^6 + 10x^5 - 3x^4 + 14x^3 + 25x^2 - 24x + 35$

$gr(P(x) \cdot Q(x)) = 4 + 2 = 6$

44 Multiplica los siguientes polinomios:

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$

$Q(x) = -3x^2 + 5x - 7$

Halla el grado del producto.

Solución:

$-12x^5 + 29x^4 - 43x^3 + 24x^2 - 5x + 7$

$gr(P(x) \cdot Q(x)) = 3 + 2 = 5$

45 Desarrolla y simplifica:

a) $(5x - 1/5)^2$

b) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$

c) $(4x + 1/4)^2$

d) $(6x + 1/6)(6x - 1/6)$

Solución:

a) $25x^2 - 10x + 1/25$

b) $x^2 - 5$

c) $16x^2 + 2x + 1/16$

d) $36x^2 - 1/36$

46 Halla un polinomio que al ser dividido entre:

$x^3 - 4x + 2$

se obtenga de cociente

$x^2 + 2x - 3$

y de resto

$5x + 4$

Solución:

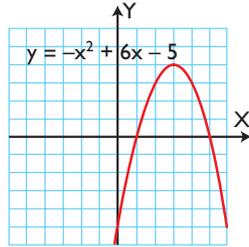
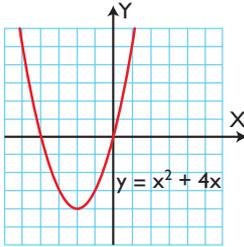
$$(x^3 - 4x + 2)(x^2 + 2x - 3) + 5x + 4 =$$

$$= x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 21x - 2$$

- 47** Observando las gráficas siguientes, halla las raíces de los polinomios:

$$P(x) = x^2 + 4x$$

$$Q(x) = -x^2 + 6x - 5$$

**Solución:**

Las raíces de $P(x)$ son: $x_1 = -4, x_2 = 0$

Las raíces de $Q(x)$ son: $x_1 = 1, x_2 = 5$

- 48** Halla el valor de k para que el polinomio

$$P(x) = x^4 + 2x^2 + kx + 3$$

sea divisible por $x + 3$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-3) = 0 \Rightarrow 102 - 3k = 0 \Rightarrow k = 34$$

- 49** Halla el valor de k para que el resto de la división del polinomio

$$P(x) = 2x^3 - x + k$$

entre $x - 2$ sea 3

Solución:

Por el teorema del resto:

$$\text{Resto} = P(2) = 3 \Rightarrow k + 14 = 3 \Rightarrow k = -11$$

- 50** Di si son exactas las siguientes divisiones sin hacer la división:

a) $(x^4 - 1) : (x + 1)$

b) $(x^5 - 32) : (x + 2)$

Solución:

a) Resto = $(-1)^4 - 1 = 0 \Rightarrow$ Es exacta.

b) Resto = $(-2)^5 - 32 = -64 \Rightarrow$ No es exacta.

Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

51 $x^4 - 2x^3 - x + 2$

Solución:

$$(x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)$$

Las raíces reales son:

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

52 $x^4 - 2x^2 + 1$

Solución:

$$(x + 1)^2(x - 1)^2$$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = -1, x_3 = x_4 = 1$$

53 $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$

Solución:

$$(x - 2)(x + 3)(x^2 + 2x - 1)$$

Las raíces reales son:

$$x_1 = 2, x_2 = -3$$

54 $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Solución:

$$(x - 1)(x + 2)(x - 4)$$

Las raíces son:

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 4$$

55 $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

Solución:

$$(x - 1)^2(x + 2)(x - 3)$$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 3$$

56 $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

Solución:

$$(x + 2)(x - 1)^3$$

Las raíces son:

$$x_1 = -2, x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

Problemas

- 57** Calcula los valores de m y n para que el polinomio:

$$P(x) = x^4 + x^3 + mx^2 - 3x + n$$

sea divisible por $x + 1$ y $x - 2$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-1) = 0 \Rightarrow m + n + 3 = 0$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow 4m + n + 18 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$m = -5, n = 2$$

- 58** Calcula los valores de m y n para que el polinomio:

$$P(x) = x^4 + mx^3 + 2x^2 + nx - 24$$

sea divisible por $x + 2$ y $x - 3$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow -8m - 2n = 0$$

$$P(3) = 0 \Rightarrow 27m + 3n + 75 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$m = -5, n = 20$$

- 59** Escribe un polinomio cuyas raíces sean los valores $2, -1, 5$

Solución:

$$(x - 2)(x + 1)(x - 5) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$$

- 60** Escribe dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tales que:

$$\text{M.C.D.}(P(x), Q(x)) = x - 2$$

Solución:

$$P(x) = x - 2$$

$$Q(x) = x(x - 2)$$

- 61** Escribe dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tales que:

$$\text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) = x(x^2 - 1)(x - 2)$$

Solución:

$$P(x) = x(x^2 - 1)$$

$$Q(x) = x - 2$$

- 62** Escribe en forma de polinomio en una variable cada uno de los enunciados siguientes:

- El cubo de un número menos el cuadrado del número, más 4 unidades.
- El área de un rectángulo cuya base mide 5 unidades más que la altura x
- El área de un triángulo cuya altura mide 2 unidades menos que la base x

Solución:

$$a) P(x) = x^3 - x^2 + 4$$

$$b) A(x) = x(x + 5) = x^2 + 5x$$

$$c) A(x) = \frac{x(x - 2)}{2} = \frac{x^2 - 2x}{2}$$

- 63** Dos números suman 8 unidades. Escribe el polinomio que expresa el producto de dichos números en función del número menor x

Solución:

$$P(x) = x(8 - x) = 8x - x^2$$

- 64** Dados dos números enteros consecutivos, escribe el polinomio que expresa en función del número menor x :

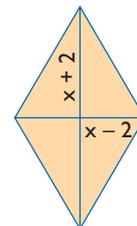
- la suma de los números.
- el producto de los números.

Solución:

$$a) S(x) = x + x + 1 = 2x + 1$$

$$b) P(x) = x(x + 1) = x^2 + x$$

- 65** Dado el rombo siguiente, halla su área en función de x

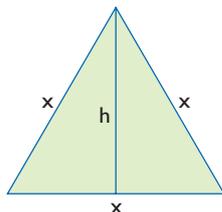


Solución:

$$A(x) = \frac{x^2 - 4}{2} = \frac{x^2}{2} - 2$$

Para profundizar

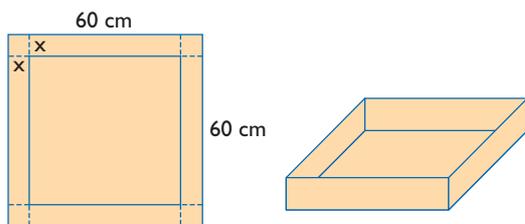
- 66** Escribe el polinomio que da el área de un triángulo equilátero en función del lado x



Solución:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$$

- 67** En una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se recorta un cuadrado de lado x en las esquinas, para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de x

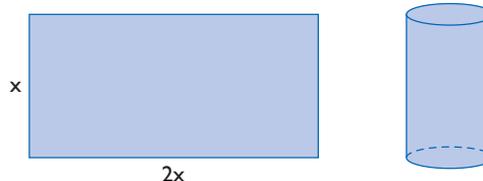


Solución:

$$V(x) = (60 - 2x)^2 x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

- 68** Con una cartulina como la de la figura, se construye un cilindro sin tapas. Escribe:

- a) el área lateral del cilindro en función de x
 b) el volumen del cilindro en función de x

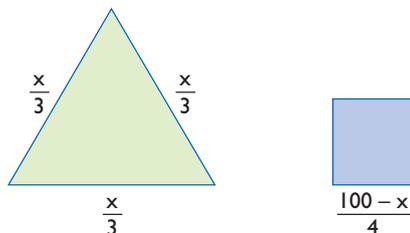


Solución:

a) $A(x) = x \cdot 2x = 2x^2$

b) $V(x) = \pi \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 x = \frac{x^3}{\pi}$

- 69** Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos trozos, y se forman el triángulo equilátero y el cuadrado siguientes.



Escribe el polinomio que expresa la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función de x

Solución:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{(100-x)^2}{4}$$

Aplica tus competencias

70 Halla el polinomio que define un movimiento uniformemente acelerado en el que:

$$a = 4 \text{ m/s}^2, v_0 = 5 \text{ m/s y } e_0 = 2 \text{ m}$$

Solución:

$$e(t) = \frac{1}{2} \cdot 4t^2 + 5t + 2$$

$$e(t) = 2t^2 + 5t + 2$$

71 Halla el monomio que define el movimiento de un cuerpo que se deja caer en el vacío en el que:

$$a = 9,8 \text{ m/s}^2, v_0 = 0 \text{ m/s y } e_0 = 0 \text{ m}$$

Solución:

$$e(t) = \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2$$

$$e(t) = 4,9t^2$$

Comprueba lo que sabes

1 Enuncia el teorema del resto y pon un ejemplo.

Solución:

El **resto** que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ entre el binomio $x - a$ es el valor numérico del polinomio para $x = a$

$$R = P(a)$$

Ejemplo

Halla el resto de la siguiente división:

$$P(x) = x^3 - 5x + 17 \text{ entre } x + 3$$

$$\begin{aligned} \text{Resto} &= P(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3) + 17 = \\ &= -27 + 15 + 17 = 5 \end{aligned}$$

2 Dados los polinomios:

$$P(x) = 5x^3 - 7x^2 - 1 \quad Q(x) = -9x^3 + 2x - 6$$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $-4x^3 - 7x^2 + 2x - 7$

b) $14x^3 - 7x^2 - 2x + 5$

3 Multiplica los siguientes polinomios:

$$P(x) = 7x^3 - 2x^2 - 3$$

$$Q(x) = -x^2 + 4x - 5$$

Halla el grado del producto.

Solución:

$$-7x^5 + 30x^4 - 43x^3 + 13x^2 - 12x + 15$$

$$\text{gr}(P(x) \cdot Q(x)) = 3 + 2 = 5$$

4 Desarrolla y simplifica:

a) $(2x + 1/2)^2$ b) $(3x + 1/3)(3x - 1/3)$

Solución:

a) $4x^2 + 2x + 1/4$

b) $9x^2 - 1/9$

5 Factoriza el siguiente polinomio y halla sus raíces: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Solución:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$$

Raíces: $x = -1$; $x = 2$

6 Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los polinomios siguientes:

$$P(x) = x^3 - 4x, \quad Q(x) = x^3 + 2x^2$$

Solución:

$$P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$$

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)$$

$$\text{M.C.D.}(P(x), Q(x)) = x(x + 2)$$

$$\text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 2)(x - 2)$$

7 Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 6$ sea divisible por $(x + 2)$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-2) = 0$$

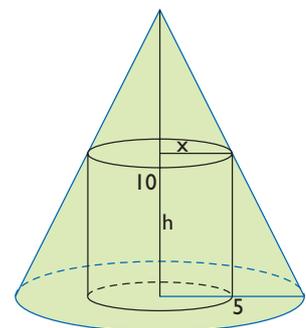
$$(-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2)k + 6 = 0$$

$$-8 - 12 - 2k + 6 = 0$$

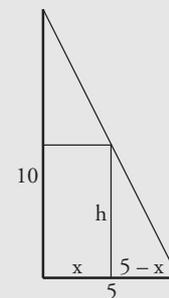
$$-14 - 2k = 0$$

$$k = -7$$

8 Dado el cilindro inscrito en el cono de la figura siguiente, halla el polinomio que expresa el volumen del cilindro en función del radio x



Solución:



Se tiene:

$$\frac{10}{5} = \frac{h}{5-x} \Rightarrow h = 2(5-x)$$

El volumen es:

$$V(x) = \pi x^2 \cdot 2(5-x) = 10\pi x^2 - 2\pi x^3$$

Paso a paso**72** Desarrolla el binomio:

$$\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

73 Multiplica los polinomios:

$$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5$$

$$Q(x) = 2x^2 - x + 6$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

74 Divide

$$P(x) = 6x^4 + 5x^2 + 17x + 15$$

entre

$$Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

75 Halla el valor numérico del polinomio

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 9$$

para $x = 2$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

76 Factoriza:

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

77 Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 3

$$(x^3 + kx - 10) : (x - 2)$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

78 **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.****Practica****79** Dados los polinomios:

$$P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x + 4$$

$$Q(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 1$$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Solución:

a) $7x^4 + x^3 - 7x^2 + 7x + 3$

b) $3x^4 - x^3 + x^2 + 7x + 5$

80 Multiplica los polinomios:

$$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5$$

$$Q(x) = 2x^2 - x + 6$$

Solución:

$$6x^5 - 11x^4 + 22x^3 - 14x^2 - 5x + 30$$

81 Multiplica los polinomios:

$$P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 7$$

$$Q(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Solución:

$$15x^5 - 11x^4 - 7x^3 - 18x^2 + 28x - 7$$

82 Desarrolla y simplifica:

a) $(2x - 1/2)^2$

b) $(x/5 + 1)(x/5 - 1)$

Solución:

- a) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$
 b) $\frac{x^2}{25} - 1$

83 Desarrolla y simplifica:

- a) $(3x + 2/3)^2$
 b) $(2x + 3/4)(2x - 3/4)$

Solución:

- a) $9x^2 + 4x + \frac{4}{9}$
 b) $4x^2 - \frac{9}{16}$

84 Calcula $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^2 + 8$$

$$Q(x) = x^2 - 2x - 1$$

Solución:

$$C(x) = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 20$$

$$R(x) = 48x + 28$$

85 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 4$$

a) Para $x = 2$
 b) Para $x = -2$

Solución:

- a) $P(2) = -2$
 b) $P(-2) = 26$

86 Factoriza los siguientes polinomios:

- a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
 b) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

Solución:

- a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
 b) $(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)$

87 Halla las raíces de los siguientes polinomios:

- a) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
 b) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$

Solución:

- a) $(x - 1)^2(x - 3)$
 $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 3$
 b) $(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$
 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

88 Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 5

$$(x^4 + kx^2 - 6x + 2) : (x + 1)$$

Solución:

$$P(-1) = 5$$

$$k = -4$$

89 Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + kx + 8$ sea divisible entre $x - 2$ **Solución:**

$$P(2) = 0$$

$$k = 2$$