PÁGINA 116

PRACTICA

Funciones lineales

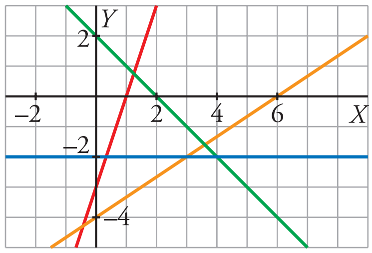
1 **Asocia a cada función su ecuación. Di, en cada caso, cuál es su pendiente.**

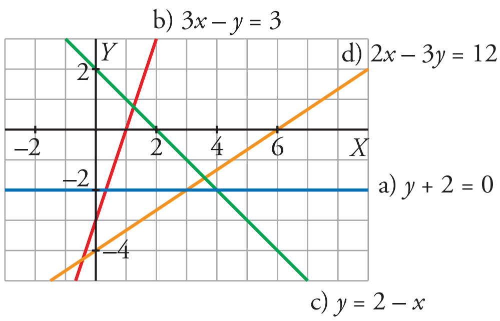
a) $y + 2 = 0$

b) $3x - y = 3$

c) $y = 2 - x$

d) $2x - 3y = 12$





Pendientes:

a) $m = 0$

b) $m = 3$

c) $m = -1$

d) $m = 2/3$

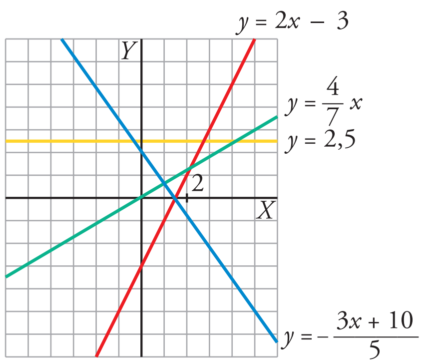
2 **Representa las siguientes funciones lineales:**

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{4}{7}x$

c) $y = \frac{-3x + 10}{5}$

d) $y = 2{,}5$



3 **Resuelto en el libro de texto.**

4 **Halla, en cada caso, la ecuación de las rectas que pasan por los puntos A y B.**

a) $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ **b)** $A(-2, -4)$, $B(2, -3)$

c) $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ **d)** $A(0, -5)$, $B(-3, 1)$

a) $y = 0$

b) $m = \dfrac{-3+4}{2+2} = \dfrac{1}{4}$; $y + 4 = \dfrac{1}{4}(x+2) \rightarrow y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{2}$

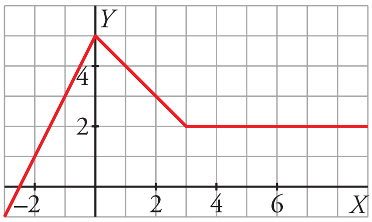
c) $m = \dfrac{3}{3} = 1$; $y + 3 = x \rightarrow y = x - 3$

d) $m = \dfrac{1+5}{-3} = -2$; $y + 5 = -2x \rightarrow y = -2x - 5$

5 **¿A cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica dibujada?**

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } -3 \le x \le -1 \\ x+5 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2x & \text{si } 3 \le x \le 8 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ 5-x & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2 & \text{si } 3 \le x \le 8 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -3 < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } 3 < x < 8 \end{cases}$$



Una de las otras dos funciones describe la pendiente de esta gráfica en cada punto. ¿Cuál es?

La gráfica corresponde a la función $g(x)$.

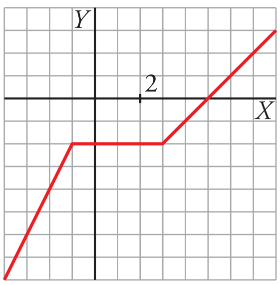
La función que describe la pendiente de la gráfica en cada punto es $h(x)$.

6 **Representa las siguientes funciones definidas a trozos:**

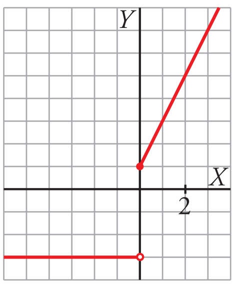
a) $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le -1 \\ -2 & \text{si } -1 < x \le 3 \\ x-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

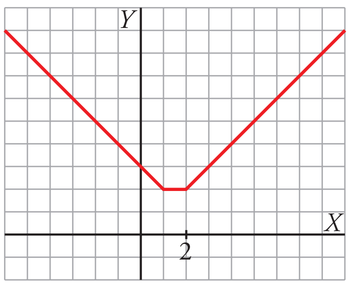
a)



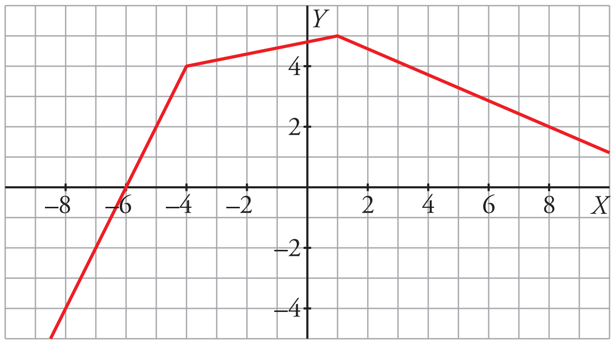
b)



c)



7 **Escribe la ecuación de la función que corresponde a esta gráfica:**



- El primer tramo pasa por (–6, 0) y (–4, 4):

$$m = \frac{4}{-4+6} = 2;\ \ y = 2(x+6) = 2x + 12$$

- El segundo tramo pasa por (–4, 4) y (1, 5):

$$m = \frac{5-4}{1+4} = \frac{1}{5};\ \ y - 4 = \frac{1}{5}(x+4) \ \to\ y = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$$

- El tercer tramo pasa por (1, 5) y (8, 2):

$$m = \frac{2-5}{8-1} = -\frac{3}{7};\ \ y - 5 = -\frac{3}{7}(x-1) \ \to\ y = -\frac{3}{7}x + \frac{38}{7}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 12 & \text{si } x < -4 \\ \dfrac{1}{5}x + \dfrac{24}{5} & \text{si } -4 \le x \le 1 \\ -\dfrac{3}{7}x + \dfrac{38}{7} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

PÁGINA 117

Funciones cuadráticas

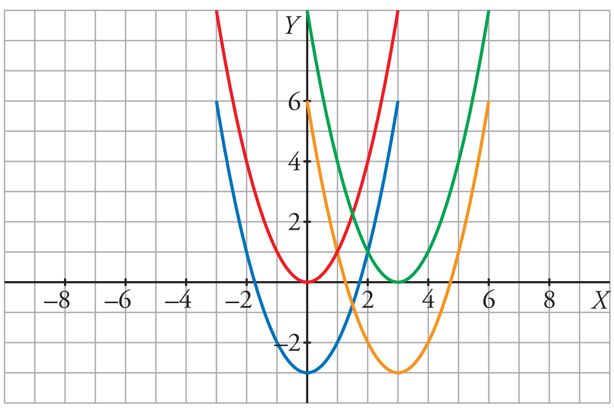
8 **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = (x-3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$



a) $y = x^2 \leftrightarrow$ roja

b) $y = (x-3)^2 \leftrightarrow$ verde

c) $y = x^2 - 3 \leftrightarrow$ azul

d) $y = x^2 - 6x + 6 \leftrightarrow$ amarilla

9 **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes.**

a) $y = (x + 4)^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$

d) $y = -x^2 + 5$

a) Vértice: $(-4, 0)$

Cortes con los ejes: $(-4, 0)$

Otros puntos$(-5, 1), (-6, 4), (-3, 1), (-2, 4)$

b) Vértice: $(-3, -3)$

Cortes con los ejes: $(-6, 0), (0, 0)$

Otros puntos: $\left(-5, -\frac{5}{3}\right), \left(-1, -\frac{5}{3}\right)$

c) Vértice: $(1, 0)$

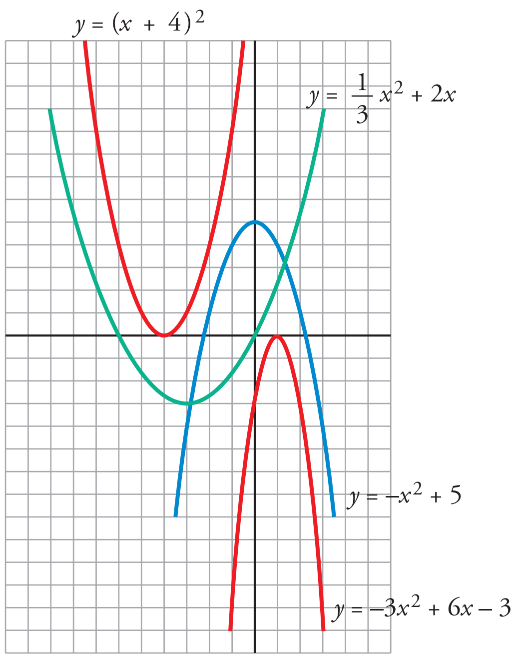
Cortes con los ejes: $(1, 0)$

Otros puntos: $(0, -3), (2, -3), (-1, -12), (3, -12)$

d) Vértice: $(0, 5)$

Cortes con los ejes: $(0, 5), (\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

Otros puntos: $(-1, 4), (-2, 1), (1, 4), (2, 1)$



10 **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o un mínimo.**

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = 3 - x^2$ **c)** $y = -2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 3x^2 - 6x$ **e)** $y = 5x^2 + 20x + 20$ **f)** $y = -\frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2}$

a) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \\ x = 0 \rightarrow y = -5 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (0, –5). Es un mínimo.

b) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0 \\ x = 0 \rightarrow y = 3 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (0, 3). Es un máximo.

c) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-4} = -1 \\ x = -1 \rightarrow y = 5 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (–1, 5). Es un máximo.

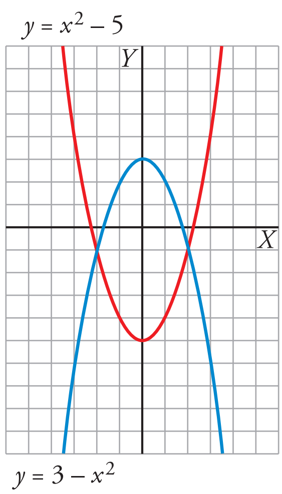
d) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1 \\ x = 1 \rightarrow y = -3 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (1, –3). Es un mínimo.

e) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{10} = -2 \\ x = -2 \rightarrow y = 0 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (–2, 0). Es un mínimo.

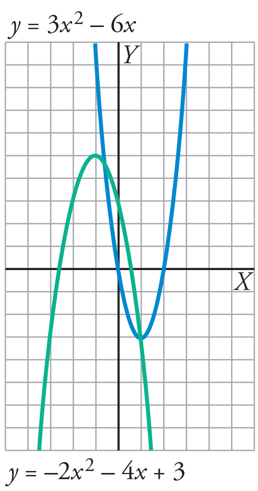
f) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-5} = 1 \\ x = 1 \rightarrow y = 1 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (1, 1). Es un máximo

11 **Representa las parábolas del ejercicio anterior.**

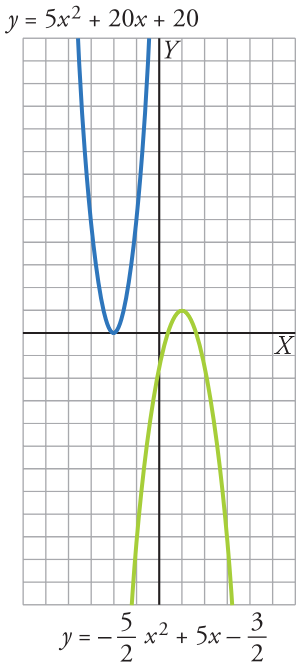
a) y b)



c) y d)



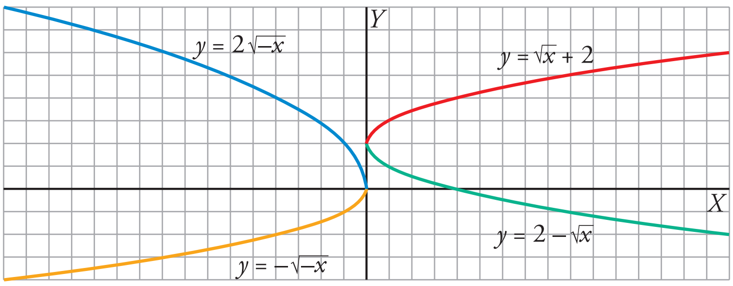
e) y f)



Otras funciones

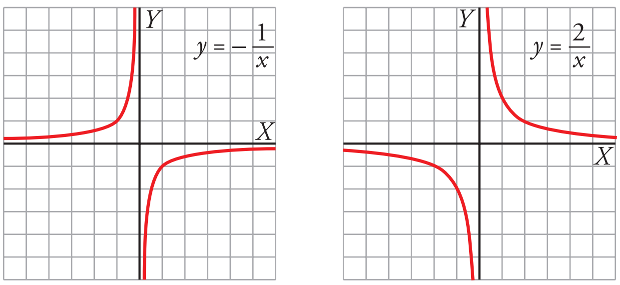
12 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

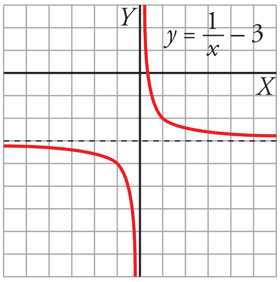
a) $y = \sqrt{x} + 2$ **b)** $y = 2 - \sqrt{x}$ **c)** $y = 2\sqrt{-x}$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$

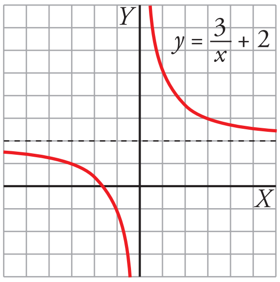


13 **Dibuja la gráfica de las funciones siguientes:**

a) $y = -\frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{2}{x}$ **c)** $y = \frac{1}{x} - 3$ **d)** $y = \frac{3}{x} + 2$







14 □□□ **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores. (Ayúdate de la calculadora).**

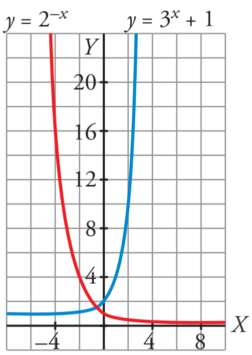
a) $y = 2^{-x}$ **b)** $y = 3^x + 1$ **c)** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$ **d)** $y = 0{,}75^{-x}$

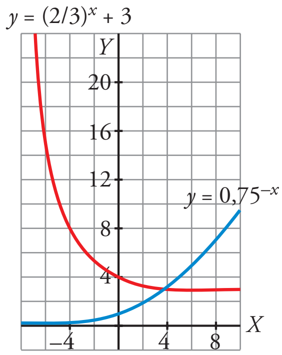
x	2^{-x}
–4	16
–2	4
0	1
2	0,25
4	0,06
6	0,16

x	$3^x + 1$
–4	1,01
–2	1,1
0	1
1	4
2	10
3	28

x	$(2/3)^x + 3$
–4	8,06
–2	5,25
0	4
2	3,4
4	3,2
6	3,1

x	$0{,}75^{-x}$
–4	0,32
–2	0,56
0	1
2	1,8
4	3,2
6	5,6



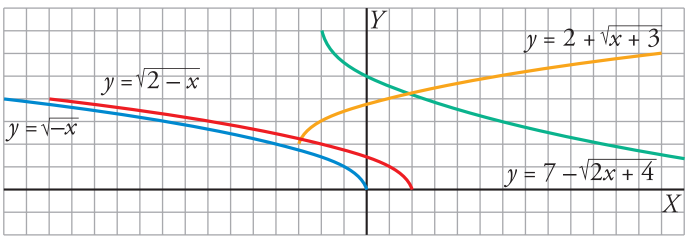


15 □□□ **Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \sqrt{2 - x}$ **b)** $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$ **c)** $y = \sqrt{-x}$ **d)** $y = 2 + \sqrt{x + 3}$

a) Dominio = $(-\infty, 2]$ b) Dominio = $[-2, +\infty)$

c) Dominio = $(-\infty, 0]$ d) Dominio = $[-3, +\infty)$

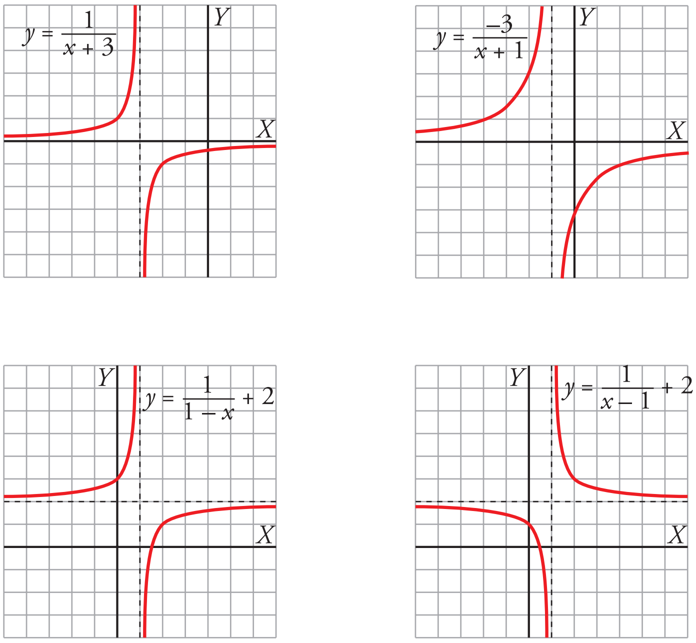


16 Resuelto en el libro de texto.

17 **Di cuál es el dominio de definición de las siguientes funciones y cuáles son sus asíntotas. Represéntalas gráficamente.**

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$ b) $y = -\dfrac{3}{x+1}$

c) $y = \dfrac{1}{1-x} + 2$ d) $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$



a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-3\}$
Asíntotas: $x = -3$, $y = 0$

b) Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$
Asíntotas: $x = -1$, $y = 0$

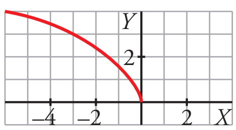
c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

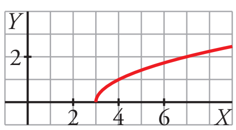
d) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

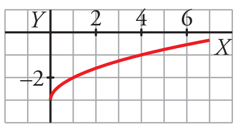
PÁGINA 118

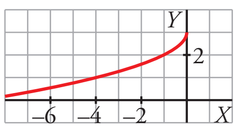
18 **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde:**

I) $y = \sqrt{x-3}$ **II)** $y = \sqrt{x} - 3$ **III)** $y = 3 - \sqrt{-x}$ **IV)** $y = \sqrt{-3x}$

a)


b)


c)


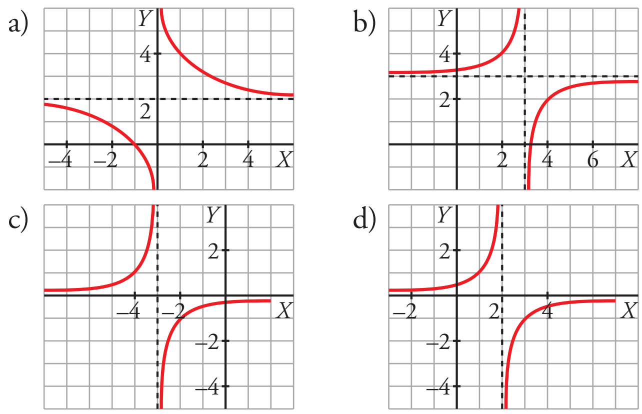
d)


I $\leftrightarrow$ b)
II $\leftrightarrow$ c)
III $\leftrightarrow$ d)
IV $\leftrightarrow$ a)

19 □□□ **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = \dfrac{1}{2 - x}$ **II)** $y = 3 - \dfrac{1}{x - 3}$

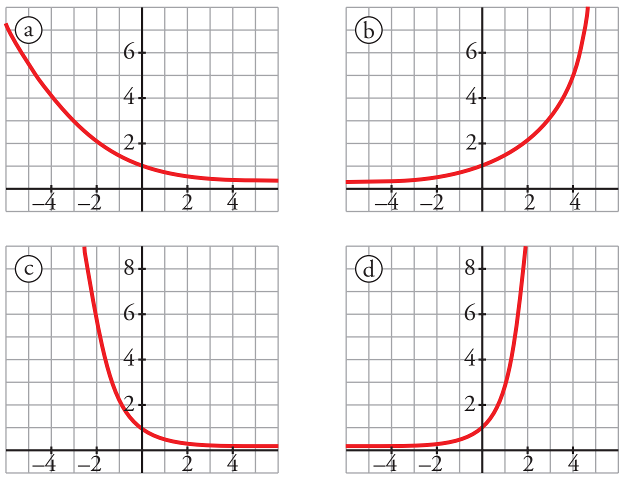
III) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ **IV)** $y = -\dfrac{1}{x + 3}$



I ↔ d) II ↔ b) III ↔ a) IV ↔ c)

20 □□□ **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1{,}5^x$ **III)** $y = 0{,}4^x$ **IV)** $y = 0{,}7^x$



Di, de cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I ↔ d) Creciente

II ↔ b) Creciente

III ↔ c) Decreciente

IV ↔ a) Decreciente

21 **a) Representa las funciones $y = 3^x$ e $y = \log_3 x$.**

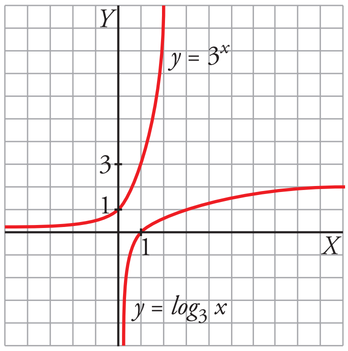
b) Comprueba si pertenecen a la gráfica de $y = \log_3 x$ los puntos siguientes:

$$(243, 5) \qquad \left(\frac{1}{27}, -3\right) \qquad (\sqrt{3}\,; 0{,}5) \qquad (-3, -1)$$

a) Una es la inversa de la otra.

x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$\log_3 x$	–2	–1	0	1	2



b) Se sabe que $y = \log_3 x \Leftrightarrow 3^y = x$. Luego:

$(243,5) \;\to\; 3^5 = 243 \;\to\; \log_3 243 = 5 \;\to\;$ Sí pertenece.

$\left(\frac{1}{27}, -3\right) \;\to\; 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \;\to\; \log_3 \frac{1}{27} = -3 \;\to\;$ Sí pertenece.

$(\sqrt{3}; 0{,}5) \;\to\; 3^{0{,}5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \;\to\; \log_3 \sqrt{3} = 0{,}5 \;\to\;$ Sí pertenece.

$(-3, -1) \;\to\; 3^{-1} = \frac{1}{3} \neq -3 \;\to\; (-3, -1)$ no pertenece a la gráfica de $y = \log_3 x$.

22 **Aplica la definición de logaritmo para hallar, sin calculadora:**

a) $\log_2 64$

b) $\log_2 16$

c) $\log_2 \frac{1}{4}$

d) $\log_2 \sqrt{2}$

e) $\log_3 81$

f) $\log_3 \frac{1}{3}$

g) $\log_3 \sqrt{3}$

h) $\log_4 16$

a) $\log_2 64 = x \;\to\; 2^x = 64 = 2^6 \;\to\; x = 6$

b) $\log_2 16 = x \;\to\; 2^x = 16 = 2^4 \;\to\; x = 4$

c) $\log_2 \frac{1}{4} = x \;\to\; 2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2} \;\to\; x = -2$

d) $\log_2 \sqrt{2} = x \;\to\; 2^x = \sqrt{2} = 2^{1/2} \;\to\; x = \frac{1}{2}$

e) $\log_3 81 = x \;\to\; 3^x = 81 = 3^4 \;\to\; x = 4$

f) $\log_3 \frac{1}{3} = x \;\to\; 3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \;\to\; x = -1$

g) $\log_3 \sqrt{3} = x \;\to\; 3^x = \sqrt{3} = 3^{1/2} \;\to\; x = \frac{1}{2}$

h) $\log_4 16 = x \;\to\; 4^x = 16 = 4^2 \;\to\; x = 2$

23 **Calcula la base de los siguientes logaritmos:**

a) $\boldsymbol{log_b\ 10\,000 = 2}$ **b)** $\boldsymbol{log_b\ 125 = 3}$

c) $\boldsymbol{log_b\ 4 = -1}$ **d)** $\boldsymbol{log_b\ 3 = \frac{1}{2}}$

a) $log_b\ 10\,000 = 2 \to b^2 = 10\,000 \to b = 100$

b) $log_b\ 125 = 3 \to b^3 = 125 \to b = 5$

c) $log_b\ 4 = -1 \to b^{-1} = 4 \to b = \frac{1}{4}$

d) $log_b\ 3 = \frac{1}{2} \to b^{1/2} = 3 \to b = 9$

PIENSA Y RESUELVE

24 **Resuelto en el libro de texto.**

PÁGINA 119

25 **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - (15/2) \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

Analíticamente

Vemos los puntos de corte:

$2x^2 - 5x - 6 = 3x + 4 \to 2x^2 - 8x - 10 = 0 \to x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \begin{cases} x = 5 \to y = 19 \\ x = -1 \to y = 1 \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte: (5, 19), (–1, 1).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = 2x^2 - 5x - 6$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $2x^2 - 5x - 6 = 0 \;\rightarrow$

  $$\rightarrow \;\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{4} \;\rightarrow$$

  $$\begin{cases} x = \left(\dfrac{5 + \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (3{,}38;\ 0) \\ x = \left(\dfrac{5 - \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (-0{,}88;\ 0) \end{cases}$$

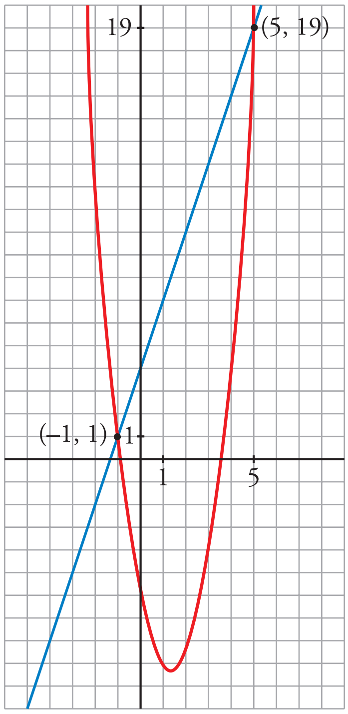
  Eje Y: $y = -6 \;\rightarrow\; (0, -6)$

  Vértice: $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{73}{8}\right)$

- $y = 3x + 4$

  Hacemos una tabla de valores:

x	–1	5
y	1	19



b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Analíticamente

Puntos de corte entre ambas:

$$x^2 - 2x + 1 = -2x + 2 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 1 \;\rightarrow\; y = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 4).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = x^2 - 2x + 1$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $x^2 - 2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \;\rightarrow$ raíz doble: (1, 0)

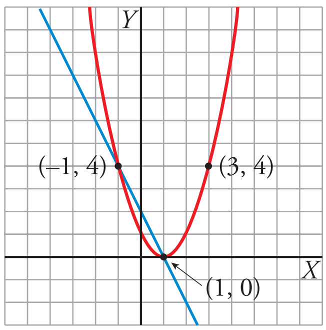
  Eje Y: $y = 1 \;\rightarrow\; (0, 1)$

  Vértice: (1, 0)

- $y = -2x + 2$

  Hacemos una tabla de valores:

x	1	–1
y	0	4



c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

Analíticamente

$2x^2 - 8x - 3 = x^2 - 2x - 3 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0 < \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{matrix}$

Si $x_1 = 0 \rightarrow y_1 = -3$

Si $x_2 = 6 \rightarrow y_2 = 6^2 - 2 \cdot 6 - 3 = 21$

Solución: $x_1 = 0,\ y_1 = -3;\ x_2 = 6,\ y_2 = 21$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas.

- $y = 2x^2 - 8x - 3$

  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x - 3 = 0$

  $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{88}}{4} =$

  $= \dfrac{4 \pm \sqrt{22}}{2} < \begin{matrix} (4{,}34;\ 0) \\ (-0{,}34;\ 0) \end{matrix}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

  Vértice: $(2, -11)$

- $y = x^2 - 2x - 3$

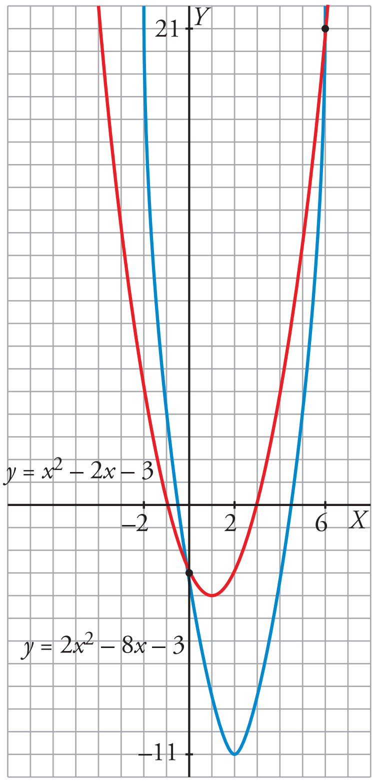
  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

  $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} < \begin{matrix} (3, 0) \\ (-1, 0) \end{matrix}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

  Vértice: $(1, -4)$



d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - (15/2) \end{cases}$

Analíticamente

$-x^2 + 5x = x^2 + 3x - 15/2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 15/2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 4x - 15 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{256}}{8} = \dfrac{4 \pm 16}{8} < \begin{matrix} x_1 = 5/2 \\ x_2 = -3/2 \end{matrix}$

Si $x_1 = \dfrac{5}{2} \rightarrow y_1 = \dfrac{25}{4}$

Si $x_2 = -\dfrac{3}{2} \rightarrow y_2 = -\dfrac{39}{4}$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas.

• $y = -x^2 + 5x$

Cortes con los ejes:

Eje X: $y = 0 \rightarrow -x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(-x + 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 5 \rightarrow (5, 0) \end{cases}$

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Vértice: $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

• $y = x^2 + 3x - 15/2$

Cortes con los ejes:

Eje X: $y = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - 15 = 0$

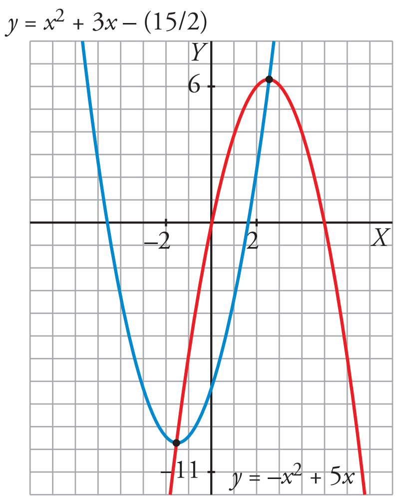
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 120}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{156}}{4} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}625 \rightarrow (1{,}625;\ 0) \\ x_2 = -4{,}625 \rightarrow (-4{,}625;\ 0) \end{cases}$$

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -15/2 \rightarrow$

$\rightarrow (0, -15/2)$

Vértice: $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-39}{4}\right)$



26 **Comprueba analítica y gráficamente que estos dos sistemas no tienen solución:**

a) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \frac{1}{x - 1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} - 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = x - 6 \rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow$ No hay punto en común $\rightarrow$ No hay solución.

RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Representamos $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

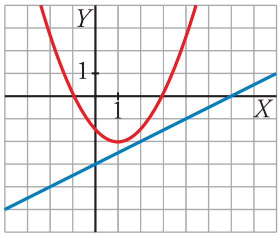
  $$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \rightarrow (3, 0) \\ -1 \rightarrow (-1, 0) \end{cases}$$

  Eje Y: $y = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

  Vértice: $(1, -2)$

- Representamos $y = \frac{x}{2} - 3$

x	0	2
y	–3	–2



b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x-1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{1}{x-1} = -x + 1 \rightarrow 1 = (-x + 1)(x - 1) \rightarrow 1 = -(x - 1)^2 \rightarrow 1 = -x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

No hay puntos en común.

No hay solución.

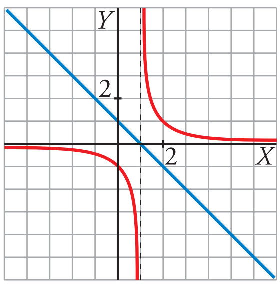
RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Representamos $y = \frac{1}{x-1}$

x	0	–1	2	3
y	–1	–1/2	1	1/2

- Representamos $y = -x + 1$

x	0	2
y	1	–1



27 Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x+2} \\ y = 3x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x+2} \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{2}{x+2} = 3x + 2 \rightarrow 3x^2 + 8x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 24}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{6} \begin{cases} x_1 \approx -0{,}28 \\ x_2 \approx -2{,}39 \end{cases}$$

$x_1 \approx -0{,}28 \rightarrow y_1 \approx 1{,}16$

$x_2 \approx -2{,}39 \rightarrow y_2 \approx -5{,}17$

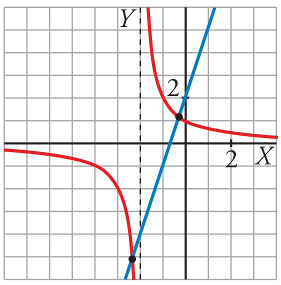
RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Representamos la función $y = \dfrac{2}{x+2}$ que tiene una asíntota en $x = -2$ y otra en $y = 0$:

x	4	–1	0	1
y	–1	2	1	2/3

- Representamos la recta $y = 3x + 2$

x	–2	0
y	–4	2



b) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Puntos de corte:

$$\sqrt{x+1} = x - 5 \rightarrow x + 1 = (x-5)^2 \rightarrow x + 1 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} =$$

$$= \frac{11 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 8 \rightarrow y = 3 \\ x = 3 \rightarrow y = -2 \rightarrow \text{no pertenece a } y = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

Solución: (8, 3)

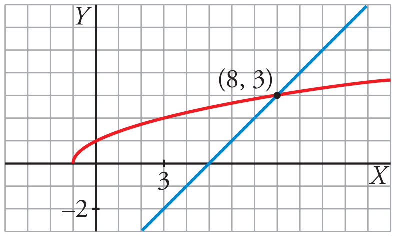
RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Para representar $y = \sqrt{x+1}$ damos valores:

x	–1	3	0	8
y	0	2	1	3

- Para representar $y = x - 5$, hacemos la tabla de valores:

x	3	8
y	–2	3

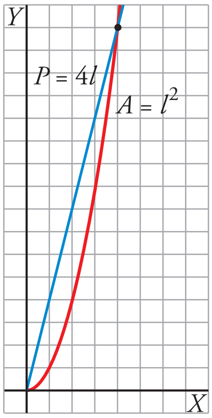


28 **¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área? Dibuja ambas funciones.**

Si l es el lado del cuadrado,

$$P = 4l$$

$$A = l^2$$



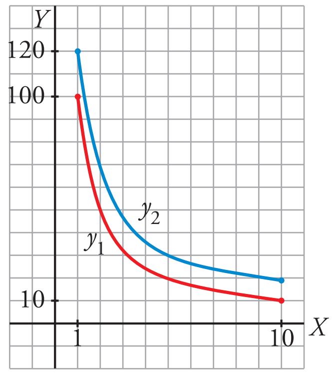
29 **Rocío ha comprado un regalo de cumpleaños para Paz que ha costado 100 €. Como el resto de los amigos del grupo no han comprado nada, deciden pagar el regalo entre todos. Construye una función que nos dé el dinero que debe poner cada uno dependiendo del número de personas que haya y dibújala.**

Si van a cenar a un restaurante en el que la comida vale 10 €, ¿cuál será la función del dinero que tiene que poner cada uno, sin incluir a Paz, dependiendo del número de personas que son? Dibújala en los mismos ejes. Di el dominio de definición de ambas funciones teniendo en cuenta que x solo toma valores naturales y suponiendo que el número de amigos no supera 10.

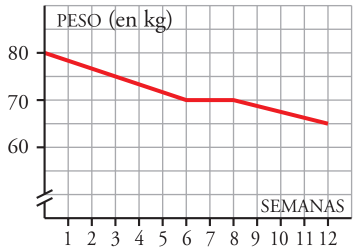
Si el número de amigos es x, $x \in \mathbb{N}$, la función que da lo que debe pagar cada uno es $y_1 = \dfrac{100}{x}$.

Si van a un restaurante, entonces la función es $y_2 = \dfrac{100 + 10(x+1)}{x}$.

El dominio de definición de ambas funciones es $Dom = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



30 **El médico ha puesto a Ricardo un régimen de adelgazamiento y le ha hecho esta gráfica para explicarle lo que espera conseguir en las 12 semanas que dure la dieta.**



a) ¿Cuál era su peso al comenzar el régimen?

b) ¿Cuánto tiene que adelgazar por semana en la primera etapa del régimen? ¿Y entre la 6.ª y la 8.ª semana?

c) Halla la expresión analítica de esa función.

a) Ricardo pesaba 80 kg al comenzar el régimen.

b) $\frac{5}{3} = 1{,}67$ kg por semana

Entre la sexta y octava semana no tiene que adelgazar nada.

c) Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos:

- Para $0 \le x \le 6$, la pendiente $m = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ y $n = 80 \to$

  $\to \; y = -\frac{5}{3}x + 80$

- Para $6 < x \le 8$, $y = 70$

- Para $8 < x \le 12$, $m = -\frac{5}{4}$ y pasa por $(12, 65)$

  $y - 65 = -\frac{5}{4}(x - 12) \;\to\; y = -\frac{5}{4}x + 80$

Luego, la expresión analítica de esta función será:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{5}{3}x + 80 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 70 & \text{si } 6 < x \le 8 \\ -\dfrac{5}{4}x + 80 & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases}$$

31 **Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x \text{ en euros}$$

Y los ingresos que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2 \text{ en euros}$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función beneficio es:

$B = I - G = 600x - 0{,}1x^2 - (20\,000 + 250x) \quad \to \quad B(x) = -0{,}1x^2 + 350x - 20\,000$

El vértice es el máximo: $V = \dfrac{-350}{-2 \cdot 0{,}1} = 1\,750$

Se deben fabricar 1 750 ordenadores para que el beneficio sea máximo.

32 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\to$ $3 = ka^0$ $\to$ $k = 3$

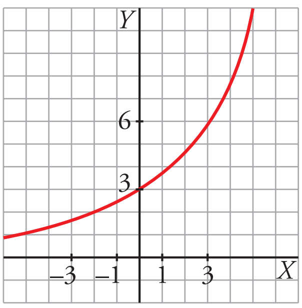
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\to$ $3{,}6 = ka^1$ $\to$ $3{,}6 = 3a$ $\to$ $a = 1{,}2$

Tenemos la función $y = 3 \cdot (1{,}2)^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



33 ■■□ **La función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 2) y (2; 1,28). Calcula k y a y representa la función.**

$y = ka^x$

Si pasa por el punto (0, 2), entonces:

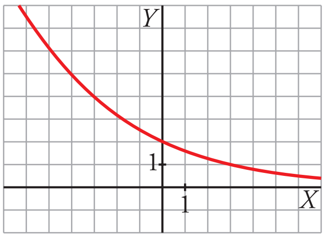
$$2 = k \cdot a^0 \;\to\; 2 = k$$

Si pasa por el punto (2; 1,28), entonces:

$$1{,}28 = k \cdot a^2 \;\to\; 1{,}28 = 2a^2 \;\to\; a^2 = 0{,}64 \;\to\; a = 0{,}8$$

La función es: $y = 2 \cdot (0{,}8)^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	3,906	3,125	2,5	2	1,6	1,28	1,024



34 ■■□ **El coste por unidad de fabricación de ciertos sobres disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}3x + 1\,000}{x}$$

a) ¿Qué valores toma la función?

b) Calcula el coste por unidad y el coste total para 10 sobres. Haz lo mismo para 100 000 sobres.

c) ¿A cuánto crees que se acerca el coste por unidad cuando el número de sobres se hace muy grande?

a) x toma valores naturales.

b) • Para 10 sobres:

Coste por unidad $= \dfrac{1\,003}{10} = 100{,}3$

Coste total de 10 unidades = 1 003

• Para 100 000 sobres:

Coste por unidad $= \dfrac{30\,000 + 1\,000}{100\,000} = 0{,}31$

Coste total de 100 000 unidades = 31 000

c) El coste por unidad se acerca a 0,3.

PÁGINA 120

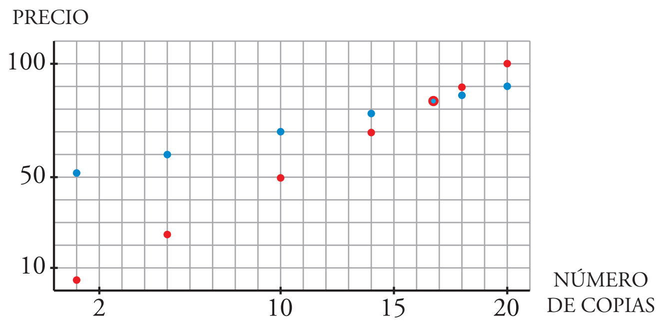
35 **Una casa de reprografía cobra 5 cent. por cada fotocopia. Ofrece también un servicio de multicopia, por el que cobra 50 cent. fijos por el cliché y 2 cent. por cada copia de un mismo ejemplar.**

Haz, para cada caso, una tabla de valores que muestre lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. Representa las funciones obtenidas.

¿Tiene sentido unir los puntos en cada una de ellas? Obtén la expresión analítica de cada función. ¿A partir de cuántas copias es más económico utilizar la multicopista?

FOTOCOPIAS	
UNIDADES	PRECIO
1	5
5	25
10	50
14	70
18	90
20	100

MULTICOPIA	
UNIDADES	PRECIO
1	52
5	60
10	70
14	78
18	86
20	90



No tiene sentido unir los puntos; solo se pueden dar valores naturales.

Expresiones analíticas:

Fotocopias: $y = 5x$

Multicopias: $y = 50 + 2x$

A partir de 17 copias, es más económico utilizar la multicopista.

36 **La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s es $h = 20t - 5t^2$.**

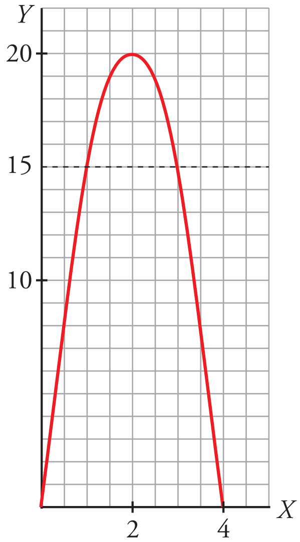
a) Haz una representación gráfica.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

a) 

b) Dominio de definición = [0, 4]

c) La piedra alcanza la altura máxima a los 2 segundos de haberla lanzado, y es de 20 m.

d) A los 4 segundos.

e) $20t - 5t^2 = 15$

$5t^2 - 20t + 15 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

$-5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \;\rightarrow\; 1 \leq t \leq 3$

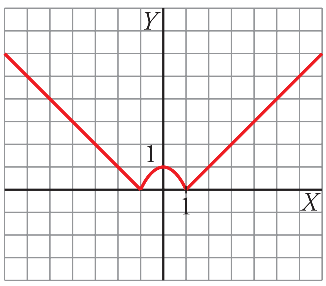
37 **Representa las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

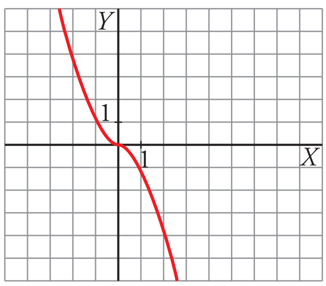
- La recta $y = -1 - x$ está definida para $x < -1$:

x	–2	–1,5
y	1	0,5



- La parábola $y = 1 - x^2$ definida si $-1 \leq x \leq 1$, corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0), y al eje Y en (0, 1), vértice a su vez de la parábola.
- La recta $y = x - 1$ está definida para $x > 1$ y pasa por (2, 1) y (3, 2).

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



- La parábola $y = x^2$, definida para $x < 0$, pasa por (–1, 1) y (–2, 4).
- La parábola $y = -x^2$, definida para $x \geq 0$, tiene su vértice en (0, 0) y pasa por (1, –1) y (2, –4).

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

38 **Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas y di si son crecientes o decrecientes:**

a) $y = \frac{5x - 8}{3}$

b) $3x - y + 4 = 0$

c) $\frac{y + 4}{2} = 1$

d) $y = 4 - \frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right)$

¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de una recta y su pendiente?

a) $m = \frac{5}{3}$. Creciente

b) $m = 3$. Creciente.

c) $m = 0$. Ni crece ni decrece, es constante.

d) $m = -\frac{3}{2}$. Decrece

Si la pendiente es positiva, hay crecimiento.

Si la pendiente es negativa, hay decrecimiento.

39 **Resuelto en el libro de texto.**

40 **Utiliza el mismo razonamiento que hemos seguido en el ejercicio resuelto anterior y calcula las coordenadas del punto en el que se encuentra el vértice de la parábola $y = 3x^2 - 5x + 7$.**

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - 5x + 7 \\ y = 7 \end{array}\right\} 3x^2 - 5x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5/3 \end{array}\right.$$

$$p = \frac{5/3}{2} = \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{5}{6} \rightarrow y = 3 \cdot \frac{5^2}{6^2} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 7 = -\frac{59}{12}$$

El vértice está en el punto $\left(\frac{5}{6}, -\frac{59}{12}\right)$

41 **Construye y dibuja, en cada caso, parábolas que cumplan las siguientes condiciones:**

a) Su eje es $x = 2$ y tiene las ramas hacia abajo.

b) Tiene el vértice en el punto (3, –2) y tiene la misma forma que $y = x^2$.

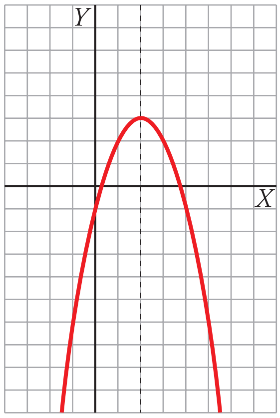
c) Tiene el vértice en el origen de coordenadas y pasa por el punto (–3, –18).

a) La abscisa del vértice es 2: $-\dfrac{b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a$

Si sus ramas van hacia abajo, el coeficiente de x^2 debe ser negativo.

Cualquier función cuadrática $y = ax^2 - 4ax + c$, con $a < 0$, cumple las condiciones.

Por ejemplo: $y = -x^2 + 4x - 1$



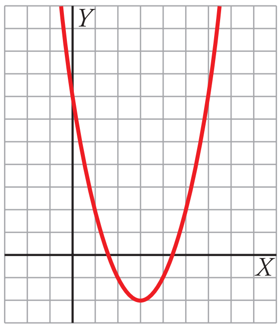
b) Vértice en $(3, -2) \rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 3 \rightarrow b = -6a$

Tiene la misma forma que $y = x^2$, luego $a = 1$.

La función es de la forma $y = x^2 - 6x + c$.

Pasa por $(3, -2) \rightarrow 9 - 18 + c = -2 \rightarrow c = 7$

Por tanto, $y = x^2 - 6x + 7$.



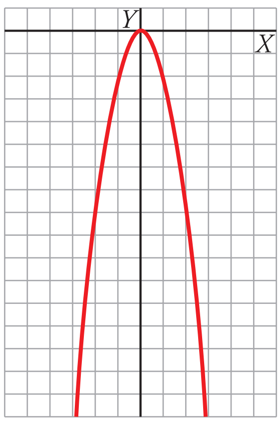
c) $y = ax^2 + bx + c$

$-\dfrac{b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0$

Pasa por (0, 0), luego $c = 0$.

Pasa por $(-3, -18) \rightarrow 9a = -18 \rightarrow a = -2$

La parábola es $y = -2x^2$.



PÁGINA 121

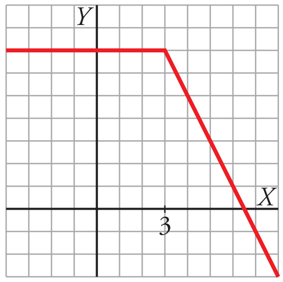
42 ■■□ **Construye funciones definidas a trozos que cumplan las siguientes condiciones y dibújalas.**

a) Es continua y está compuesta por dos trozos de rectas. Tiene pendiente 0 en $x = 1$ y pendiente –2 en $x = 4$. Tiene un máximo en (3, 7).

b) Es continua y está compuesta por un trozo de parábola y un trozo de recta. Tiene un mínimo en (0, 0) y un máximo en (2, 4).

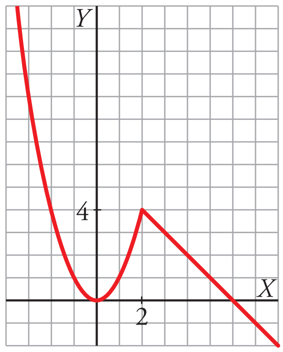
a) Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x < 3 \\ -2x + 13 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



b) Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



43 ■□□ **Todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ pasan por un mismo punto. Di cuál es y justifícalo. ¿En qué casos la función es decreciente?**

Todas pasan por el punto (0, 1), ya que $a^0 = 1$.

Si $a < 1$, la función es decreciente.

44 ■■□ **Calcula b y c para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + c$ esté en el punto (3, 1). ¿Cuál es su eje de simetría? ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?**

Vértice en $x = 3 \rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 3 \rightarrow -b = 6a = 6 \rightarrow b = -6$

Pasa por (3, 1) $\rightarrow 1 = 9 - 18 + c \rightarrow c = 10$

$y = x^2 - 6x + 10$

Su eje de simetría es $x = 3$.

Cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 10 \rightarrow$ Punto (0, 10)

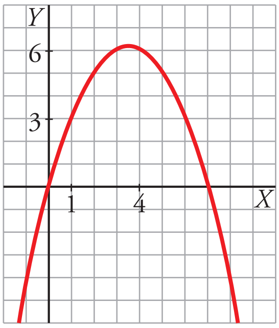
$x^2 - 6x + 10 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \rightarrow$ No tiene solución, por tanto, no corta al eje X.

45 **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c? Si, además, sabes que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), halla a y b y representa la parábola.**

$c = 0 \qquad y = ax^2 + bx$

$$\left.\begin{array}{l}(1, 3) \rightarrow 3 = a + b \\ (4, 6) \rightarrow 6 = 16a + 4b\end{array}\right\} \begin{array}{l}a = 3 - b \rightarrow a = -1/2 \\ 6 = 16(3 - b) + 4b \rightarrow b = 7/2\end{array}$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$$



46 **Calcula a y b para que la función $y = \dfrac{a}{x - b}$ pase por los puntos (2, 2) y (–1, –1).**

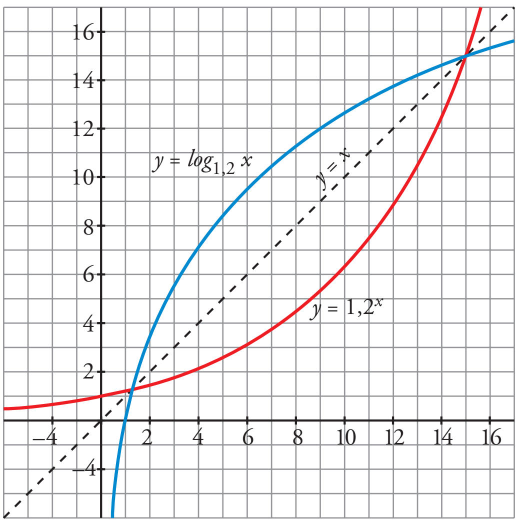
$$\left.\begin{array}{l}2 = \dfrac{a}{2 - b} \\ -1 = \dfrac{a}{-1 - b}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}a = 4 - 2b \\ a = 1 + b\end{array}\right\} \begin{array}{l}1 + b = 4 - 2b \rightarrow b = 1 \\ a = 2\end{array}$$

$$y = \frac{2}{x - 1}$$

47 **Representa gráficamente la función exponencial $y = 1{,}2^x$ haciendo uso de una tabla de valores. ¿Cuál es la función inversa o recíproca de $y = 1{,}2^x$? Represéntala en los mismos ejes.**

La función inversa de $y = 1{,}2^x$ es $y = log_{1,2}\, x$.

X	Y
–4	0,48
0	1
1	1,2
2	1,44
4	2,07
8	4,3
10	6,2
12	8,9
16	18,5



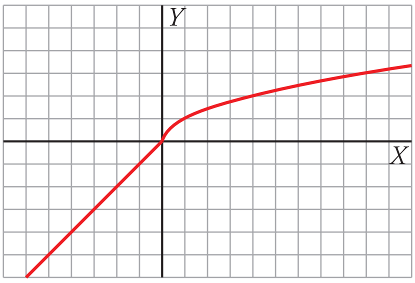
PROFUNDIZA

48 **Representa las siguientes funciones:**

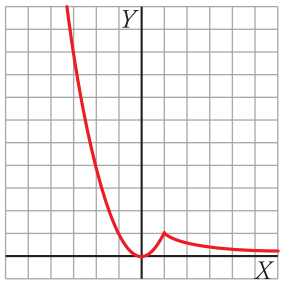
a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a)



b)

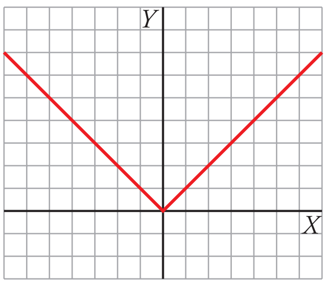


49 **a) Representa la función** $y = |x|$, **donde** $|x|$ **es el valor absoluto de** x.

b) Representa: $y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Compara las dos gráficas, a) y b).

a) y b)



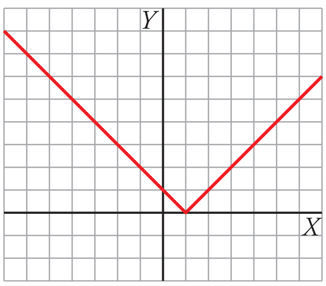
Son la misma gráfica.

50 **Haz la gráfica de las siguientes funciones:**

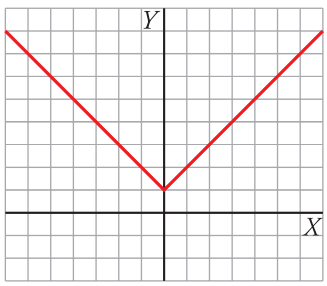
a) $y = |x - 1|$

b) $y = 1 + |x|$

a)



b)



51 **Aplica la definición de logaritmo para calcular x en cada caso:**

a) $log_2\,(2x-2)=3$ **b)** $log_2\,(x-1{,}5)=-1$

c) $log_2\,4x=2$ **d)** $log_2\,(x^2-8)=0$

a) $log_2\,(2x-2)=3 \rightarrow 2x-2=2^3 \rightarrow 2x=10 \rightarrow x=5$

b) $log_2\,(x-1{,}5)=-1 \rightarrow x-1{,}5=2^{-1} \rightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

c) $log_2\,4x=2 \rightarrow 4x=2^2 \rightarrow x=1$

d) $log_2\,(x^2-8)=0 \rightarrow x^2-8=2^0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3$

52 **Resuelto en el libro de texto.**

53 **Resuelve estas ecuaciones exponenciales, expresando como potencia el segundo miembro:**

a) $3^{x^2-5}=81$ **b)** $2^{2x-3}=1/8$

c) $2^{x+1}=\sqrt[3]{4}$ **d)** $2^{x+1}=0{,}5^{3x-2}$

a) $3^{x^2-5}=81 \rightarrow 3^{x^2-5}=3^4 \rightarrow x^2-5=4 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3$

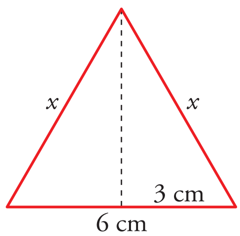
b) $2^{2x-3}=\frac{1}{8} \rightarrow 2^{2x-3}=2^{-3} \rightarrow 2x-3=-3 \rightarrow x=0$

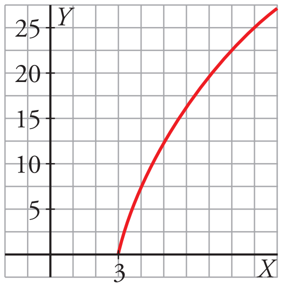
c) $2^{x+1}=\sqrt[3]{4} \rightarrow 2^{x+1}=2^{2/3} \rightarrow x+1=\frac{2}{3} \rightarrow x=\frac{2}{3}-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3}$

d) $2^{x+1}=0{,}5^{3x-2} \rightarrow 2^{x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \rightarrow 2^{x+1}=2^{-(3x-2)} \rightarrow$

$\rightarrow x+1=-(3x-2) \rightarrow 4x=1 \rightarrow x=\frac{1}{4}$

54 **Sabemos que el lado desigual de un triángulo isósceles mide 6 cm. Llama x al otro lado y escribe la ecuación de la función que nos da su área. Represéntala.**



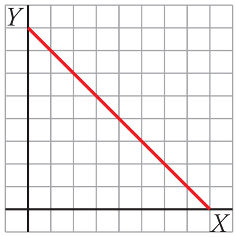


La altura del triángulo es $h=\sqrt{x^2-9}$.

$A(x)=3\sqrt{x^2-9}$

55 **Un móvil que inicialmente llevaba una velocidad de 8 m/s frena con una aceleración de –1 m/s^2. Escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo y represéntala.**

$v = 8 - t$



56 **Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg. ¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?**

Sea t el tiempo, en días.

La función que da el precio de las naranjas según transcurren los días es (kilos de naranjas × precio de cada kilo):

$$P(t) = (200 - t)(0{,}40 + 0{,}01t)$$

$$P(t) = 80 + 2t - 0{,}40t - 0{,}01t^2 = -0{,}01t^2 + 1{,}60t + 80$$

El máximo de la función está en el punto de abscisa:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-1{,}60}{-0{,}02} = 80$$

Las naranjas se deben vender, para obtener el máximo beneficio, dentro de 80 días, y se venderán por 144 euros.