Expresiones Algebraicas

Lenguaje Algebraico

El *lenguaje algebraico* utiliza letras y números unidos por los signos de las operaciones aritmética, de esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas lo que nos permite, formular expresiones algebraicas para luego poder resolver problemas mediante ecuaciones.

Expresión algebraica

Una *expresión algebraica* es un conjunto de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas.

$A = \pi \cdot R^2$ *es la expresión algebraica para calcular el área de un círculo.*

Monomios

Un *monomio* es la expresión algebraica más sencilla y consiste en el producto de un número por varias letras.

$$4x^2yz^3 \rightarrow \begin{cases} 4 & \rightarrow \text{Coeficiente} \\ x^2yz^3 & \rightarrow \text{Parte Literal} \end{cases}$$

Dos *monomios* son *semejantes* si tienen la misma parte literal.

$5x^3$ y $3x^3$ Son semejantes   *$5x$ y $3x^2$ No son semejantes*

El *grado* de un monomio es el número de letras de la parte literal (la suma de todos los exponentes de su parte literal)

El *valor numérico* de un monomio es el valor que se obtiene al sustituir la letra (o letras) por un número (o números) y realizar los cálculos.

El valor numérico de $3x^2$ para $x=2$ es $3\cdot(2)^2 = 3\cdot 4 = 12$

Operaciones con Monomios

Para *sumar* o *restar* monomios, se suman o se restan los coeficientes de los monomios que sean semejantes:

$5x^2 - 3x^2 = 2x^2$ $4x^3 + 7x^3 - 5x^3 = 6x^3$

Para *multiplicar* monomios se multiplican los coeficientes por un lado y las partes literales por otro (Propiedades de las potencias)

$5x^2 \cdot 3x^3 = 15\,x^5$ $4x^5 \cdot 7x^2 = 28\,x^7$

Para *dividir* monomios se dividen los coeficientes por un lado y las partes literales por otro.

$10x^4 : 2x^3 = 5\,x$ $24x^5 : 6x^2 = 4\,x^3$

Polinomios

Un *polinomio, P(x),* es la suma de varios monomios no semejantes, a los que llamaremos *términos* del polinomio. El coeficiente del término de mayor grado es el *coeficiente principal*, y el término sin letra (o de grado 0) se llama *término independiente*. Los representaremos por letras mayúsculas P, Q, R ….y entre paréntesis expresaremos la variable de la que depende. P(x), Q(x)…

$$P(x) = \underbrace{4x^3}_{\text{Término de grado 3}} + \underbrace{3x^2}_{\text{Término de grado 2}} - \underbrace{2x}_{\text{Término de grado 1}} + \underbrace{5}_{\text{Término independiente}}$$

El *grado de un polinomio* es el mayor de los grados de los monomios que los componen.

Grado de P(x) = $4x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ = 3 (el mayor)

$$4x^3 + 2x^2 + 6x - 7 \rightarrow \begin{cases} \text{grado} : 3 \\ \text{Coef. principal} : 4 \\ \text{Término independiente} : -7 \end{cases}$$

Un polinomio es *completo* si contiene todos los términos consecutivos desde el de mayor grado hasta el de menor, si no es así, será incompleto

$P(x) = \underbrace{8x^4 + 3x^2 + 2x + 5}_{\text{Incompleto, falta término de grado 3}}$ $Q(x) = \underbrace{3x^3 + 2x^2 - 4x + 5}_{\text{Completo}}$

El *valor numérico de un polinomio* P(x) para *x=a*, *P(a)*, es el número que se obtiene al cambiar *x* por el número *a*, y realizar las operaciones indicadas.

Sea el polinomio $P(x) = 3x^2 + 2x + 5$

$$P(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) + 5 = 3\cdot 1 - 2 + 5 = 3 - 2 + 5 = 6$$
$$P(2) = 3(2)^2 + 2(2) + 5 = 3\cdot 4 + 4 + 5 = 12 + 4 + 5 = 21$$

Un número cualquiera *x=a es raíz de un polinomio P(x),* cero de un polinomio, cuando el valor numérico de dicho polinomio si x=a es nulo.

x=a es raíz de P(x) si P(a)=0

$$P(x) = x^2 - 4$$

$$P(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \qquad P(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

2 y -2 son raíces del polinomio x^2-4

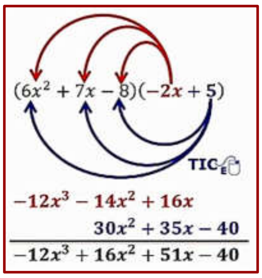
Operaciones con polinomios

Para *sumar o restar* polinomios, sumaremos o restaremos los monomios semejantes que los componen y damos el resultado en orden decreciente en grado.

$$(x^4 - 3x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + 5x - 2) =$$
$$= x^4 - 3x^2 + x + 1 + x^3 - x^2 + 5x - 2 = x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 1$$

$$(x^4 - 3x^2 + x + 1) - \underbrace{(x^3 - x^2 + 5x - 2)}_{\text{para restar dos polinomios}} =$$
$$= x^4 - 3x^2 + x + 1 \underbrace{- x^3 + x^2 - 5x + 2}_{\text{cambiamos el signo de todos los miembros del segundo}} = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x + 3$$

Para *multiplicar* dos polinomios, multiplicaremos todos los monomios del primero por todos los monomios del segundo y después agruparemos los monomios semejantes dando el resultado en orden decreciente en grado.



Para *dividir* un polinomio *P(x)* entre otro *Q(x),* dividimos cada término del dividendo entre todos los términos del divisor usando la regla de la división "cociente por divisor más resto igual a Dividendo"

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & -2x^2 & +8x & -11 & 2x-3 \\ \cline{5-5} -4x^3 & +6x^2 & & & 2x^2+2x+7 \\ \hline & 4x^2 & +8x & -11 & \\ & -4x^2 & +6x & & \\ \hline & & 14x & -11 & \\ & & -14x & +21 & \\ \hline & & & 10 & \end{array}$$

Cociente $= 2x^2 + 2x + 7$
Resto $= 10$

Cálculo de los términos

$4x^3 : 2x = 2x^2$

$4x^2 : 2x = 2x$

$14x : 2x = 7$

Para sacar *factor común* en un polinomio se buscan todos los factores comunes (los que se repiten) a todos los términos y se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

$$60x^4 + 18x^3 - 24x^2 = 6x^2(10x^2 + 3x - 4)$$

Identidades Notables

El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero, más el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$ $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

El cuadrado de la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primero, menos el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$ $(2x-4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$

Suma por diferencia. La suma de dos términos multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (x+3)\cdot(x-3)=x^2-9$$

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en descomponerlo en producto de polinomios del menor grado posible, de forma que ninguno de ellos pueda descomponerse a su vez.

Un polinomio se puede factorizar de tres maneras:

- *Sacando factor común.*

$$10x^3+2x^2-8x=2x\cdot\left(5x^2+x-4\right) \qquad x^5-5x^3=x^3\left(x^2-5\right)$$

- *Identificando identidades notables.*

$$x^2+5x+6=(x+3)^2 \qquad 4x^2-20x+25=(2x-5)^2$$

- *Buscando sus raíces mediante Ruffini.*

El proceso de factorización comienza *buscando divisores* de la forma *x-a*, tales que, *a*, sea divisor del término independiente de nuestro polinomio.

Como cada raíz origina un factor de la forma $x-a$, cuando en la división por Ruffini el resto para un $x=a$ sale 0, estamos diciendo que el polinomio de partida es divisible por el binomio $x-a$, y por tanto, este binomio junto con el cociente obtenido nos dará una factorización del polinomio [recuerda que si $R(x)=0$, entonces, $D(x)=d(x)\cdot C(x)$]. Habrá que ir comprobando si los cocientes que vamos obteniendo se pueden descomponer, puesto que se trata de conseguir factores irreducibles.

$$P(x)=x^3-4x^2+x+6$$

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	0
2	0	2	-6	
	1	-3	0	<--

Los divisores de 6 son ±1, ±2, ±3 y ±6, probamos con -1 y obtenemos resto 0. Probamos con 1, y nada, probamos con 2 y obtenemos resto 0. Por tanto la factorización es $P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

Fracciones algebraicas

Una *fracción algebraica* es una fracción en la que tanto numerador como denominador son polinomios.

$$\frac{x+3}{x-5} \qquad \frac{x+2}{x^2-4} \qquad \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$$

Al igual que en las fracciones de números enteros, *en las fracciones algebraicas se suele trabajar con la fracción irreducible*, es decir, con aquella fracción equivalente a la original, pero que no se puede simplificar más.

Para simplificar una fracción algebraica se dividen numerador y denominador por un polinomio que sea factor común de ambos, y para ello nos ayudaremos de la factorización de polinomios.

$$a)\quad \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)}=\frac{x+2}{x-2}$$

Las dos son identidades notables que convertimos en producto y simplificamos

$$b)\quad \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-6}=\frac{(x-2)^2}{(x+3)\cdot(x-2)}=\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x-2)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)}=\frac{x-2}{x-3}$$

En el numerador hay una identidad notable, y en el denominador factorizamos con Ruffini después y simplificamos.

$$c)\quad \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)}=\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)}{\cancel{(x-2)}\cdot x}=\frac{x-3}{x}$$

En el numerador hacemos Ruffini y en el denominador sacamos factor común y después simplificamos.

$$d)\quad \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x+2)}}=\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$$

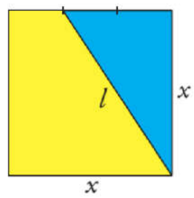
Hacemos Ruffini tanto en el numerador como en el denominador y después simplificamos.

Resolución de Problemas Algebraicos

A la hora de *resolver problemas algebraicos* seguiremos el siguiente esquema:

a) Lectura y comprensión del enunciado.
b) Análisis de los datos del enunciado. *(Ayudarse con un dibujo)*
c) Traducción del problema al lenguaje algebraico
d) Planteamiento de las operaciones a realizar y realización.
e) Resolución del problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para ello.
f) Dar la solución del problema (responder a las preguntas).
g) Evaluar e interpretar los resultados obtenidos con los datos del problema. ¿Son lógicos? ¿Se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿Puedo comprobar si la solución es correcta?

1.- Fíjate en la figura y expresa algebraicamente:
a) El área del triángulo Azul.
b) El área del trapecio amarillo.
c) La longitud de l.
d) Calcula la longitud de l, si x=5 cm



a) El área de un triángulo viene dada por:

$$A=\frac{Base\cdot Altura}{2}=\frac{B\cdot h}{2},$$

En el dibujo podemos observar que la base del triángulo es *x*, y la altura es *2/3 x*. Por tanto si sustituimos en la fórmula obtenemos:

$$A_{\triangle}(x)=\frac{B\cdot h}{2}=\frac{x\cdot\frac{2}{3}x}{2}=\frac{\frac{2}{3}x^2}{2}=\frac{1}{3}x^2\ u.a.$$

b) El área del trapecio amarillo la podemos calcular restando al área del cuadrado, el área del triángulo azul.

$$A_T(x)=A_{\square}-A_{\triangle}=x^2-\frac{1}{3}x^2=\frac{2}{3}x^2\ u.a.$$

c) La longitud de l, la podemos calcular utilizando el teorema de Pitágoras $a^2=b^2+c^2$ en el triángulo azul.

Sustituyendo nuestros valores llegamos a: $l^2=x^2+\left(\frac{2}{3}x\right)^2$

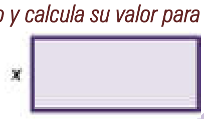
Si operamos y despejamos l:

$$l^2=x^2+\left(\frac{2}{3}x\right)^2=x^2+\frac{4}{9}x^2=\frac{13}{9}x^2 \quad\to\quad l=\sqrt{\frac{13}{9}x^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}x\ u.l.$$

d) Si x=5, el valor de l será:

$$l(x)=\frac{\sqrt{13}}{3}x \quad\to\quad l(5)=\frac{\sqrt{13}}{3}\cdot5=\frac{5\sqrt{13}}{3}=6\ cm$$

2.- Doblando un alambre de 40 cm formamos un rectángulo. Halla la expresión algebraica que define el área del rectángulo y calcula su valor para x=4.



Si formamos un rectángulo de altura x, como 40 cm es el perímetro, las dos bases medirán *40-2x* y una sola base medirá *20-x*. Por tanto el área del rectángulo será *(base x altura)*:

$$A(x)=\text{base x altura}=(20-x)\cdot x=20x-x^2 \quad\to\quad A(4)=80-16=64\ cm^2$$