

Concepto de potencia

Una **potencia** es una forma abreviada de expresar una multiplicación de un número por sí mismo varias veces.

$$a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{El producto de } a \text{ por sí mismo se repite } c \text{ veces}}$$

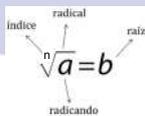
En una potencia, la **base** representa el factor que se repite, y el **exponente** las veces que se repite el producto.

- Si la base es positiva:
 - $(+)^+ = + \rightarrow (+2)^2 = +4$
 - $(+)^- = + \rightarrow (+2)^{-2} = +\frac{1}{4}$
- Si la base es negativa:
 - $(-)^{\text{par}} = + \rightarrow (-2)^4 = +16$
 - $(-)^{\text{impar}} = - \rightarrow (-3)^3 = -27$

Propiedades de las potencias		
Producto	Cociente	Potencia
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$	$a^b : a^c = a^{b-c}$ $6^5 : 6 = 6^4$	$a^0 = 1$ $a^1 = a$
$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ $2^4 \cdot 3^4 = 12^4$	$a^c : b^c = (a : b)^c$ $6^3 : 3^3 = 2^3$	$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4}$
Potencias de exponente negativo		
$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^c$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$	

Raíces exactas. Radicales

En una raíz cualquiera o radical, el **radicando** es el número, **a**, que hay dentro de la raíz. $\sqrt{\quad}$ es el símbolo de la raíz, **n** es el **índice** de la raíz, y **b** es el resultado de la raíz ó raíz.



La **raíz cuadrada** de un número **a** es otro número **b** que, elevado al cuadrado, nos da el número a.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \quad \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

La **raíz cúbica** de un número **a** es otro número **b** que, elevado al cubo, nos da el número a.

$$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a \quad \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

La **raíz cuarta** de un número **a** es otro número **b** que, elevado a la cuarta, nos da el número a.

$$\sqrt[4]{a} = b \Leftrightarrow b^4 = a \quad \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

La **raíz e-nésima** de un número **a** es otro número **b** que, elevado a la e-nésima, nos da el número a.

$$\sqrt[e]{a} = b \Leftrightarrow b^e = a \quad \sqrt[15]{32768} = \sqrt[15]{2^{15}} = 2$$

La forma sencilla de resolver cualquier raíz es intentar conseguir en el radicando una potencia de exponente igual que el índice de la raíz.

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2 \quad \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \quad \sqrt[5]{125} = \sqrt[5]{5^3} = 5 \quad \sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$$

Decimos que dos radicales son **equivalentes** si tienen la misma raíz.

La **raíz de una fracción** es el cociente entre la raíz del numerador y la raíz del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \sqrt[4]{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{9}} = \frac{+2}{+3} \quad \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{8}$$

Relación entre potencias y raíces

Llamamos potencias de exponente fraccionario a aquellas potencias en las que el exponente es un número racional (fracción):

$$\frac{b}{a^c}$$

Este tipo de potencias se pueden expresar igualmente como una raíz (o radical) de la siguiente forma:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \Leftrightarrow \sqrt[q]{b^p} = b^{\frac{p}{q}}$$

Donde el numerador es la potencia y el denominador es índice de la raíz. (**Ley de exponentes fraccionarios**)

Luego como podemos observar, existe una relación entre los radicales y las potencias, de forma que podemos pasar de uno a otro con facilidad (**expresión potencial de un radical**).

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} \quad \sqrt[4]{3^7} = 3^{\frac{7}{4}} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{3}{5}\right)^2} \quad \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

Propiedades de los radicales

Los radicales tienen una serie de definiciones y propiedades que debemos conocer y utilizar con soltura, todas ellas, consecuencia inmediata de conocidas propiedades de las potencias.

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n.
- Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe si n es impar.
- Cuando escribimos $\sqrt{4}$ nos referimos a la raíz positiva: $\sqrt{4} = +2$
- El **producto** de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del producto de los radicandos:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \rightarrow \text{ej: } \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4 \cdot 5} = \sqrt[3]{20}$$

El **cociente** de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del cociente de los radicandos:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ si } b \neq 0 \rightarrow \text{ej: } \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[5]{\frac{16}{8}} = \sqrt[5]{2}$$

Un **radical** de índice **n** **elevado a una potencia** m equivale a una raíz de índice n y de radicando elevado a la potencia m:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \rightarrow \text{ej: } (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

La raíz de índice **m** de un radical de índice **n** es equivalente a una raíz de índice **n** de un radical de índice **m** y es igual a una raíz de índice **m \cdot n**:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \rightarrow \sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3 \cdot 5]{3} = \sqrt[15]{3} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{3}}$$

Si $a \geq 0$ la raíz de índice **n** de **a** es igual que la raíz de índice **m \cdot n** de **a** elevado a m.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m} \rightarrow \text{ej: } \sqrt[3]{3} = \sqrt[5 \cdot 3]{3^{5 \cdot 1}} = \sqrt[15]{3^5}$$

Operaciones con radicales

Reducción a índice común

Para realizar operaciones con radicales de distinto índice es necesario reducirlos a otros equivalentes que tengan el mismo índice. Este nuevo índice será el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de todos los índices.

Para reducir a índice común las raíces $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$, calculamos el mínimo común múltiplo de los índices 2 y 3: m.c.m.(2,3)=6

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} \quad \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^2}$$

Simplificación de radicales

De acuerdo con la ley de exponentes fraccionarios y de las propiedades de los radicales, simplificar un radical es expresarlo en su forma más simple. Es decir, un radical está simplificado cuando:

- No se puede extraer ningún factor del radicando
- No puede reducirse su índice
- El radicando no es una fracción
- No hay radicales en el denominador de una fracción

Para simplificar radicales, se factoriza el radicando y se extraen todos los posibles factores del radical. Después, si es posible, con la ley de exponentes fraccionarios se reduce su índice.

$$\sqrt[4]{11664} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^6} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{3^2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{729} b^5 \cdot c^7 \cdot m^{14}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^6} b^5 \cdot c^7 \cdot m^{14}} = \frac{2}{3^2} \cdot b \cdot c^2 \cdot m^4 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot c \cdot m^2}$$

Introducción de factores en un radical

Para introducir factores dentro de un radical, el factor que está fuera se escribe dentro elevado al índice de la raíz y después operamos.

$$-5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(-5)^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{-500} \quad \sqrt{3\sqrt{2}} = \sqrt[4]{3^2 \cdot 2} = \sqrt[4]{18}$$

Producto y cociente de radicales

Para poder multiplicar (o dividir) radicales han de tener el mismo índice, si no es así, primero hay que reducir a índice común. El resultado del producto (o del cociente) ya lo hemos visto en las propiedades.

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4 \cdot 5} = \sqrt[3]{20} \quad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Suma y resta de radicales

Decimos que dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

$$\sqrt{5} \leftrightarrow 5\sqrt{5} \quad 2\sqrt[3]{3} \leftrightarrow 5\sqrt[3]{3} \quad \sqrt[3]{3} \leftrightarrow 8\sqrt[3]{3}$$

Para poder sumar radicales han de ser semejantes. Para sumar o restar radicales semejantes, se extrae factor común y se operan los coeficientes.

$$3\sqrt{27} - 2\sqrt{243} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} = 3\sqrt{3^3} - 2\sqrt{3^5} + \sqrt{3 \cdot 5^2} - 2\sqrt{3 \cdot 2^4} = 3 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$$

Es importante subrayar que la suma algebraica de dos radicales de cualquier índice nos es igual a la raíz de la suma algebraica de los radicandos.

$$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$$

Racionalización de Radicales

Cuando tenemos fracciones con radicales en el denominador, conviene obtener fracciones equivalentes pero que no tengan radicales en el denominador. A este proceso es a lo que se llama **racionalización**.

Según el tipo de radical o la forma de la expresión que aparece en el denominador, el proceso es diferente.

Si el denominador es un radical cuadrático:

Si el denominador contiene una raíz cuadrada, se racionaliza multiplicando el numerador y el denominador por dicha raíz cuadrada.

$$a) \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Si el denominador es un binomio con raíces cuadradas.

Si el denominador de la fracción contiene dos términos en uno de los cuales (o en los dos) hay una raíz cuadrada, se racionaliza utilizando la tercera identidad notable. Es decir, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (a+b) \text{ y } (a-b) \text{ son binomios conjugados}$$

$$\frac{7}{1+\sqrt{2}} = \frac{7}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{7(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{7-7\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{7-7\sqrt{2}}{1-2} = \frac{7-7\sqrt{2}}{-1} = 7\sqrt{2} - 7$$

Aproximaciones y errores

Las medidas experimentales están afectadas de cierta imprecisión, ya sea por el aparato de medida utilizado por el observador que lo utiliza. El problema es establecer los límites dentro de los cuales se encuentra el valor de dicha medida.

Aproximaciones

Como no podemos trabajar con infinitas cifras decimales tomamos aproximaciones a dichas cantidades, que simplifican los cálculos.

Dado un número real x , una aproximación es un valor a cercano a x .

- Si $a > x$ la aproximación es por **exceso**
- Si $a < x$ la aproximación es por **defecto**.

Generalmente, la aproximación a es un número decimal finito y cercano (en algún sentido) al valor x .

Redondeo: para redondear una cantidad a la n -ésima cifra, nos fijaremos en la siguiente cifra. Si ésta es mayor o igual que 5, aumentamos en una unidad la cifra n -ésima. En otro caso, dejamos igual la cifra n -ésima y despreciamos las demás cifras a partir de ella.

Realiza una aproximación por redondeo a las décimas, centésimas y milésimas del número 3,5738

- ✓ A las décimas 3,5738 $\rightarrow 7 > 5$ entonces: **3,6**
- ✓ A las milésimas 3,5738 $\rightarrow 8 > 5$ entonces: **3,574**

Truncamiento: para truncar una cantidad a la cifra n -ésima, se prescinde directamente de las siguientes cifras a partir de ella.

Realiza una aproximación por truncamiento a las décimas, centésimas y milésimas del número 3,5738

- ✓ A las décimas 3,5738 \rightarrow **3,5**
- ✓ A las milésimas 3,5738 \rightarrow **3,573**

Errores

Llamamos **error absoluto** (E_A) a la diferencia, en valor absoluto, entre el valor de la medida (valor aproximado) y el valor tomado como exacto o valor real.

$$E_A = |V_R - V_{aprox}| \quad E_r = \frac{E_A}{V_R} \cdot 100$$

Llamamos **error relativo** (E_r) al cociente entre el error absoluto y el valor exacto multiplicado por 100. Lo damos en % para poder compararlos.

Calcula el error absoluto y relativo cometido en la medida del diámetro de un tubo de 70 cm si hemos obtenido 70,7 cm.

$$E_A = |V_R - V_{aprox}| = |70 - 70,7| = 0,7 \text{ cm}$$

$$E_r = \frac{E_A}{V_R} \cdot 100 = \frac{0,7}{70} \cdot 100 = 0,01 \cdot 100 = 1 \%$$

Intervalos y Semirrectas

Un **intervalo** de extremos a y b son todos los números comprendidos entre a y b . Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados y semiabiertos.

Tipos de Intervalos			
Abierto	Semiabiertos		Cerrados
No incluye extremos.	Incluyen solo uno de sus extremos.		Incluye sextremos.
(a, b)	$(a, b]$	$[a, b)$	$[a, b]$
$a < x < b$	$a < x \leq b$	$a \leq x < b$	$a \leq x \leq b$

Una **semirrecta** o intervalo infinito es un conjunto de números reales definido para valores menores o mayores que un número dado.

Tipos de Semirrectas			
Abierta por la izquierda	Cerrada por la izquierda	Abierta por la derecha	Cerrada por la derecha
$(a, +\infty)$	$[a, +\infty)$	$(-\infty, b)$	$(-\infty, b]$
$a < x$	$a \leq x$	$x < b$	$x \leq b$

Notación Científica

La **notación científica** nos permite escribir números muy grandes o muy pequeños de forma abreviada. Esta notación consiste simplemente en multiplicar por una potencia de base 10 con exponente positivo si el número es muy grande o negativo si es muy pequeño.

$$4.752,3 = 4 \text{ , } 7523 \cdot 10^{-3} = 4,7523 \cdot 10^3$$

un número entero
varios decimales
base 10

Siempre el exponente es igual al número de cifras decimales que deben moverse para convertir un número dado en notación científica en el mismo escrito en notación decimal. Se desplazará a la derecha si el exponente es positivo y hacia la izquierda si es negativo. Cuando se trata de convertir un número en notación decimal a notación científica el proceso es a la inversa.