PÁGINA 255

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Construcciones y ejes de simetría

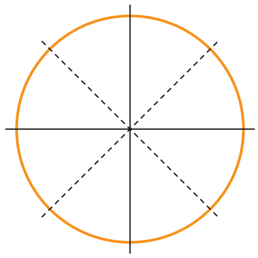
1 **a) Halla el ángulo central de un octógono regular.**

b) Dibuja un octógono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio, construyendo el ángulo central con ayuda del transportador. Traza todos sus ejes de simetría.

c) Con regla y compás, traza dos rectas perpendiculares y sus dos bisectrices.

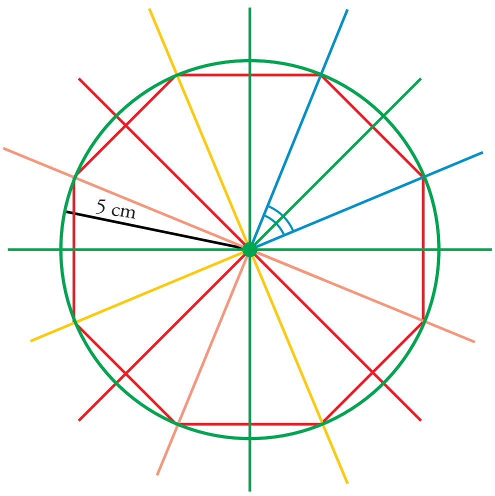
Traza una circunferencia de radio 5 cm con centro en el punto donde se cortan las cuatro rectas.

Dibuja de nuevo un octógono regular. Justifica la construcción.

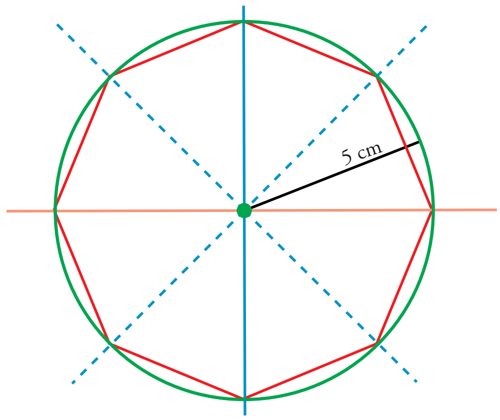


a) El ángulo pedido mide $\frac{360°}{8} = 45°$.

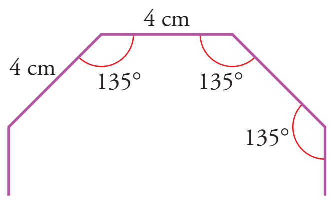
b)



c) El octógono es regular porque estamos trabajando con bisectrices de ángulos iguales, por lo que las distancias son las mismas.



2 △△△ **Averigua cuánto vale el ángulo de un octógono regular. Obtendrás $A = 135°$. Para dibujar un octógono regular de lado $l = 4$ cm, procede del siguiente modo:**



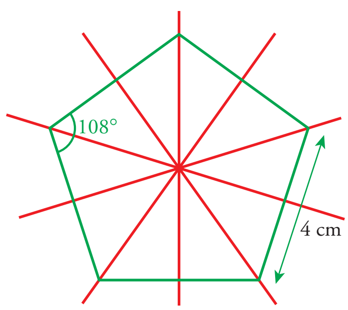
- **Traza un segmento de 4 cm de longitud y, en cada uno de sus extremos, construye un ángulo de 135° (135° = 90° + 45°).**
- **Después, traza los dos lados adyacentes.**
- **Prosigue así hasta cerrar los 8 lados del polígono.**

El ángulo es $\dfrac{180° \cdot 6}{8} = 135°$.

3 △△△ **Procediendo de forma análoga a la del ejercicio anterior, construye un pentágono regular de 4 cm de lado y traza, en rojo, todos sus ejes de simetría.**

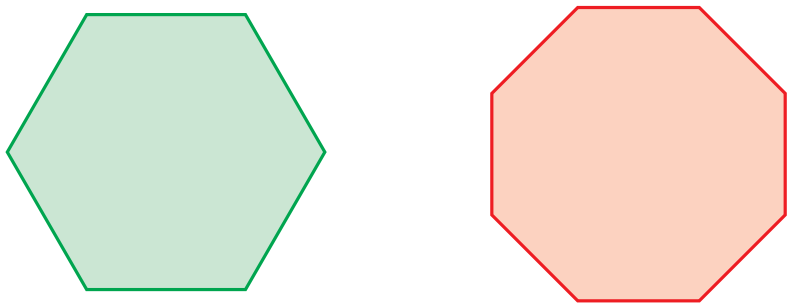
■ *Primero tendrás que calcular el ángulo de un pentágono regular.*

El ángulo es $\dfrac{180° \cdot 3}{5} = 108°$



4 ▲△△ **Dibuja dos polígonos regulares que cada uno de ellos tenga sus lados paralelos dos a dos.**

En general, ¿cuáles son los polígonos regulares cuyos lados son paralelos dos a dos?



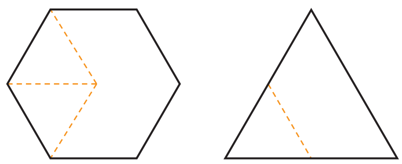
En general, cumplen esa propiedad los polígonos regulares con un número par de lados.

5 ▲△△ **Dibuja en tu cuaderno y comprueba:**

a) Construye un hexágono regular de 1 cm de lado y un triángulo equilátero de 2 cm de lado.

b) Comprueba que las dos figuras anteriores tienen el mismo perímetro.

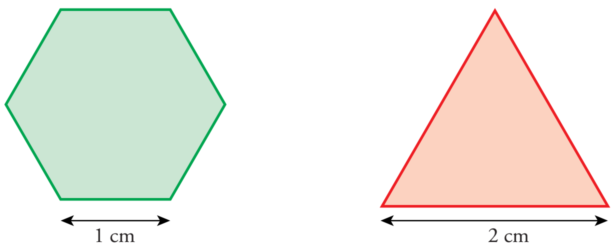
c) Divide el hexágono y el triángulo en triángulos equiláteros de 1 cm de lado.



¿Cuántos de estos triángulos tiene cada una de las dos figuras?

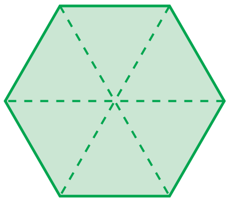
¿Qué relación hay entre sus áreas?

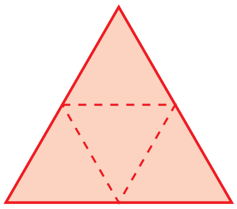
a)



b) $P_{\text{HEXÁGONO}} = 1 \cdot 6 = 6$ cm

$P_{\text{TRIÁNGULO}} = 2 \cdot 3 = 6$ cm c)


6 triángulos


4 triángulos

El área del hexágono es $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$ veces la del triángulo.

6 **△△△ Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Si el área del hexágono es 60 cm^2, ¿cuál es el área del triángulo?**

■ *Ten en cuenta el apartado c) del ejercicio anterior.*

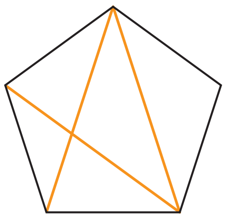
Por el ejercicio 5, el área del triángulo es $60 \text{ cm}^2 : 1,5 = 40 \text{ cm}^2$.

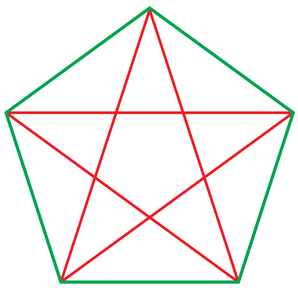
Polígonos estrellados

7 **△△△ Calca en tu cuaderno este pentágono regular.**

Une cada vértice con el que está "dos lugares más allá". Obtendrás el pentágono estrellado.

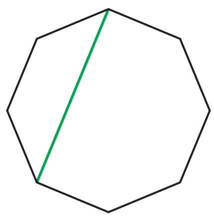
¿Recuerdas? Era el símbolo de los pitagóricos.

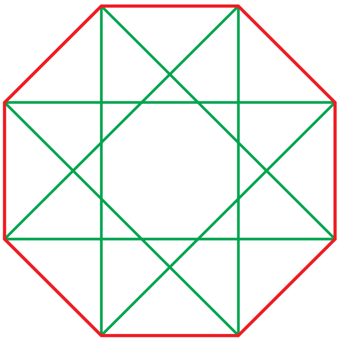




8 **△△△ El octógono estrellado se obtiene uniendo cada vértice del octógono con los que están "tres lugares más allá".**

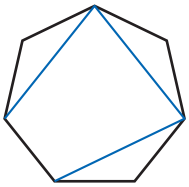
Hazlo en tu cuaderno.



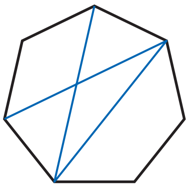


PÁGINA 256

9 △△△ **Existen dos heptágonos estrellados:**

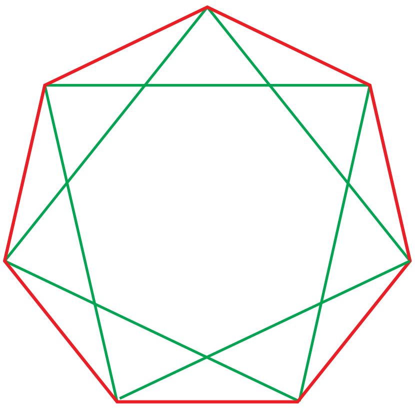


I. Se une cada vértice con los que están "dos lugares más allá".

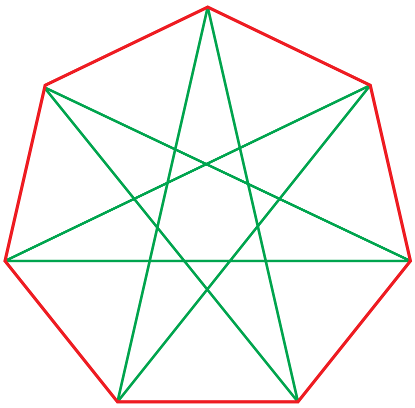


II. Se une cada vértice con los que están "tres lugares más allá".

Hazlos en tu cuaderno.



I

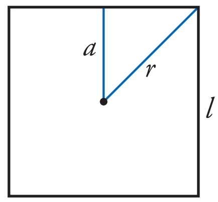


II

Lado, apotema y radio

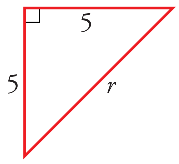
10 ▲△△ **¿Cómo es la longitud de la apotema de un cuadrado con relación a su lado?**

Halla el radio de un cuadrado cuyo lado mida 10 cm, con dos cifras decimales.

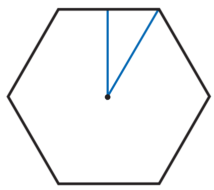


La apotema es la mitad del lado.

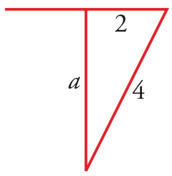
$r = \sqrt{5^2 + 5^2} \approx 7{,}07$ cm



11 ▲△△ **Recuerda que en el hexágono regular el lado es igual al radio. Calcula la longitud de la apotema de un hexágono regular de lado 4 cm, con una cifra decimal.**

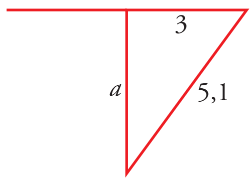


$a = \sqrt{4^2 - 2^2} \approx 3{,}4$ cm



12 ▲△△ **El lado de un pentágono regular mide $l = 6$ cm y su radio, $r = 5{,}1$ cm. Halla su apotema con una cifra decimal.**

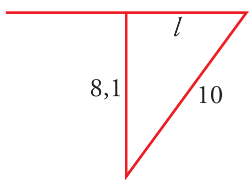
$a = \sqrt{5{,}1^2 - 3^2} = 4{,}1$ cm



13 ▲△△ **El radio de un pentágono regular mide $r = 10$ cm y su apotema, $a = 8{,}1$ cm. Halla la longitud de su lado (con una cifra decimal).**

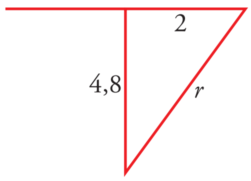
$\frac{1}{2} = \sqrt{10^2 - 8{,}1^2} = 5{,}8$ cm

$l = 2 \cdot 5{,}8 = 11{,}6$ cm



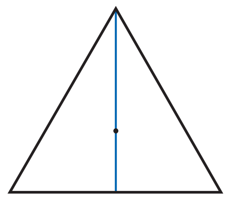
14 **El lado de un octógono regular mide 4 cm y su apotema, 4,8 cm. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al polígono.**

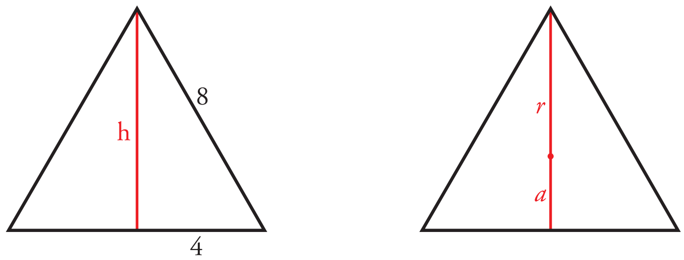
$r = \sqrt{4,8^2 + 2^2} = 5,2$ cm



15 **Halla, con una cifra decimal, la altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado.**

¿Cuánto miden su apotema y su radio?



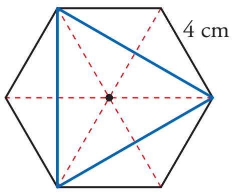


$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,9$ cm

$a = 6,9 : 3 = 2,3$ cm

$r = 2 \cdot 2,3 = 4,6$ cm

16 **El lado del hexágono exterior mide 4 cm.**



Halla el radio, la apotema y el lado del triángulo azul.

La altura del triángulo es $4 + 2 = 6$ cm.

El radio del triángulo, $r = 4$ cm.

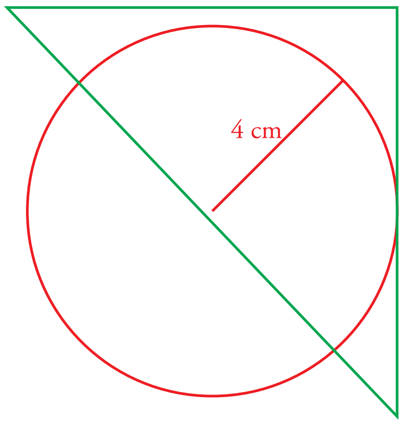
Su apotema, $a = 2$ cm.

La mitad del lado mide: $\frac{l}{2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46$ cm

Por tanto: $l = 2 \cdot 3,46 = 6,92$ cm

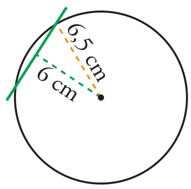
Circunferencias y rectas

17 **Dibuja una circunferencia de 4 cm de radio y un triángulo cuyos lados sean: uno secante a la circunferencia, otro tangente y otro exterior.**



18 **Una recta pasa a 6 cm del centro de una circunferencia de radio 6,5 cm. ¿Corta la recta a la circunferencia?**

Halla la longitud de la cuerda que determina en ella.

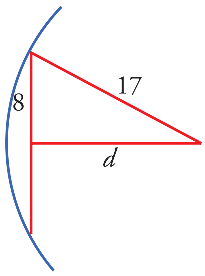


La recta corta a la circunferencia porque su distancia al centro es menor que el radio de la circunferencia.

$$\frac{l}{2} = \sqrt{6{,}5^2 - 6^2} = 2{,}5 \text{ cm}$$

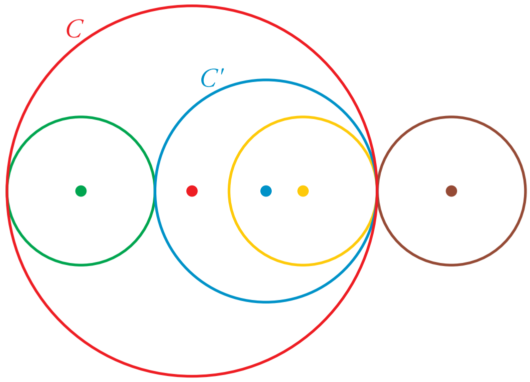
Luego la cuerda mide 5 cm.

19 **Una circunferencia de 17 cm de radio corta a una recta. La cuerda correspondiente mide 16 cm. ¿A qué distancia de la recta está el centro de la circunferencia?**



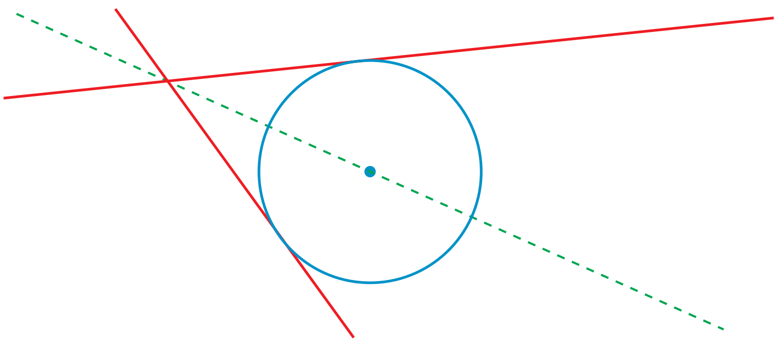
$$d = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ cm}$$

20 **Dibuja dos circunferencias, C y C', de radios 5 cm y 3 cm que sean tangentes interiores. Traza tres circunferencias distintas, de 2 cm de radio, tales que cada una de ellas sea tangente a C y a C'.**



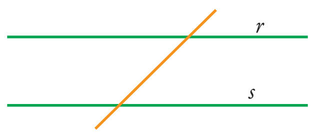
21 ▲△△ **Traza dos rectas que se corten. Dibuja una circunferencia, de radio el que tú quieras, tangente a ambas rectas.**

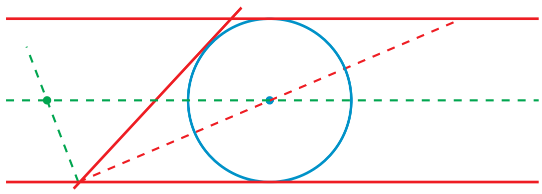
Completa la frase: "Si una circunferencia es tangente a dos rectas que se cortan, su centro estará en la …".



Si una circunferencia es tangente a dos rectas que se cortan, su centro estará en la bisectriz del ángulo que forman.

22 ▲▲▲ **Traza en tu cuaderno dos rectas paralelas, *r* y *s*, y otra recta secante a ambas. Localiza el centro de una circunferencia que sea tangente a las tres rectas. ¿Podrías encontrar otra?**



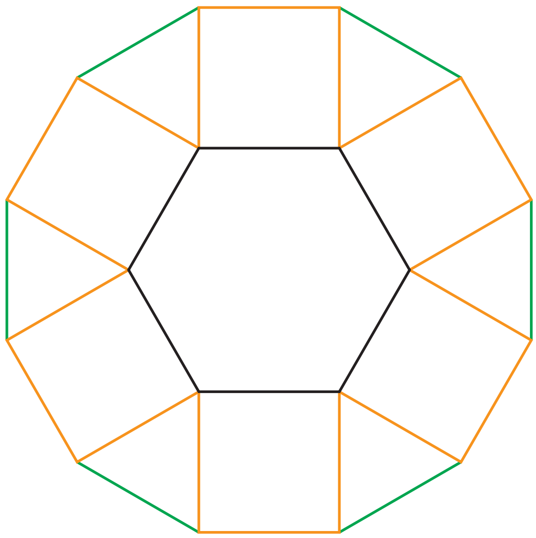


Sí; basta hallar la bisectriz del otro ángulo para localizar el segundo centro.

PÁGINA 257

PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

23 Sobre cada uno de los lados de un hexágono regular construimos un cuadrado. Unimos los vértices sueltos mediante segmentos. Se obtiene así un dodecágono (polígono de 12 lados).

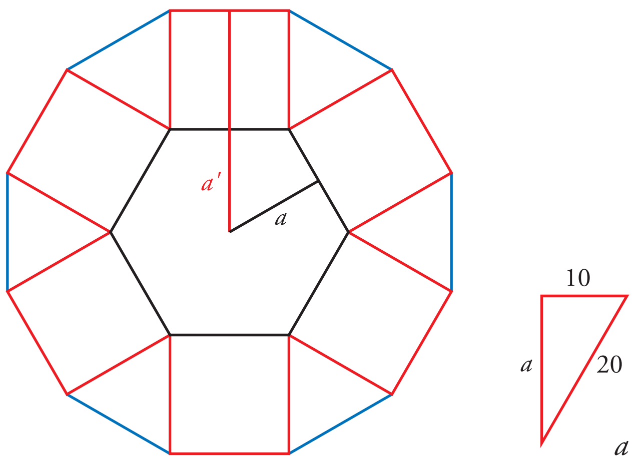


¿Crees que es regular? Justifica la respuesta. En caso afirmativo, halla la apotema para $l = 20$.

Es regular porque todos sus lados son iguales (e iguales a los del hexágono regular) y todos sus ángulos son iguales a la suma del ángulo de un cuadrado (90°) y el de un triángulo equilátero (60°): $90° + 60° = 150°$. Veamos que es correcto:

El ángulo del dodecágono regular debe ser $\dfrac{180° \cdot (12-2)}{12} = 150°$.

La apotema, a', es igual a la suma del apotema, a, del hexágono interior más el lado del cuadrado (que es el lado del hexágono).



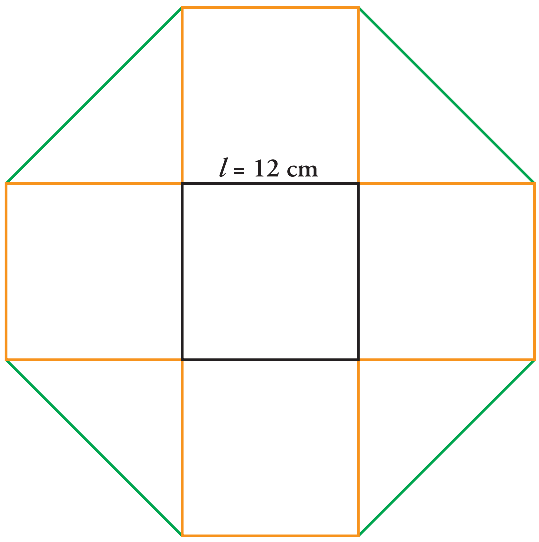
$a = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}3$ cm

Apotema del dodecágono: $a' = 17{,}3 + 20 = 37{,}3$ cm

24 **Sobre cada uno de los lados de un cuadrado construimos otro cuadrado.**

Unimos los vértices sueltos mediante segmentos.

Se obtiene así un octógono.

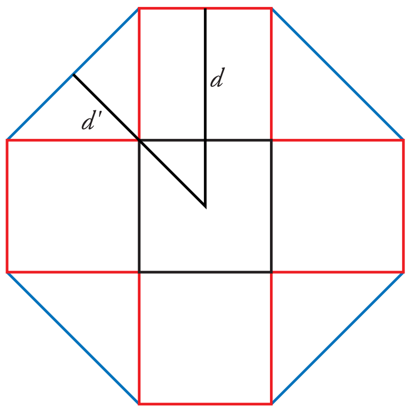


¿Crees que es regular? Justifica la respuesta.

Halla las distancias del centro del cuadrado a los lados verdes y a los lados naranjas del octógono.

No es regular porque los lados naranjas son más largos que los verdes.

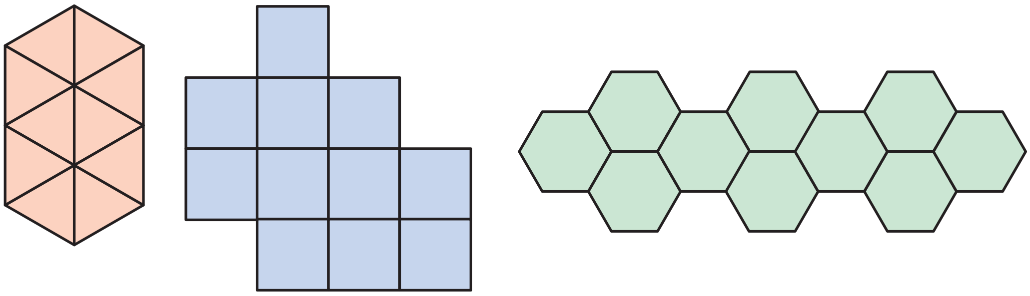
$$d = l + \frac{l}{2} = 12 + 6 = 18 \text{ cm}$$



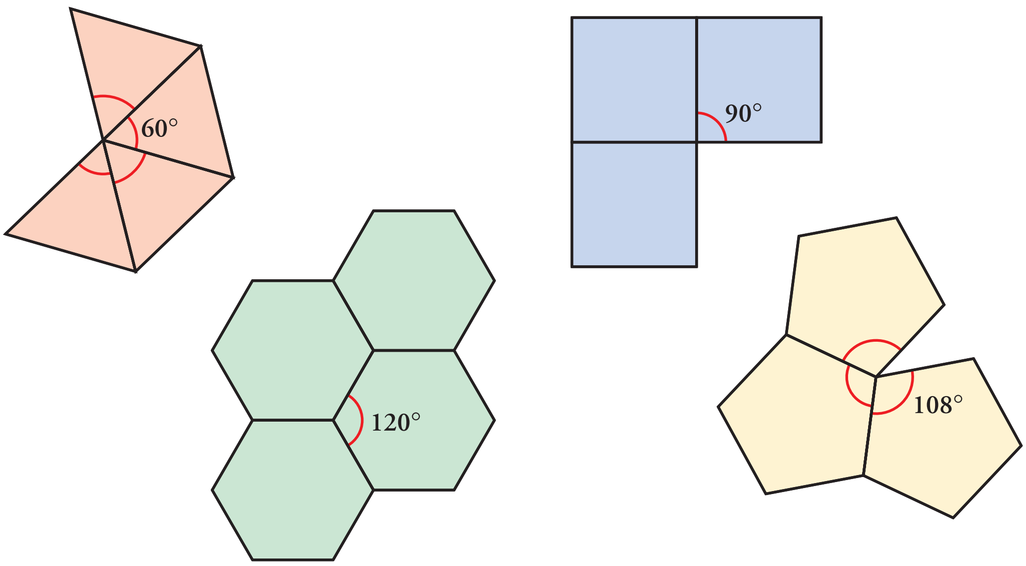
d' es igual a la diagonal del cuadrado:

$$d' = \sqrt{12^2 + 12^2} = 16{,}97 \text{ cm} \approx 17 \text{ cm}$$

25 **Podemos embaldosar el suelo con losetas cuadradas o triangulares regulares. También encajan bien unas con otras las losetas hexagonales regulares.**



Sin embargo, los pentágonos regulares no sirven para embaldosar el suelo. Explica qué tiene que ver esto con el ángulo de estos polígonos regulares.



El ángulo de un triángulo regular es 60°, divisor de 360° (360° : 60° = 6). Por eso coinciden 6 triángulos en cada vértice del embaldosado.

360° : 90° = 4. Coinciden 4 cuadrados en cada vértice.

El ángulo del hexágono regular es 120°:

360° : 120° = 3. Coinciden 3 hexágonos en cada vértice.

Sin embargo, el ángulo del pentágono regular, 108°, no es divisor de 360°. Por eso no encajan los pentágonos unos con otros para embaldosar el suelo.

Lo mismo les ocurre a los demás polígonos regulares.