12 Poliedros y cuerpos de revolución

El cíclope matemático

La tensión se apreciaba en el rostro de los presentes. La operación de cataratas parecía un éxito, pero la luz se fue apagando y Euler se quedó ciego.

Euler, que a sus 59 años derrochaba vitalidad, era el menos afectado de todos y bromeaba contando anécdotas de su vida.

–Si Federico el Grande de Prusia me viera ahora no sabría cómo llamarme –decía Euler, pues el monarca lo llamaba el *cíclope matemático*, porque había perdido un ojo en su juventud.

Euler continuaba con sus bromas y afirmaba:

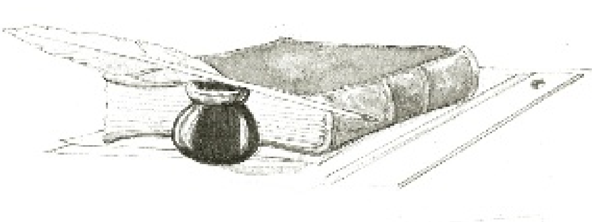
–¡Ahora me llamaría Polifemo! –pero solo él rió un chiste que a los demás les pareció inoportuno.

Recuperando la seriedad, Euler se dirigió a su familia:

–No os preocupéis, la vista no lo es todo; de hecho ahora evitaré distracciones y me concentraré más. Lo que sí lamento es no poder escribir o dibujar.

–No te preocupes por eso –le dijo su hijo–. Tú solo piensa y dicta, que yo estaré aquí para escribir y dibujar lo que tú imaginas.

Esto ocurría en 1766 en San Petersburgo. Varios años antes, durante su estancia en Prusia, Euler publicó uno de sus trabajos más conocidos: la relación de Euler, que afirma que, en todo poliedro simple, el número de caras más el de vértices es igual al número de aristas más 2.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **¿Quién fue Leonhard Euler? ¿Cuáles fueron sus aportaciones más importantes al estudio de las matemáticas?**

Una extensa biografía de Euler se encuentra en el apartado de historia de las matemáticas de esta página: http://divulgamat.net

Otros aspectos de su vida se pueden encontrar en esta biografía mucho más resumida: http://www.biografiasyvidas.com

2 **¿A qué episodio de la vida de Euler se refiere el texto? ¿Por qué Federico el Grande lo apodó cíclope matemático?**

En esta extensa biografía se puede encontrar la respuesta a esta pregunta: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/28-2-B-E.html

3 **El texto hace referencia a la relación de Euler, ¿qué otros descubrimientos matemáticos se le atribuyen a Euler en el campo de la geometría?**

Una enumeración de los mayores descubrimientos matemáticos de Euler se puede encontrar en: http://sauce.pntic.mec.es/~rmarti9/

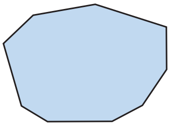
EVALUACIÓN INICIAL

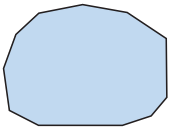
1 **Contesta si es verdadero o falso.**

a) Un polígono puede tener más lados que vértices.
b) Un polígono puede tener más ángulos que vértices.
c) Un polígono puede tener más diagonales que vértices.
d) Un polígono puede tener más lados que ángulos.
e) Un polígono puede tener más lados que diagonales.

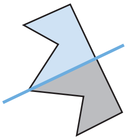
a) Falso.
b) Falso.
c) Verdadero cuando el polígono tiene más de 5 lados.
d) Falso.
e) Verdadero cuando el polígono tiene menos de 5 lados.

2 **Indica el nombre de estos polígonos:**


Eneágono


Endecágono

3 **Completa el polígono si la línea roja es un eje de simetría.**



Poliedros y cuerpos de revolución

EJERCICIOS

001 Observa la habitación donde te encuentras, e indica elementos que sugieren:

a) Planos paralelos.

b) Planos secantes.

c) Rectas paralelas.

d) Rectas secantes.

e) Rectas que se cruzan.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) El techo y el suelo, o las paredes opuestas.

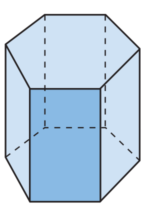
b) Una pared y el suelo, o las paredes consecutivas.

c) Las líneas verticales formadas por la intersección de las paredes.

d) Las líneas que convergen en cada esquina.

e) Las líneas verticales con las horizontales que no confluyen en la misma esquina.

002 Indica las posiciones de rectas y planos que observes en el siguiente cuerpo geométrico.



– Rectas paralelas: las aristas verticales, o los lados opuestos de los hexágonos.

– Rectas que se cruzan: las aristas de las bases que están en caras diferentes.

– Dos rectas secantes: cada arista vertical con cada arista horizontal que convergen en el mismo vértice.

– Planos paralelos: las dos bases, o cada par de caras opuestas.

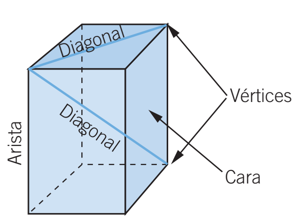
– Planos secantes: cada cara lateral con cada base.

003 Dos rectas secantes, ¿están siempre en el mismo plano?

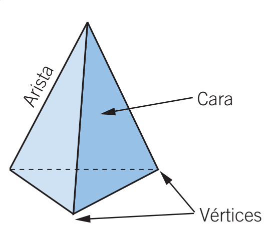
Sí, dos rectas secantes están siempre en el mismo plano.
Tomando una de las rectas y un punto de la otra. Se puede determinar un plano que contendrá a las dos rectas.

004 Nombra y dibuja los elementos de estos poliedros.

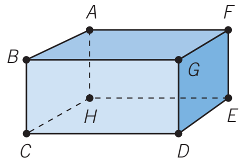
a)



b)

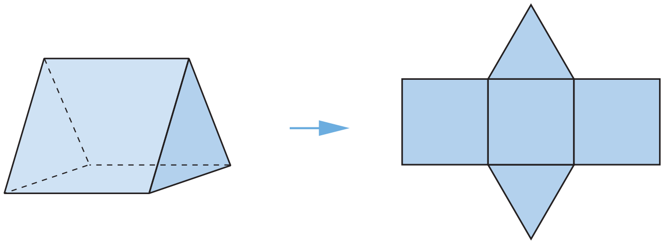


005 **Cuenta el número de vértices, caras y aristas de este poliedro.**



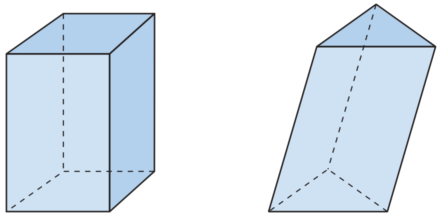
Vértices: 8
Caras: 6
Aristas: 12

006 **Dibuja el desarrollo plano del poliedro.**

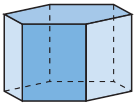


007 **Dibuja un prisma recto de base rectangular y un prisma oblicuo de base triangular.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

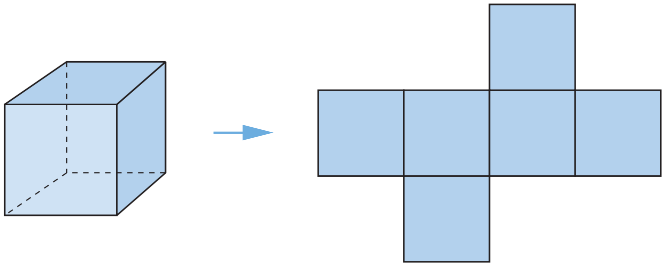


008 **Calcula el número de vértices, aristas y caras de un prisma cuya base es un hexágono.**



Vértices: 12
Aristas: 18
Caras: 8

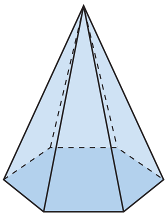
009 **Dibuja el desarrollo plano de un prisma de base cuadrada.**



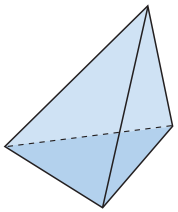
010 **El número de aristas de un prisma es 15. ¿Qué polígonos forman las bases?**

Las bases son pentágonos ($15 : 3 = 5$).

011 **Dibuja una pirámide hexagonal regular y una pirámide irregular de base triangular. ¿Cuántas aristas, vértices y caras tienen?**



Aristas: 12
Vértices: 7
Caras: 7



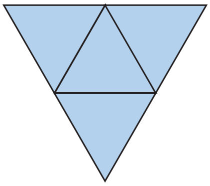
Aristas: 6
Vértices: 4
Caras: 4

012 **Averigua el polígono que forma la base de una pirámide en los siguientes casos.**

a) Si tiene 8 aristas y 5 vértices.
b) Si tiene 5 caras laterales y 6 vértices.
c) Si tiene 10 aristas.

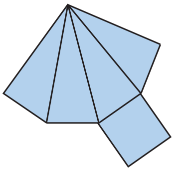
a) Cuadrilátero
b) Pentágono
c) Pentágono

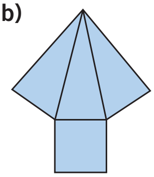
013 **¿Qué pirámide tiene todas sus caras iguales? Dibuja su desarrollo plano.**

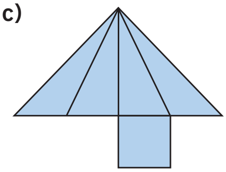


El tetraedro es una pirámide que tiene 4 caras que son triángulos equiláteros iguales.

014 **¿Cuáles de estas figuras son el desarrollo de una pirámide?**

a)


b)


c)


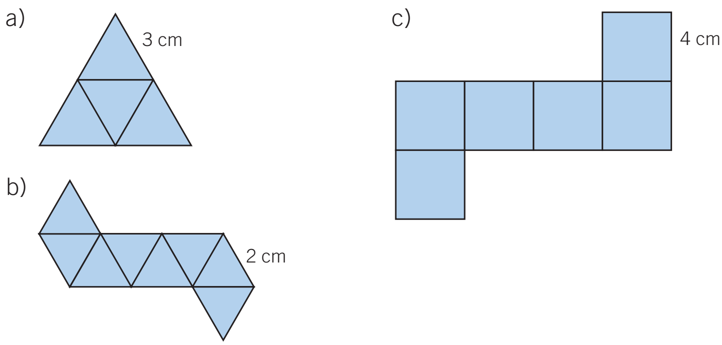
El desarrollo de una pirámide es el correspondiente al apartado a).

015 **Dibuja el desarrollo plano de los siguientes poliedros regulares.**

a) Un tetraedro de lado 3 cm.

b) Un octaedro de lado 2 cm.

c) Un cubo de lado 4 cm.



016 **¿Cómo son las aristas de un poliedro regular?**

Las aristas de un poliedro regular son iguales.

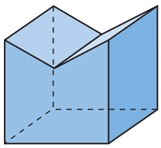
017 **¿Puede existir un poliedro regular con 6 triángulos equiláteros en cada vértice?**

No existe ningún poliedro regular de estas características porque la suma de los ángulos que confluyen en cada vértice debe ser menor que 360°. Como cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°, si tenemos 6 triángulos: $6 \cdot 60 = 360$.

018 **Comprueba que se cumple la fórmula de Euler.**

Poliedro	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	4	6	8	8
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

019 **Determina si este poliedro cumple la fórmula de Euler.**



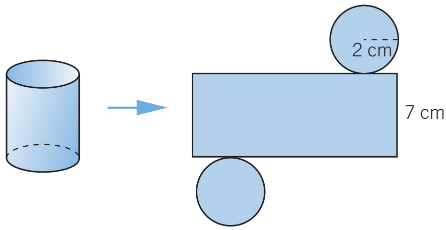
$$\left.\begin{array}{l}\text{Caras} = 7\\ \text{Vértices} = 10\\ \text{Aristas} = 15\end{array}\right\} \rightarrow 7 + 10 = 15 + 2$$

Se cumple la fórmula de Euler.

020 **Un poliedro que cumpla la fórmula de Euler, ¿puede tener el mismo número de caras y de aristas?**

No puede tener el mismo número de caras y de aristas, porque entonces el número de vértices del poliedro sería 2, lo cual es imposible.

021 **Dibuja el desarrollo de un cilindro que tiene 2 cm de radio y 7 cm de altura.**

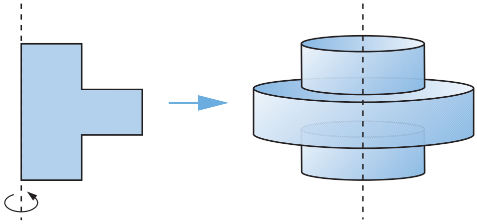


022 **El cartón de un rollo de papel tiene un diámetro de 4,6 cm y una altura de 9,7 cm. ¿Qué dimensiones tiene el desarrollo plano del cartón?**

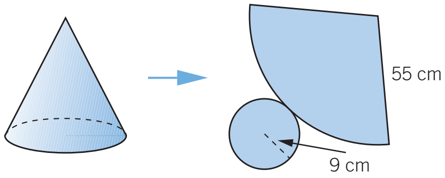
Es un rectángulo, por tanto, sus dimensiones son:

Largo: $4,6 \cdot \pi = 14,44$ cm   Altura: 9,7 cm

023 **Dibuja el cuerpo de revolución que forma esta figura al girar sobre su eje.**



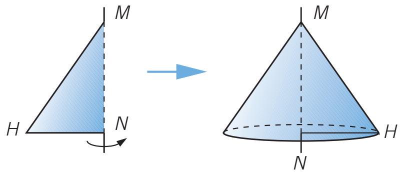
024 **Dibuja el desarrollo de un cono con radio de la base 9 cm y generatriz 55 cm.**



025 **Calcula la altura de un cono si la generatriz mide 13 cm y el radio de la base 5 cm.**

$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm mide la altura.

026 **En el triángulo MNH que engendra el cono, MN = 8 cm y NH = 6 cm. ¿Cuánto mide la generatriz MH?**



$MH = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ cm mide la generatriz.

ACTIVIDADES

027 **Considera las aristas de un cubo como rectas ilimitadas. ¿Cuántas posiciones hay?**

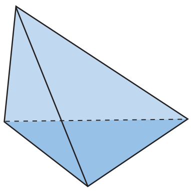
a) De rectas paralelas. **b) De rectas secantes.** **c) De rectas que se cruzan.**

a) Cada arista de la base es paralela a la arista opuesta de la misma base, y a otras dos aristas de la otra base. Las aristas laterales son todas paralelas.

b) Cada arista de la base es secante con dos aristas de la misma base y dos aristas laterales. Cada arista lateral es secante a dos aristas de cada base.

c) Cada arista se cruza con otras 4 aristas.

028 **Indica las posiciones de rectas y planos que encuentres en el siguiente cuerpo geométrico.**



– Todos los planos son secantes.

– Cada recta tiene otra recta con la que se cruza, y con el resto de rectas es secante.

029 **Considera las caras de un cubo como planos. ¿Cuántas posiciones de planos paralelos habrá?**

Cada cara del cubo es paralela a su opuesta.

030 **Contesta a estas preguntas y justifica tu respuesta.**

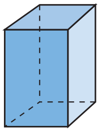
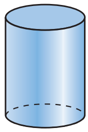
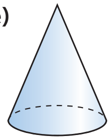
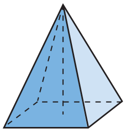
a) ¿Cuántas rectas pasan por un punto en el espacio?

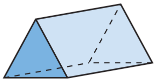
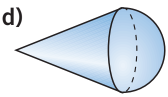
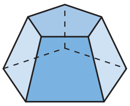
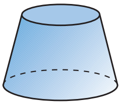
b) ¿Cuántos planos contienen a una recta en el espacio?

a) Pasan infinitas rectas. Si tomamos el punto como centro de una esfera, por cada par de puntos opuestos pasa una recta, y como la esfera tiene infinitos puntos, habrá infinitas rectas.

b) La contienen infinitos planos. Podemos basarnos en el ejemplo anterior, pero considerando un plano que corte a la esfera.

031 **Determina cuáles de estos cuerpos geométricos son poliedros.**

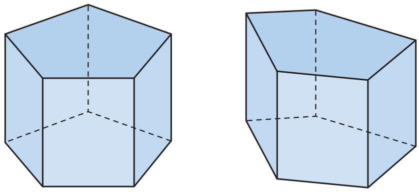
a) 
c) 
e) 
g) 

b) 
d) 
f) 
h) 

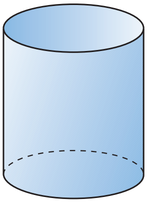
Son poliedros: a), b), f) y g).

032 **Dibuja un poliedro que tenga una base que sea un pentágono.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

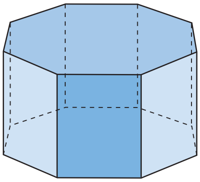


033 **Un cuerpo geométrico cuya base sea un círculo, ¿puede ser un poliedro?**



No puede ser un poliedro, porque el poliedro está limitado por caras que son polígonos.

034 **Observa la figura y contesta a las siguientes cuestiones.**



a) ¿Cuantos vértices, aristas y caras existen?

b) Señala las aristas que forman parte de rectas paralelas y las caras que generan planos paralelos.

c) Indica las rectas secantes y los planos secantes.

a) Tiene 16 vértices, 24 aristas y 10 caras.

b) Rectas paralelas: las verticales, las bases y alturas de cada rectángulo y cada arista de las bases con sus opuestas como octógono.
Planos paralelos: las dos bases y cada pareja de rectángulos opuestos.

c) Son rectas secantes las rectas que convergen en cada vértice.
Son planos secantes los que no son paralelos.

035 **Justifica si es verdadero o falso.**

a) Un poliedro puede tener el mismo número de vértices y de aristas.

b) Un poliedro puede tener igual número de caras que de aristas.

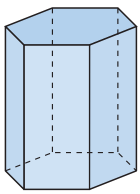
c) Un poliedro puede tener el mismo número de caras y de vértices.

a) No, porque por la fórmula de Euler, el poliedro tendría 2 caras, lo que no es posible.

b) No, porque el número de vértices del poliedro sería 2, y esto es imposible.

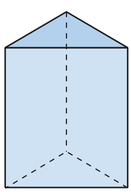
c) Sí, por ejemplo el tetraedro.

036 Dibuja un poliedro con hexágonos y rectángulos. ¿Cuántas caras se unen en un vértice?



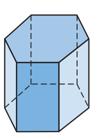
Es un prisma hexagonal. En cada vértice se unen 3 caras.

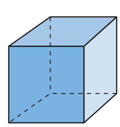
037 ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene un poliedro formado por dos triángulos y tres rectángulos?

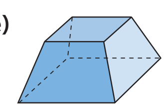


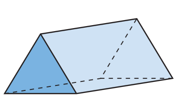
Es un prisma triangular. Tiene 5 caras, 9 aristas y 6 vértices.

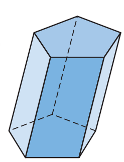
038 Determina cuáles de estos poliedros son prismas.

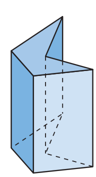
a) 

c) 

e) 

b) 

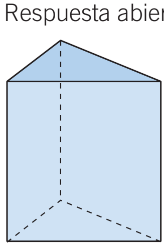
d) 

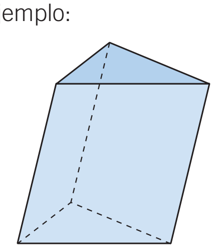
f) 

Son prismas: a), b), c), d) y f).

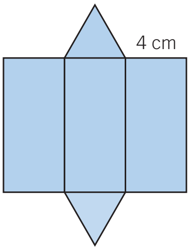
039 Dibuja un prisma recto de base triangular y otro oblicuo con la misma base.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

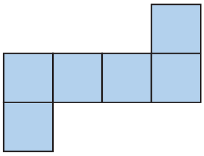




040 Dibuja el desarrollo de un prisma triangular cuya base es un triángulo equilátero de lado 4 cm.



041 Dibuja el desarrollo plano de un cubo de lado 3 cm.



042 Calcula el número de vértices, aristas y caras de un prisma cuyas bases son octógonos.

Un prisma octogonal tiene 16 vértices, 24 aristas y 10 caras.

043 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINAN LOS POLÍGONOS QUE FORMAN LAS BASES DE UN PRISMA, SABIENDO SU NÚMERO DE CARAS, ARISTAS O VÉRTICES?

Determina, en cada caso, los polígonos que forman la base de los siguientes prismas.

a) Número de vértices = 10

b) Número de caras = 9

c) Número de aristas = 18

PRIMERO. Se analiza el número de vértices, caras y aristas.

- El número total de vértices es el de las dos bases.

  a) Cada base tiene: $\frac{10}{2} = 5$ vértices

- El número total de caras corresponde a las caras laterales más las dos bases.

  b) Número de caras laterales: $9 - 2 = 7$

- El número total de aristas es el de las dos bases más el de las caras laterales, que es igual al de las bases.

  c) La base tiene: $\frac{18}{3} = 6$ aristas

SEGUNDO. Se estudia el resultado.

N.º de vértices de la base = N.º de caras laterales = N.º de aristas de la base

a) N.º de vértices de la base = 5 $\rightarrow$ Pentágono

b) N.º de caras laterales = 7 $\longrightarrow$ Heptágono

c) N.º de aristas de la base = 6 $\longrightarrow$ Hexágono

044 ¿Qué polígonos forman las bases de estos prismas?

a) Número de aristas: 21
b) Número de vértices: 20
c) Número de caras: 18

a) Heptágono
b) Decágono
c) Polígono de 16 lados, hexadecágono.

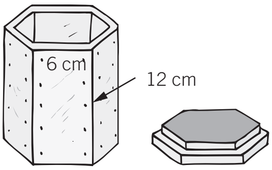
045 Sabiendo que el número de vértices de un prisma es 20, ¿cuántas caras tiene?

Es un prisma cuyas bases son decágonos; por tanto, tiene 12 caras.

046 Un prisma tiene 10 vértices. ¿Puedes indicar cómo son los polígonos de las bases? Si es posible, hazlo.

Si el prisma tiene 10 vértices, las bases son pentágonos.

047 Calcula la superficie de metal necesario para construir esta caja con forma de prisma regular hexagonal.

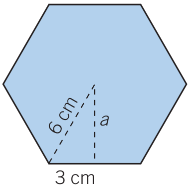


Cada cara lateral tiene una superficie de $6 \cdot 12 = 72$ cm^2, luego la superficie lateral es: $72 \cdot 6 = 432$ cm^2.

La superficie del fondo es igual a la superficie de la tapa, que es un hexágono regular cuyo lado mide 6 cm. Para calcular su superficie necesitamos conocer la apotema del hexágono, que hallamos mediante el teorema de Pitágoras.

Apotema $\rightarrow a = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,2$ cm

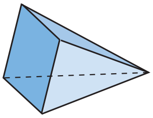
Superficie de la tapa $\rightarrow S = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5,2}{2} = 93,6$ cm^2

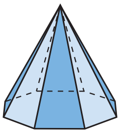


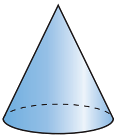
El fondo de la caja más la tapa tienen una superficie de $2 \cdot 93,6 = 187,2$ cm^2.

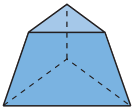
La superficie de metal necesario es: $432 + 187,2 = 619,2$ cm^2.

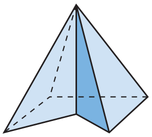
048 Determina cuáles de estos poliedros son pirámides.

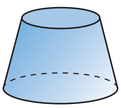
a)


c)


e)


b)


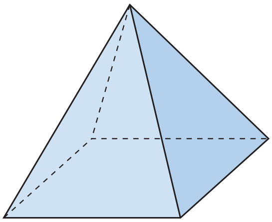
d)


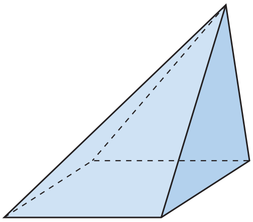
f)


Son pirámides: a), c) y d).

049 **Dibuja una pirámide recta de base cuadrangular y otra oblicua con la misma base.**

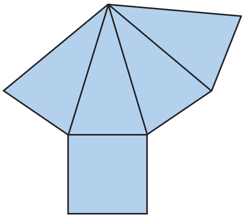
Respuesta abierta. Por ejemplo:

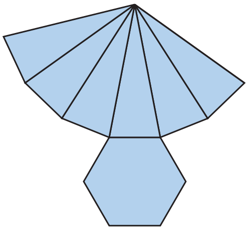




050 **Dibuja los desarrollos planos de una pirámide recta de base cuadrangular y de otra de base hexagonal.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:





051 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINA EL POLÍGONO QUE FORMA LA BASE DE UNA PIRÁMIDE SABIENDO SU NÚMERO DE CARAS, ARISTAS O VÉRTICES?

Determina, en cada caso, el polígono que forma la base de las siguientes pirámides.

a) Número de vértices $= 10$

b) Número de caras $= 9$

c) Número de aristas $= 18$

PRIMERO. Se analiza el número de vértices, caras y aristas.

- El número total de vértices es el de la base más uno.
  a) Número de vértices de la base: $10 - 1 = 9$
- El número total de caras es el de las caras laterales más uno.
  b) Número de caras laterales: $9 - 1 = 8$
- El número total de aristas es el de la base más el de las caras laterales, que es el mismo.
  c) La base tiene: $\frac{18}{2} = 9$ aristas

SEGUNDO. Se estudia el resultado.

N.º de vértices de la base = N.º de caras laterales = N.º de aristas de la base

a) N.º de vértices de la base $= 9$ → Eneágono

b) N.º de caras laterales $= 8$ ⟶ Octógono

c) N.º de aristas de la base $= 9$ ⟶ Eneágono

052 Averigua el polígono que forma la base de una pirámide en los siguientes casos.

a) 12 aristas y 7 vértices.
b) 8 caras laterales.
c) 8 aristas y 5 vértices.
d) 9 caras laterales y 10 vértices.
e) 20 aristas.
f) 13 vértices.
g) 10 caras laterales.
h) 13 caras en total y 24 aristas.

a) Hexágono
b) Octógono
c) Cuadrilátero
d) Eneágono
e) Decágono
f) Dodecágono
g) Decágono
h) Dodecágono

053 Una pirámide tiene 7 vértices. ¿Cuántos lados tendrá el polígono de la base?

La base es un polígono de 6 lados, es decir, un hexágono.

054 Entre los poliedros regulares, ¿hay alguna pirámide regular?

Sí, el tetraedro.

055 Sabiendo que el número de vértices de una pirámide es 11 y el número de aristas 20, ¿cuántas caras tiene en total?

Es una pirámide decagonal y tiene 11 caras.

056 ¿Cuál es el mínimo número de aristas de una pirámide?

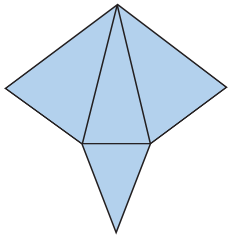
El mínimo número de aristas es 6 (pirámide triangular).

057 ¿Cuál de estas afirmaciones es falsa?

a) Una pirámide es recta cuando sus caras laterales son todas triángulos equiláteros.
b) La base de una pirámide puede ser un polígono cualquiera.

a) Falsa
b) Cierta

058 Dibuja el desarrollo de una pirámide recta cuya base sea un triángulo isósceles. Describe la relación entre sus caras laterales.



Tendrá dos caras laterales que son triángulos isósceles iguales, y la otra cara, un triángulo isósceles distinto a los anteriores.

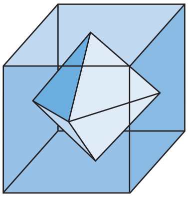
059 ¿Existe alguna pirámide cuyas caras laterales sean todas triángulos rectángulos?

Sí, es posible crear una pirámide triangular de base un triángulo equilátero, y los triángulos laterales rectángulos, con el ángulo recto en el vértice superior.

060 ¿Cuál es el mínimo número de vértices y de caras de una pirámide?

El mínimo número de vértices y caras es 4, es decir, de base triangular.

061 En el siguiente dibujo hay un cubo y, en su interior, un octaedro cuyos vértices están situados en el punto medio de cada cara del cubo. Completa la tabla.



	Cubo	Octaedro
Caras	6	8
Aristas	12	12
Vértices	8	6

062 ¿Cuántos vértices tendrá un poliedro de 8 caras y 18 aristas que verifica la fórmula de Euler?

Fórmula de Euler: $C + V = A + 2 \rightarrow 8 + V = 18 + 2 \rightarrow$
$\rightarrow V = 20 - 8 = 12$ vértices

063 Un poliedro tiene tantas aristas como un icosaedro y cinco veces más vértices que un tetraedro. Si cumple la relación de Euler, ¿cuántas caras tiene?

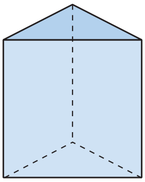
Aristas del icosaedro: 30

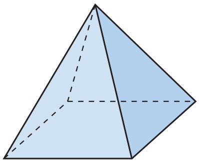
Vértices del tetraedro: 4

$C + V = A + 2 \rightarrow C + 20 = 30 + 2 \rightarrow C = 32 - 20 = 12$ caras

064 Dibuja un poliedro formado por triángulos y cuadrados. ¿Cumple la fórmula de Euler?

Respuesta abierta. Por ejemplo:



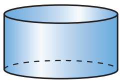
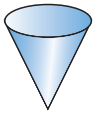


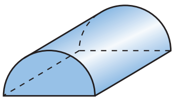
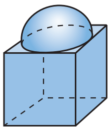
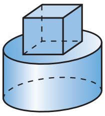
Los dos poliedros cumplen la fórmula de Euler.

Prisma: $5 + 6 = 9 + 2$

Pirámide: $5 + 5 = 8 + 2$

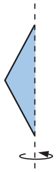
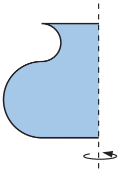
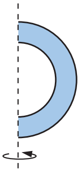
065 Determina cuáles son cuerpos de revolución.

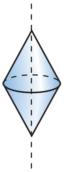
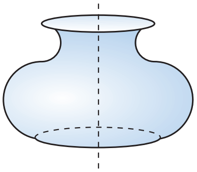
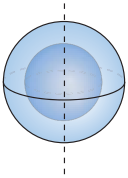
a)  **c)**  **e)** 

b)  **d)**  **f)** 

Son cuerpos de revolución: a), c) y e).

066 Dibuja los cuerpos que se generan al girar las siguientes figuras en torno a los ejes indicados.

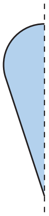
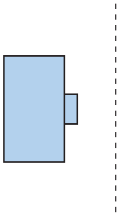
a)  **b)**  **c)** 

a)  b)  c) 

La figura c) es una esfera exteriormente, pero su interior es hueco.

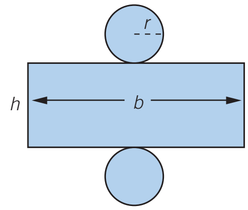
067 Dibuja los polígonos y el eje de estas figuras de revolución.

a)  **b)** 

a)  b) 

068 ●

Considera el desarrollo de este cilindro.



a) ¿Qué relación hay entre la longitud de la circunferencia de la base y el lado mayor del rectángulo?

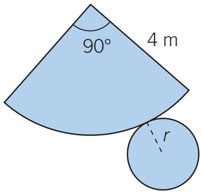
b) Si el radio del círculo de la base es 5 cm, ¿cuánto mide el lado mayor del rectángulo?

a) El lado mayor del rectángulo es igual a la longitud de la circunferencia de la base.

b) $L = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 31{,}4$ cm mide el lado mayor del rectángulo.

069 ●●

El desarrollo de un cono es el que se muestra en la figura. ¿Cuánto medirá el radio del círculo de la base?



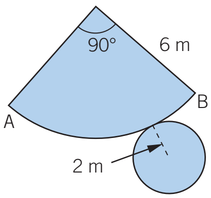
Longitud del arco del área lateral $= \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 90°}{360°} = 6{,}28$ cm

Longitud de la circunferencia de la base $= 2\pi r = 6{,}28$ cm

$r = \dfrac{6{,}28}{6{,}28} = 1$ cm mide el radio del círculo de la base.

070 ●●

¿Son correctos los datos que aparecen en la siguiente figura?



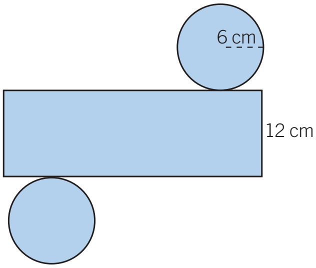
Longitud del arco $AB = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 90°}{360°} = 9{,}42$ cm

Longitud de la circunferencia de la base $= 2 \cdot \pi \cdot 2 =$
$= 12{,}56$ cm

Los datos no son correctos, pues no coinciden las longitudes.

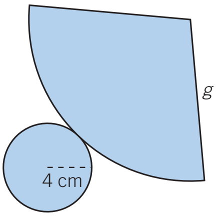
071 ●●

Dibuja el desarrollo de un cilindro cuya altura mide 12 cm y el radio de la base 6 cm.

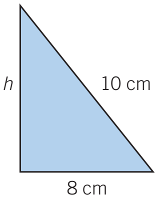


072 Dibuja el desarrollo de un cono con radio de la base 4 cm y altura 8 cm.

$g = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8{,}94$ cm



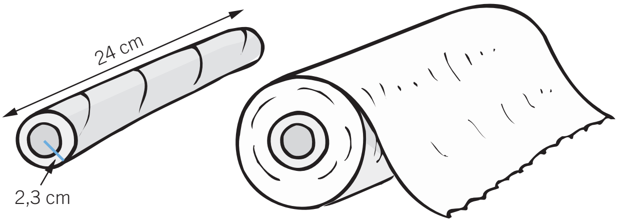
073 ¿Cuánto vale la altura de un cono cuyo radio de la base mide 8 cm y la generatriz 10 cm?



$h = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm

La altura del cono mide 6 cm.

074 El cilindro de cartón de un rollo de papel tiene un radio de 2,3 cm y un ancho de 24 cm. ¿Qué dimensiones tiene el cartón?



Ancho del cartón $= 2 \cdot \pi \cdot 2{,}3 = 14{,}44$ cm

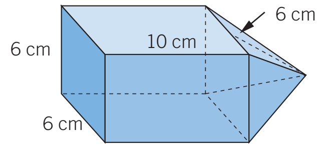
Dimensiones: $24 \times 14{,}44$ cm

075 Un orfebre ha realizado un brazalete cilíndrico cuyo exterior quiere cubrir de plata. El radio del brazalete es de 3 cm y su altura 4 cm. ¿Qué área tiene que cubrir de plata?

Longitud de la circunferencia de la base $= 2 \cdot \pi \cdot 3 = 18{,}84$ cm

Área que tiene que cubrir de plata $= 18{,}84 \cdot 4 = 75{,}36$ cm^2

076 ●● **Lola pinta joyeros de madera. Hoy ha pintado dos joyeros como el de la figura. ¿Qué área ha pintado en total?**



La base es un cuadrado de 6 cm de lado, luego su superficie es 36 cm^2.

Las caras laterales son cuatro rectángulos de base 6 cm y altura 10 cm.
Su superficie es: $4 \cdot 6 \cdot 10 = 240$ cm^2

El remate superior son las caras laterales de una pirámide de base cuadrada, que son 4 triángulos iguales de base 6 cm y altura 6 cm.

La superficie es: $4 \cdot \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 72$ cm^2.

El área que ha pintado es: $36 + 240 + 72 = 348$ cm^2.

077 ●●● **Delia trabaja en una fábrica donde hacen latas cilíndricas de conservas. Si las latas tienen un área de 500 cm^2 y un radio de 5 cm, ¿cuál es su altura?**

Área de la lata = Área de las dos bases + Área lateral

$$500\ cm^2 = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot h = 157 + 31{,}4 \cdot h$$

$$h = \frac{500 - 157}{31{,}4} = 10{,}9\ cm$$

La altura de la lata es 10,9 cm.

078 ●●● **Para la fiesta de fin de curso, los alumnos se van a disfrazar. Para ello necesitan un gorro con forma cónica. María, Susana y Carlos se van a hacer los gorros de tela. Si los radios son 8, 10 y 13 cm y las generatrices 28, 35 y 40 cm, respectivamente, ¿cuánta tela necesitarán como mínimo?**

Arco del gorro de radio 8 cm $= 2 \cdot \pi \cdot 8 = 50{,}24$ cm

$$\text{Área} = \frac{50{,}24 \cdot 28}{2} = 2\,208{,}5\ cm^2$$

Arco del gorro de radio 10 cm $= 2 \cdot \pi \cdot 10 = 62{,}8$ cm

$$\text{Área} = \frac{62{,}8 \cdot 35}{2} = 1\,099\ cm^2$$

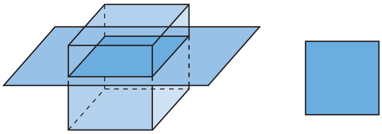
Arco del gorro de radio 13 cm $= 2 \cdot \pi \cdot 13 = 81{,}64$ cm

$$\text{Área} = \frac{81{,}64 \cdot 40}{2} = 1\,632{,}8\ cm^2$$

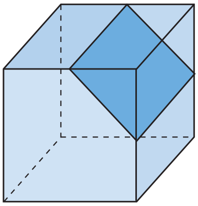
Tela necesaria para hacer los gorros:

$$2\,208{,}5 + 1\,099 + 1\,632{,}8 = 4\,940{,}3\ cm^2$$

079 Un plano paralelo a una cara de un cubo, y que corta al mismo, origina siempre un cuadrado.

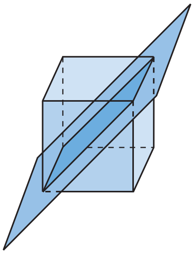


¿Se puede obtener un cuadrado cortando un cubo por un plano que no sea paralelo a ninguna cara?



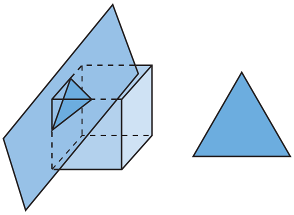
Sí, se puede hacer cortando de manera oblicua, de tal modo que sea paralelo a uno de los lados y el corte con las caras tenga la misma longitud que el lado.

080 **Si en un cubo, el plano trazado contiene a dos aristas opuestas, ¿qué cuadrilátero se obtiene?**



Se obtiene un rectángulo de dimensiones el lado del cubo y la diagonal de una de sus caras.

081 **Un plano que corta a tres caras de un cubo con un vértice común, origina un triángulo como el de la figura.**



a) ¿En qué casos el triángulo es isósceles?
b) ¿En qué casos es equilátero?
c) ¿Cuál es el mayor triángulo equilátero que se puede formar?

a) Cuando el plano contiene a una recta paralela a la diagonal de una de las caras.

b) Si contiene rectas paralelas a las tres diagonales de las caras.

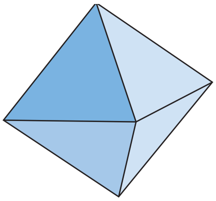
c) Si contiene a las tres diagonales de las caras.

082 **Observa el siguiente octaedro y di cómo obtendrías, al cortarlo por un plano:**

a) Un cuadrado.

b) Un rectángulo.

c) Un rombo.



a) Cuando el plano es paralelo al plano formado por el cuadrado que forman sus cuatro aristas horizontales.

b) En ningún caso se puede obtener un rectángulo.

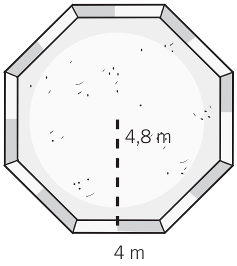
c) Cuando el plano pasa por dos vértices opuestos.

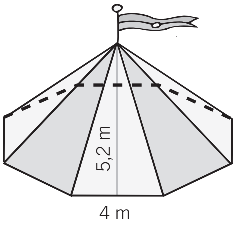
PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

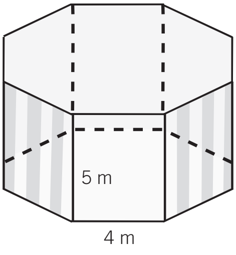
083 **Los hermanos Chinetti, dueños del CIRCO MUNDIAL DE LOS MUNDOS, han decidido comprar una carpa nueva para su espectáculo.**

La carpa que tienen actualmente está deteriorada y, además, se les ha quedado pequeña. Por eso quieren que la nueva carpa sea mayor que la anterior.

Después de analizarlo, han diseñado la siguiente figura.



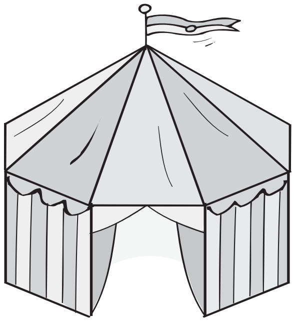




ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Qué forma tiene la parte inferior de la carpa? ¿Y sus caras laterales? ¿Cuáles son sus medidas?

b) ¿Qué forma tiene la parte superior de la carpa? ¿Y sus caras laterales? ¿Cuáles son sus medidas?



ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) La carpa se fabrica con una lona que cuesta 12 €/m² el material y 11 €/m² su confección. Calcula el coste total de la nueva carpa.

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Si el año pasado, el circo tuvo 9 456 espectadores en total, y los beneficios por espectador son aproximadamente de 5,50 €, ¿crees que podrían pagarlo con los beneficios de este año?

a) La parte inferior de la carpa tiene forma de prisma octógonal regular y sus caras laterales son rectángulos de 4 m de ancho y 5 m de altura.

b) La parte superior de la carpa tiene forma de pirámide octogonal regular y sus caras laterales son triángulos isósceles de 4 m de base y 5,2 m de altura.

c) Paredes $\rightarrow 8 \cdot 5 \cdot 4 = 160 \text{ m}^2$

Techo $\rightarrow 8 \cdot \dfrac{4 \cdot 5{,}2}{2} = 83{,}2 \text{ m}^2$

Suelo $\rightarrow \dfrac{4 \cdot 8 \cdot 4{,}8}{2} = 76{,}8 \text{ m}^2$

Total de lona $\rightarrow 160 + 83{,}2 + 76{,}8 = 320 \text{ m}^2$

Precio material $\rightarrow 320 \cdot 12 = 3\,840$ €

Precio confección $\rightarrow 320 \cdot 11 = 3\,520$ €

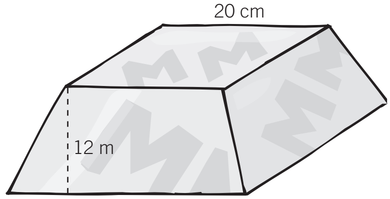
Precio total $\rightarrow 3\,840 + 3\,520 = 7\,360$ €

d) $9\,456 \cdot 5{,}50 = 52\,008$ €, sí podrán pagarlo.

Lo podrían pagar aunque el número de espectadores de este año sea muy inferior, si se mantiene el mismo beneficio por espectador.

084 ●●●

En la campaña de márketing elaborada para las tiendas de ropa MODAS MEDAS han diseñado esta caja.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si prolongas los lados, que no pertenecen a las bases, de las caras laterales, ¿qué poliedro obtendrías?

b) ¿Qué forma tienen las caras laterales de la caja? ¿Cuáles son sus medidas?

c) ¿Y qué forma tienen las bases? ¿Cuáles son sus medidas?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

d) A la gerente de la empresa le ha parecido una caja original y que responde al estilo de sus tiendas.

Al encargar su fabricación, tienen que enviar el desarrollo plano de la caja para elaborar una plantilla.

¿Sabrías dibujar su desarrollo plano?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

e) Tras ver varias muestras han decidido que la caja sea de cartón plastificado y con un tinte de color. El problema es su coste, pues cada metro cuadrado cuesta 2,20 €, incluyendo el material, el corte y el montaje de la caja. Este coste se tendrá que incrementar en el precio de cada prenda.

Si un vestido cuesta 60 €, ¿en cuánto incrementará su precio si le añadimos el coste de la caja? ¿Crees que es excesivo el incremento de precio?

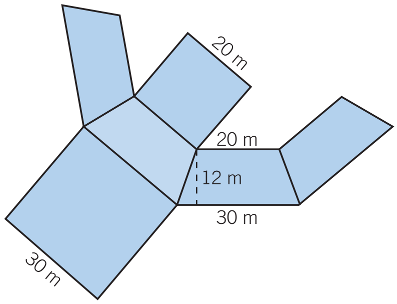
a) Se obtendría una pirámide.

b) Tienen forma de trapecio.

Medidas: base mayor 30 cm, base menor 20 cm y altura 12 cm.

c) Las bases tienen forma de cuadrado de 30 cm y de 20 cm de lado, respectivamente.

d) El desarrollo plano de la caja sería:



e) El área total de la caja es:

$$30^2 + 20^2 + \left(\frac{30 + 20}{2} \cdot 12\right) \cdot 4 = 900 + 400 + 1\,200 = 2\,500 \text{ cm}^2 = 0{,}25 \text{ m}^2$$

0,25 · 2,20 = 0,55 € incrementará el precio de la prenda.

Calculamos el porcentaje del precio final que representa 0,55 €:

$$\text{Porcentaje} = \frac{0{,}55 \cdot 100}{60} = 0{,}92\,\%$$

El incremento de precio no llega al 1 %, por lo cual no parece excesivo.