6 Derivada de una función

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Accidental

El signo de igual [le dijo Magnus a Ámbar] lo inventó Leibniz.

Pero ¿cómo sabes que es verdad?, dijo Ámbar.

Bueno, dijo Magnus. Supongamos que lo leí en un libro, porque no recuerdo exactamente ni cuándo ni cómo lo aprendí, pero supongamos que lo leí en un libro, lo cual lo hace presumiblemente cierto.

¿Por qué lo hace cierto el hecho de estar en un libro?, dijo Ámbar.

Porque si estaba en un libro era presumiblemente un libro de texto, dijo Magnus. Y los libros de texto suelen estar escritos por gente que ha estudiado el tema durante mucho tiempo y con profundidad suficiente para enseñárselo a gente que sabe mucho menos. Y además, los libros son editados por unos editores que comprueban los hechos antes de publicarlos. Y suponiendo que no lo aprendiera en un libro, sino que me lo enseñara un profesor, se podría aplicar el mismo criterio.

Pero ¿quieres decir que los profesores son editados por editores que comprueban los hechos antes de que los enseñen? […]

Ya sabes a qué me refiero, dijo. Venga ya. Déjame. En paz.

Lo único que estoy diciendo es qué pasaría si no fue Leibniz, dijo Ámbar. Lo único que estoy diciendo es: ¿y si fue otro?

Pero fue Leibniz, dijo Magnus.

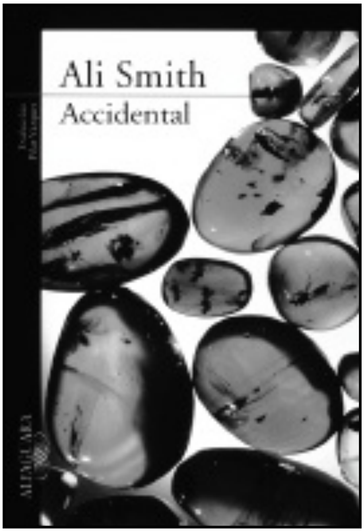
Pero ¿y si no fue?, dijo Ámbar. Pero fue, dijo Magnus. […]

No estoy enamorada de ti, le dijo Ámbar. Así que no lo olvides. Sencillamente los hombres de tu edad son apropiados por naturaleza para las mujeres de mi edad: se trata de elevarnos a la máxima potencia. Tú eres el exponente variable.

¿Había oído bien? ¿Se había inventado él al oír potencia lo del exponente variable? ¿Era una broma típica de Ámbar? Navegando en Internet en uno de los ordenadores nuevos de casa, uno de los muchos días de expulsión, preguntándole a Jeeves, en Ask.com., lo primero que se le venía a la cabeza, como quién mató a Kennedy, dónde estaba Osama Bin Laden y cómo murió Platón, […] y cuándo inventó Leibniz el signo de igual, Magnus descubrió que después de todo no había sido Leibniz, sino posiblemente un galés llamado Robert Recorde quien lo había inventado hacia 1550. El único dato relativo a Robert Recorde que aparecía en la página era que había muerto en prisión por deudas.

ALI SMITH

Accidental
Ali Smith



Un joven de 17 años, Magnus, pasa las vacaciones de verano con su familia en una ciudad de la costa inglesa. Siente remordimientos por haber colaborado en un «juego» que hizo que una compañera del instituto se suicidase.

Era feliz, generosa, muy querida. Sus amigos la querían. Vuelve a meter la cabeza debajo del edredón. Era inteligente. Era educada. Pertenecía a la Asociación de Gemología. En la Asociación de Gemología pulían piedras y hacían cosas con ellas, como joyas o gemelos. Seguro que guardaba las cosas que hacía en el tocador de su dormitorio. […] Ella no sabía quién era él. Ni él mismo tampoco lo sabía. Tiene suerte ella. De estar muerta. No puede sentir nada. Él tampoco siente nada. Pero no está muerto. Luego la noticia corrió por todo el instituto. Una chica de Deans se había suicidado en el cuarto de baño de su casa. Su madre o su hermano la habían encontrado. Oyó el rumor en clase de matemáticas. Charlie quiere ampliar la parte de atrás de su casa y va a construir una extensión de 18 metros cuadrados de suelo. Quiere utilizar el menor número de ladrillos posible, de modo que necesita saber cuál es el perímetro más pequeño que puede utilizar. Da la expresión del área en términos de x, y. El cálculo es la matemática de los límites, especialmente en lo referente a los tipos de cambio. Casi hubo una guerra por quién lo descubrió, si Leibniz o Newton. Leibniz inventó el signo $=$. Las matemáticas $=$ encontrar lo simple en lo complejo, lo finito en lo infinito. Se sienta en la moqueta, se agarra los pies. […] No habrá universidad. Ya no es probable que vaya. La universidad le da risa. El cálculo le da risa. Todo es una broma.

Durante ese verano conoce también a una mujer joven, Ámbar, con la que vive una aventura que tendrá graves consecuencias. Uno de los encuentros con ella se describe en el párrafo seleccionado.

Hay más referencias a las matemáticas en la novela, pero ya estos dos párrafos permiten plantear algunas cuestiones relacionadas con el cálculo infinitesimal y su origen.

La función $f(x) = e^x$ es una función con *exponente variable*.

Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(a+x) - f(a)}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{a+x} - e^a}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^a(e^x - 1)}{x} = e^a \cdot 1 = e^a$$

Derivada de una función

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ c) $h(x) = \ln 3x$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ d) $i(x) = x^3 - 2x + 1$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. c) $h(x)$ es continua en $(0, +\infty)$.

b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$. d) $i(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

002 Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 + x$ y $g(x) = -x + 5$, calcula el valor de las funciones compuestas que se indican.

a) $(g \circ f)(2)$ c) $(g \circ f)(x)$ e) $(f \circ f)(x)$ g) $(f \circ f)(1)$

b) $(f \circ g)(-3)$ d) $(f \circ g)(x)$ f) $(g \circ g)(x)$ h) $(g \circ g)(1)$

a) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(14) = -9$

b) $(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(8) = 200$

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + x) = -(3x^2 + x) + 5 = -3x^2 - x + 5$

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x + 5) = 3(-x + 5)^2 + (-x + 5) = 3x^2 - 31x + 80$

e) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x^2 + x) = 3(3x^2 + x) + (3x^2 + x) = 12x^2 + 4x$

f) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(-x + 5) = -(-x + 5) + 5 = x$

g) $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(4) = 52$

h) $(g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(4) = 1$

ACTIVIDADES

001 Halla la tasa de variación media de las funciones: $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = x^3 + 7$ en los intervalos $[0, 1]$ y $[-2, -1]$.

a) $T.V.M.\ ([0, 1]) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{2 - 1}{1} = 1$

$T.V.M.\ ([-2, -1]) = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{2 - 5}{1} = -3$

b) $T.V.M.\ ([0, 1]) = \dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \dfrac{8 - 7}{1} = 1$

$T.V.M.\ ([-2, -1]) = \dfrac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{6 - (-1)}{1} = 7$

002 El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene descrito por la fórmula $e = \dfrac{1}{3}t^2 + t$. Halla su velocidad media en $[1, 5]$.

$$T.V.M.\ ([1, 5]) = \frac{e(5) - e(1)}{5 - 1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 25 + 5 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m/s}$$

003 Calcula la derivada de estas funciones en $x = 2$.

a) $f(x) = 7x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7(2+h) + 1 - 15}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7h}{h} = 7$

b) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(2+h)^2} - \dfrac{1}{4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4 - (4 + 4h + h^2)}{4h(2+h)^2} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h - h^2}{4h(2+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-4 - h}{4(2+h)^2} = -\frac{1}{4}$$

004 Halla la derivada de las funciones en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (3 + 3h + h^2) = 3$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (12 + 6h + h^2) = 12$$

b) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right)\left(\sqrt{1+h} + 1\right)}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + h - 1}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2 + h - 2}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

005 Calcula las derivadas laterales de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h) + 3 - 5}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(2+h) + 1 - 5}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

006 **Halla las derivadas laterales de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x = 0$.**

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ **b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$**

a) $f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$

$f'(0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = -\infty$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\sqrt[4]{h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = +\infty$

$f'(0^-)$ no existe, ya que h es un número negativo y la función no está definida para números negativos $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

007 **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función en el punto $x = 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 2^+} (x + 1) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3 = f(2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 2$.

$f'(2^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(2+h)^2 - 1 - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{4h + h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} (4 + h) = 4$

$f'(2^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{(2+h) + 1 - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h}{h} = 1$

Las derivadas laterales existen, pero son distintas; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

008 **Decide si la función $f(x) = |x + 2|$ es continua y derivable en los siguientes puntos.**

a) $x = 0$ **b) $x = -2$** **c) $x = 3$** **d) $x = -5$**

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 2) = 2 = f(0) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

$f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(0+h) + 2 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1$

$f'(0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{(0+h) + 2 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h}{h} = 1$

Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} (x + 2) = \lim\limits_{x \to -2^-} (-x - 2) = 0 = f(-2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -2$.

$f'(-2^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(-2+h) + 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1$

$f'(-2^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-(-2+h) - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1$

Las derivadas laterales existen, pero no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = -2$.

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} (x+2) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x+2) = 5 = f(3) \to f(x)$ es continua en $x = 3$.

$$f'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(3+h)+2-5}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(3+h)+2-5}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 3$.

d) $\lim\limits_{x \to -5^+} (-x-2) = \lim\limits_{x \to -5^-} (-x-2) = 3 = f(-5) \to f(x)$ es continua en $x = -5$.

$$f'(-5^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-(-5+h)-2-3}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(-5^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(-5+h)-2-3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = -5$.

009 **Halla la función derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$ aplicando la definición.**
A partir del resultado, calcula la derivada de $f(x)$ en estos puntos.

a) $x = 1$ **b) $x = 2$**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 1 - (3x^2 - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6hx + 3h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

a) $f'(1) = 6$

b) $f'(2) = 12$

010 **Utiliza la definición para calcular la función derivada de la función $f(x) = x^3 + x^2$.**
Calcula, después, las derivadas sucesivas.
¿Existen todas hasta la derivada *n*-ésima?

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - (x^3 + x^2)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2hx + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + 2x + h) = 3x^2 + 2x$$

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) - (3x^2 + 2x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{6hx + 3h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} (6x + 3h + 2) = 6x + 2$$

$$f'''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6(x+h) + 2 - (6x+2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h}{h} = 6$$

$$f^{IV)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6-6}{h} = 0$$

A partir de la cuarta derivada todas las funciones derivadas son iguales a 0.

Derivada de una función

011 Calcula la derivada de estas funciones, y comprueba que se cumple que el resultado es igual a la suma de las derivadas de las funciones que las forman.

a) $f(x) = x - x^2$ b) $f(x) = x^3 + 2x$

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - 2hx - h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (1 - 2x - h) = 1 - 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} =$$
$$= 1 - \lim_{h \to 0} (2x + h) = 1 - 2x$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h) - (x^3 + 2x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + 2) = 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) + 2 = 3x^2 + 2$$

012 Halla las derivadas de $f(x) = 6x^2$ y $g(x) = -x$. ¿Cuál es la derivada de su producto? ¿Y de $\frac{f(x)}{g(x)}$?

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6(x+h)^2 - 6x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12hx + 6h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (12x + 6h) = 12x$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 12x(-x) + 6x^2(-1) = -18x^2$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{12x(-x) - 6x^2(-1)}{(-x)^2} = -6$$

013 Utiliza las definiciones de composición de funciones y de derivada para comprobar que se cumple la regla de la cadena.

$$[(g \circ f)(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

014 **Halla la derivada de la función $k(x) = \sqrt{2x+5}$ utilizando la definición de derivada, y comprueba que el resultado es el mismo que si aplicas la regla de la cadena.**

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+5}-\sqrt{2x+5}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2(x+h)+5}-\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x+2h+5-2x-5}{h\left(\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)+5}+\sqrt{2x+5}} =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

Si $f(x) = 2x+5 \rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)+5-(2x+5)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Si $g(x) = \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $k(x) = (g \circ f)(x)$, aplicando la regla de la cadena:

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

015 **Calcula la derivada de esta función, indicando los pasos que sigues para hallarla.**

$$f(x) = 5x^4 + 3x^2$$

Aplicamos la derivada de las funciones potenciales:

$(x^4)' = 4x^3$ $\qquad$ $(x^2)' = 2x$

Teniendo en cuenta las operaciones con derivadas:

$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x = 20x^3 + 6x$

016 **Halla la derivada de la siguiente función:**

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x^5}\right)^4$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x-2}{x^5}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot x^5 - (x-2)5x^4}{(x^5)^2} = \frac{4(x-2)^3}{x^{15}} \cdot \frac{x^5 - 5x^5 + 10x^4}{x^{10}} =$$

$$= \frac{(x-2)^3(-16x+40)}{x^{21}}$$

017 Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5\ln x + e^{4x}$ b) $f(x) = \log_3(-6x^2 \ln x)$

a) $f'(x) = 5 \cdot \dfrac{1}{x} + e^{4x} \cdot 4$

b) $f'(x) = \dfrac{-12x \ln x + (-6x^2)\dfrac{1}{x}}{-6x^2 \ln x \ln 3} = \dfrac{2\ln x + 1}{x \ln x \ln 3}$

018 Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^x \log_4 x^5$ b) $f(x) = \ln(3x^2 - x)^{-7}$

a) $f'(x) = e^x \log_4 x^5 + e^x \cdot \dfrac{5x^4}{x^5 \ln 4} = e^x \log_4 x^5 + e^x \cdot \dfrac{5}{x \ln 4}$

b) $f'(x) = \dfrac{-7(3x^2 - x)^{-8}(6x - 1)}{(3x^2 - x)^{-7}} = \dfrac{-7(6x - 1)}{3x^2 - x}$

019 Decide de qué tipo son las siguientes funciones, y halla la derivada de cada una de ellas.

a) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} 2x)$ c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^3 + 2}$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(\ln 2x)$ d) $f(x) = \operatorname{tg}(x^4 + 3x)$

a) $f'(x) = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x) \cdot \cos 2x \cdot 2$

b) $f'(x) = \cos(\ln 2x) \cdot \dfrac{2}{2x} = \dfrac{\cos(\ln 2x)}{x}$

c) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2}(x^3 + 2)^{-\frac{1}{2}} 3x^2}{1 + \left(\sqrt{x^3 + 2}\right)^2} = \dfrac{3x^2}{2(x^3 + 2)\sqrt{x^3 + 2}}$

d) $f'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2(x^4 + 3x))(4x^3 + 3)$

020 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \cos\sqrt{x^2 + x}$ c) $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{1 + x}{1 - x}$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x^2 + 3\cos^2 x$ d) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$

a) $f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + x}\right)\dfrac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}(2x + 1) = -\dfrac{(2x + 1)\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + x}\right)}{2\sqrt{x^2 + x}}$

b) $f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x + 6\cos x(-\operatorname{sen} x) = 2x\cos x^2 - 6\operatorname{sen} x \cos x$

c) $f'(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{1 + x}{1 - x}\right)\dfrac{1(1 - x) - (1 + x)(-1)}{(1 - x)^2} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{1 + x}{1 - x}\right)\dfrac{2}{(1 - x)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{1}{2(1 + x)\sqrt{x}}$

021 **Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en los intervalos [2, 3] y [2, 5].**
A partir de ella, determina la derivada en el punto $x = 2$.

$$T.V.M.\ ([2, 3]) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{6}$$

$$T.V.M.\ ([2, 5]) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{10}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2 - h}{2h(2 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2 + h)} = -\frac{1}{4}$$

022 **Halla las tasas de variación media de la superficie de un círculo cuando su radio pasa de medir 1 cm a medir 3 cm y de 3 cm a 5 cm. ¿Permanece constante si la variación del radio es la misma?**

La función que mide la superficie de un círculo según la longitud de su radio, x, es: $f(x) = \pi x^2$

$$T.V.M.\ ([1, 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9\pi - \pi}{2} = 4\pi$$

$$T.V.M.\ ([3, 5]) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{25\pi - 9\pi}{2} = 8\pi$$

Aunque la variación del radio es la misma, la variación de la superficie no permanece constante.

023 **Galileo demostró que, cuando un objeto cae libremente, es decir, prescindiendo de la resistencia del aire, la altura recorrida, en metros, y el tiempo transcurrido, en segundos, se relacionan mediante la fórmula: $h = \dfrac{1}{2}gt^2$, o, aproximadamente, $h = 5t^2$.**

a) Calcula las tasas de variación media entre 1 y 7 segundos y entre 1 y 5 segundos.

b) Halla la derivada de esta función en $x = 1$.

a) $T.V.M.\ ([1, 7]) = \dfrac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \dfrac{245 - 5}{6} = 40$

$T.V.M.\ ([1, 5]) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \dfrac{125 - 5}{4} = 30$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5(1 + h)^2 - 5}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{10h + 5h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (10 + 5h) = 10$

024 Utilizando la definición, calcula la derivada de las siguientes funciones en el punto $x = -1$.

a) $f(x) = 3x$ b) $g(x) = x^2$ c) $i(x) = x^3$ d) $j(x) = |x|$

a) $f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(-1+h)+3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = 3$

b) $g'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h + h^2}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} (-2+h) = -2$

c) $i'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{i(-1+h) - i(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^3 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h - 3h^2 + h^3}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} (3 - 3h + h^2) = 3$

d) $j'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{j(-1+h) - j(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|-1+h| - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-h-1}{h} = -1$

025 A partir de la definición, halla la derivada de las siguientes funciones en el punto $x = 0$.

a) $f(x) = ax + b$ c) $i(x) = ax^2 + b$
b) $g(x) = ax^2$ d) $j(x) = ax^2 + bx + c$

a) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah + b - b}{h} = a$

b) $g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} (ah) = 0$

c) $i'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{i(0+h) - i(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah^2 + b - b}{h} = \lim_{h\to 0} (ah) = 0$

d) $j'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{j(0+h) - j(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah^2 + bh + c - c}{h} = \lim_{h\to 0} (ah + b) = b$

026 Utilizando la definición, calcula las derivadas laterales de estas funciones en $x = 2$.

a) $f(x) = |2 - x|$ b) $g(x) = |x^2 - 4|$

a) $f(x) = \begin{cases} -2 + x & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2+2+h}{h} = 1$

$f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2-(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$g'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4h + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} (4+h) = 4$$

$$g'(2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(2+h)^2 + 4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-4h - h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^-} (-4-h) = -4$$

Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow g(x)$ no es derivable en $x = 2$.

027 **Mediante la definición, halla las derivadas laterales de la siguiente función en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

028 **Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en $x = 1$.

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2 - (1+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^2 - 2h - 3}{h} = -\infty$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h + h^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^-} (2+h) = 2$$

029 **Estudia si la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua y derivable en $x = 0$.**

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

030 **Demuestra que la siguiente función es continua en el punto $x = 1$, pero no es derivable en él.**

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Contradice este hecho alguno de los teoremas o propiedades estudiados en la unidad?

b) Pon un ejemplo de una función que sea derivable y discontinua en un punto.

$\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-x+1) = 0 = f(1) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 1$.

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} (2+h) = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(1+h)+1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales no son iguales, por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

a) No, ya que la continuidad no implica derivabilidad.

b) No existe, pues si una función es discontinua en un punto no puede ser derivable en él.

031 **Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x \le 2 \\ -2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Si $x > 2$: $f(x) = -2x \rightarrow$ Función polinómica; por tanto, continua en $(2, +\infty)$.
- Si $x < 2$: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \rightarrow$ Función racional, continua en $(-\infty, 2)$, salvo en $x = 1$.
- Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty \\ f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 1\text{; por tanto, no es derivable en } x = 1.$$

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-1} = 3 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-2x) = -4 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 2\text{, luego no es derivable en } x = 2.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Así, la función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

032 Se considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x+2 & \text{si } -4 \le x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

- Si $x < -4$: $f(x) = -1 \to$ Función constante; por tanto, continua en $(-\infty, -4)$.
- Si $-4 < x < 2$: $f(x) = x + 2 \to$ Función polinómica; por tanto, continua en (4, 2).
- Si $x > 2$: $f(x) = \dfrac{8}{x} \to$ Función racional, por tanto, continua en $(2, +\infty)$.
- Si $x = -4$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-4^-) = \lim\limits_{x\to -4^-} (-1) = -1 \\ f(-4^+) = \lim\limits_{x\to -4^+} (x+2) = -2 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ no es continua en } x = -4\text{; por tanto, no es derivable en } x = -4.$$

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{8}{x} = 4 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4 = f(2)$$

$\to f(x)$ es continua en $x = 2$.

Así, la función es continua en $\mathbb{R} - \{-4\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -4 \\ 1 & \text{si } -4 < x < 2 \\ -\dfrac{8}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 1 \\ f'(2^+) = -2 \end{array}\right\} \to \text{Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

Luego la función es derivable en $\mathbb{R} - \{-4,\ 2\}$.

033 Considera la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ a + bx & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Determina a y b para que sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Para esos valores, estudia la derivabilidad de $f(x)$.

a)
- Si $x < 0$: $f(x) = x^2 \to$ Función polinómica; por tanto, continua en $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < 1$: $f(x) = a + bx \to$ Función polinómica; por tanto, continua en (0, 1).
- Si $x > 1$: $f(x) = 3 \to$ Función constante; por tanto, continua en $(1, +\infty)$.

La función es continua en $\mathbb{R}$ si lo es en los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

- Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (a + bx) = a \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to a = 0$$

- Si $a = 0$, para que la función sea continua en $x = 1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (bx) = b \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} 3 = 3 \end{array}\right\} \to f(1^-) = f(1^+) = f(1) \to b = 3$$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 3 \end{array}\right\} \to$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 0 \end{array}\right\} \to$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

Luego la función es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

034 **Sea f la función definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x + a & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

a) Encuentra el valor de a para que f sea continua.

b) Comprueba si es derivable en $x = 3$.

a)
- Si $x > 3$: $f(x) = x^2 - 2x \to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(3, +\infty)$.
- Si $x < 3$: $f(x) = 2x + a \to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 3)$.
- Para que la función sea continua en $x = 3$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3) = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x + a) = 6 + a \\ f(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x) = 3 \end{array}\right\} \to f(3^-) = f(3^+) = f(3) \to 6 + a = 3 \to a = -3$$

b) La función solo puede ser derivable si es continua, por lo que consideramos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$f'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} (4 + h) = 4$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2(3+h) - 3 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

Las derivadas laterales existen, pero no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

035 Considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde a es un número real.

a) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y comprueba que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) ¿Para qué valor del parámetro a la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$?

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{ax} = 1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$$

$f(0) = e^{a\cdot 0} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \to f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) $$f'(x) = \begin{cases} ae^{ax} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$, las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\} \to a = 2$$

036 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

a) Calcula a para que f sea continua en $x = 2$.

b) Para el valor obtenido, ¿es f derivable en $x = 2$?

a) Para que la función sea continua en $x = 2$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2) = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2+1) = 4a+1 \\ f(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (e^{2-x}+2) = 3 \end{array}\right\} \to f(2^-) = f(2^+) = f(2) \to 4a+1 = 3 \to a = \frac{1}{2}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ -e^{2-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 2 \\ f'(2^+) = -1 \end{array}\right\} \to$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

037 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -4x-3 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2-1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{k+2}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Calcule el valor que debe tomar el parámetro k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$ y estudie su derivabilidad para el valor de k obtenido.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 2)

- Si $x < -1$: $f(x) = -4x - 3 \rightarrow$ Función polinómica; por tanto, continua en $(-\infty, -1)$.
- Si $-1 < x < 1$: $f(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow$ Función polinómica, luego, continua en $(-1, 1)$.
- Si $x > 1$: $f(x) = \dfrac{k+2}{x} \rightarrow$ Función racional discontinua en $x = 0$; por tanto, continua en $(1, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x = -1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(-1) = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1^-) = \lim\limits_{x \to -1^-} (-4x - 3) = 1 \\ f(-1^+) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x^2 - 1) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1)$$

$\rightarrow f(x)$ es continua en $x = -1$.

- Para que la función sea continua en $x = 1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = k + 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 - 1) = 1 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{k+2}{x} = k + 2 \end{array}\right\} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) = f(1) \rightarrow k + 2 = 1 \rightarrow k = -1$$

$$\text{Si } k = -1\text{: } f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -1 \\ 4x & \text{si } -1 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = -4 \\ f'(-1^+) = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales existen y son iguales}$$

$\rightarrow f(x)$ es derivable en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 4 \\ f'(1^+) = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las derivadas laterales no son iguales}$$

$\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

038 **Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

con a y $b \in \mathbb{R}$.

a) Calcula a y b para que la función sea continua.

b) Para esos valores de a y b, calcula la derivada de f donde exista.

a)
- Si $x < 0$: $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \rightarrow$ Función racional; por tanto, continua en $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < 3$: $f(x) = ax + b \rightarrow$ Función polinómica; por tanto, continua en $(0, 3)$.
- Si $x > 3$: $f(x) = x - 5 \rightarrow$ Función polinómica; por tanto, continua en $(3, +\infty)$.

- Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2+1} = 1 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax+b) = b \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to b = 1$$

- Consideramos que $b = 1$, entonces para que la función sea continua en $x = 3$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3) = 3a + 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} (ax+1) = 3a+1 \\ f(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-5) = -2 \end{array}\right\} \to f(3^-) = f(3^+) = f(3) \to 3a+1 = -2 \to a = -1$$

b) Si $a = -1$ y $b = 1$ entonces: $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = -1 \end{array}\right\} \to \text{Las derivadas laterales no son iguales}$$
$\to f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -1 \\ f'(3^+) = 1 \end{array}\right\} \to \text{Las derivadas laterales no son iguales}$$
$\to f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

039 **Calcula los valores de a y b para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua para cualquier valor de x.
Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos.

- Si $x < 0$: $f(x) = 3x + 2 \to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < \pi$: $f(x) = x^2 + 2a\cos x \to$ Función polinómica y trigonométrica; por tanto, continua en $(0, \pi)$.
- Si $x > \pi$: $f(x) = ax^2 + b \to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(\pi, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 2a$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x+2) = 2 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2a\cos x) = 2a \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to 2a = 2 \to a = 1$$

Consideramos que $a = 1$, entonces para que la función sea continua en $x = \pi$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(\pi) = \pi^2 + b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi^-) = \lim\limits_{x \to \pi^-} (x^2 + 2\cos x) = \pi^2 - 2 \\ f(\pi^+) = \lim\limits_{x \to \pi^+} (x^2 + b) = \pi^2 + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to f(\pi^-) = f(\pi^+) = f(\pi) \\ \to \pi^2 - 2 = \pi^2 + b \to b = -2 \end{array}$$

Si $a = 1$ y $b = -2$ entonces: $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2sen\,x & \text{si } 0 < x < \pi \\ 2x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-) = 2\pi \\ f'(\pi^+) = 2\pi \end{array}\right\} \rightarrow$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = \pi$.

040 **Decide si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es derivable en $x = 1$.**

Para que una función sea derivable en un punto ha de ser continua, y para ser continua los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con el valor de la función en dicho punto; en este caso, con $f(1) = 1$:

$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ no es continua en $x = 1$; por tanto, no es derivable en $x = 1$.

041 **Demuestra que la función $f(x) = |x|^3$ es derivable en $x = 0$.**

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|^3}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^2 = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|^3}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-h^2) = 0$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, luego $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

042 **Razona si las siguientes funciones son derivables en los puntos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.**

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ **b)** $g(x) = x|x + 2|$

a) • Si $x = -2$: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -1 = f(-2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -2$.

• Si $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ no es continua en $x = 0$; por tanto, no es derivable en $x = 0$.

• Si $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 1$.

Estudiamos la derivabilidad en los puntos en los que la función es continua:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

• Si $x = -2$: $f'(-2) = -\dfrac{1}{2} \rightarrow f(x)$ es derivable en $x = -2$.

• Si $x = 1$: $f'(1) = -2 \rightarrow f(x)$ es derivable en $x = 1$.

b) $g(x) = \begin{cases} x(x+2) & \text{si } x \geq -2 \\ -x(x+2) & \text{si } x < -2 \end{cases}$

- Si $x = -2$: $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = 0 = g(-2) \rightarrow g(x)$ es continua en $x = -2$.
- Si $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0 = g(0) \rightarrow g(x)$ es continua en $x = 0$.
- Si $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 3 = g(1) \rightarrow g(x)$ es continua en $x = 1$.

Estudiamos la derivabilidad en estos puntos:

$g'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x > -2 \\ -2x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

- Si $x = -2$: $\left.\begin{array}{l} g'(-2^-) = 2 \\ g'(-2^+) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $g(x)$ no es derivable en $x = -2$.
- Si $x = 0$: $g'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow g(x)$ es derivable en $x = 0$.
- Si $x = 1$: $g'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \rightarrow g(x)$ es derivable en $x = 1$.

043 **Se considera la función:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Estudie su derivabilidad en $x = 0$.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

Una función solo puede ser derivable si es continua.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -3 = f(0) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 5 \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Las derivadas laterales no son iguales $\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

044 **Sea la función f definida mediante:** $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudie la derivabilidad de f en $x = -1$ y en $x = 1$.

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 2)

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Si $x < 1$: $f(x) = x^2 - x + 1 \rightarrow$ Función polinómica; por tanto, continua en $(-\infty, 1)$ $\rightarrow$ Es continua en $x = -1$.

  $f'(-1) = -3 \rightarrow f(x)$ es derivable en $x = -1$.
- Para que la función sea derivable en $x = 1$ ha de ser continua en este punto, por lo que los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = 0$:

  $\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - x + 1) = 1 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(1^-) \neq f(1^+) \rightarrow$ No es continua en $x = 1$ $\rightarrow$ No es derivable en $x = 1$.

045 **Determina el valor de a, si existe, para el cual la siguiente función es derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable, en primer lugar, tiene que ser continua.

La función es continua en $x = 0$ si los límites laterales son iguales y coinciden con $f(0) = \cos 0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \cos x = 1 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + a) = a \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \to$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ si $a = 1$.

046 **Sea la función definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Halla los valores que deben tener a y b para que sea derivable en $x = 0$.

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto, por lo que los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to b = 0$$

Una vez que comprobamos que es continua en $x = 0$, para que la función sea derivable en dicho punto las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \to a = 1$$

047 **Considera la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$**

Obtén los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.

Una función solo puede ser derivable en todos los puntos si es continua en ellos:

- Si $x < 1$: $f(x) = -x^3 + x^2 \to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 1)$.
- Si $x > 1$: $f(x) = ax^2 + b \to$ Función polinómica, por tanto, continua en $(1, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x = 1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = a - b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^3 + x^2) = 0 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax - b) = a - b \end{array}\right\} \to f(1^-) = f(1^+) = f(1) \to a - b = 0 \to a = b$$

La función es derivable en $x = 1$ si las derivadas laterales existen y son iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} \to a = -1 \to b = -1$$

048 **Determina los valores de *a* y *b* para que la función sea derivable en todos los puntos.**

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{a}{x} & \text{si } -1 < x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $-1 < x < 1$: $f(x) = \dfrac{a}{x}$ → Función racional, no continua en $x = 0$; por tanto, no es derivable en $x = 0$.

Así, no existen valores de a y b para los que la función sea derivable en todos los puntos.

049 **Halla los valores que deben tener *a* y *b* para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + \operatorname{sen} x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto, por lo que los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln(e + \operatorname{sen} x) = 1 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 + ax + b) = b \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to b = 1$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$, las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{e + \operatorname{sen} x} & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \dfrac{1}{e} \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{e}$$

050 **Considera la función definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} 5 + \operatorname{sen} x & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina los valores que deben tener *a* y *b* para que sea derivable en $x = 0$.

Para que la función sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en este punto, por lo que los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 5$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (5 + \operatorname{sen} x) = 5 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + ax + b) = b \end{array}\right\} \to f(0^-) = f(0^+) = f(0) \to b = 5$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$, las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ -2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \to a = 1$$

051 **Demuestra que la siguiente función es derivable para todos los valores de *x*.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ sen \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La función es derivable para todos los valores de x solo si es continua en ellos.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$sen\dfrac{1}{x}$ función acotada $\rightarrow f(0) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 sen\dfrac{1}{x} = 0 \rightarrow f(x)$ es continua.

$f'(x) = 2xsen\dfrac{1}{x} - cos\dfrac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 sen\dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} hsen\frac{1}{h} = 0 \rightarrow f(x) \text{ es derivable.}$$

052 **Calcula razonadamente los valores de *m* y *n* para que la función sea derivable en $x = 4$.**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ ha de ser continua en este punto, por lo que los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(4) = 16 + 4m + n$:

$$\left.\begin{array}{l} f(4^-) = \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{25 - x^2} = 3 \\ f(4^+) = \lim\limits_{x \to 4^+} (x^2 + mx + n) = 16 + m + n \end{array}\right\} \rightarrow f(4^-) = f(4^+) = f(4) \rightarrow 16 + m + n = 3$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$, las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } -5 < x < 4 \\ 2x + m & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = -\dfrac{4}{3} \\ f'(4^+) = 8 + m \end{array}\right\} \rightarrow 8 + m = -\frac{4}{3} \rightarrow m = -\frac{28}{3}$$

Así: $16 - \dfrac{28}{3} + n = 3 \rightarrow \dfrac{20}{3} + n = 3 \rightarrow n = -\dfrac{11}{3}$

053 **Sea *f* la función definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener *a* y *b* para que *f* sea derivable.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

Una función solo puede ser derivable si es continua.

- Si $x < 1$: $f(x) = ax^2 + 1 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(-\infty, 1)$.
- Si $x > 1$: $f(x) = x^2 + bx + 3 \rightarrow$ Función polinómica, por tanto, continua en $(1, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x = 1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = 4 + b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax^2 + 1) = a + 1 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + bx + 3) = 4 + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) = f(1) \\ \quad \rightarrow a + 1 = 4 + b \rightarrow a - b = 3 \end{array}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ 2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es derivable en $x = 1$ si las derivadas laterales existen y son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 2a \\ f'(1^+) = 2 + b \end{array}\right\} \rightarrow 2a = 2 + b \rightarrow 2a - b = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} a - b = 3 \\ 2a - b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

054 **Utilizando la definición, halla la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 123$ **c)** $f(x) = x^3$

b) $f(x) = 3x^2$ **d)** $f(x) = ax$

a) $f'(x) = 0$ c) $f'(x) = 3x^2$

b) $f'(x) = 6x$ d) $f'(x) = a$

055 **A partir de la definición, calcula la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **c)** $f(x) = sen\, x$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ **d)** $f(x) = cos\, x$

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{xh(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen\,(x+h) - sen\, x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen\, x \cdot cos\, h + cos\, x \cdot sen\, h - sen\, x}{h} = cos\, x$$

d) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cos\,(x+h) - cos\, x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cos\, x \cdot cos\, h - sen\, x \cdot sen\, h - cos\, x}{h} = -sen\, x$$

056 Halle la función derivada de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ y simplifique el resultado.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 2)

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln x - \ln(x+1)$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$$

057 Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = x^2$

c) $h(x) = x^3$

d) $i(x) = \cos x$

e) $j(x) = \operatorname{sen} x$

f) $k(x) = \operatorname{tg} x$

a) $f'(x) = 2$
$f''(x) = 0$
$f'''(x) = 0$

b) $g'(x) = 2x$
$g''(x) = 2$
$g'''(x) = 0$

c) $h'(x) = 3x^2$
$h''(x) = 6x$
$h'''(x) = 6$

d) $i'(x) = -\operatorname{sen} x$
$i''(x) = -\cos x$
$i'''(x) = \operatorname{sen} x$

e) $j'(x) = \cos x$
$j''(x) = -\operatorname{sen} x$
$j'''(x) = -\cos x$

f) $k'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$k''(x) = 2\operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)$
$k'''(x) = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 + 2\operatorname{tg} x \cdot 2\operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = (2 + 4\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

058 Halla los puntos en los que la función $h(x) = \ln x$ es derivable, y calcula su primera y segunda derivadas.

La función es continua en su dominio, esto es, en $(0, +\infty)$.

$h'(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow h(x)$ es derivable en $(0, +\infty)$.

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

059 **Obtén los puntos en los que las siguientes funciones son derivables, y calcula las dos primeras derivadas de cada una de ellas.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $v(x) = \begin{cases} 3x+4 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

b) $g(x) = x + |x-2|$

a) $f(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\} \to f(1^-) \neq f(1^+) \to f(x) \text{ no es continua en } x = 1; \text{ por tanto, no es derivable en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Así, $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) $g(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$g(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} g(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2 = 2 \\ g(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x-2) = 2 \end{array}\right\} \to g(2^-) = g(2^+) = g(2) \to g(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(2^-) = 0 \\ g'(2^+) = 2 \end{array}\right\} \to \text{Las derivadas laterales existen, pero son distintas; por tanto, } g(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

Así, $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$g''(x) = 0 \quad \text{si } x \neq 2$

c) $v(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} v(-1^-) = \lim\limits_{x\to -1^-} (3x+4) = 1 \\ v(-1^+) = \lim\limits_{x\to -1^+} (-2x-1) = 1 \end{array}\right\} \to v(2^-) = v(2^+) = v(2) \to v(x) \text{ es continua en } x = -1.$$

$$v'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} v'(-1^-) = 3 \\ v'(-1^+) = -2 \end{array}\right\} \to \text{Las derivadas laterales existen, pero son distintas; por tanto, } v(x) \text{ no es derivable en } x = -1.$$

Así, $v(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$v''(x) = 0 \quad \text{si } x \neq -1$

060 Determina la derivada n-ésima de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x}$

b) $g(x)=\cos 2x$

c) $h(x)=e^{-x}$

a) $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$f^{IV)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$

Si $n\geq 4$, la derivada n-ésima es: $f^{n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-3)(2n-5)\cdot\ldots\cdot 1}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}$

b) $g'(x)=-2\operatorname{sen} 2x$

$g''(x)=-4\cos 2x$

$g'''(x)=8\operatorname{sen} 2x$

$g^{IV)}(x)=16\cos 2x$

$g^{V)}(x)=-32\operatorname{sen} 2x$

Así, la derivada n-ésima puede calcularse según las expresiones:

$$g^{n)}=\begin{cases} g^{2k-1)}(x)=(-1)^k 2^{2k-1}\operatorname{sen} 2x \\ g^{2k)}(x)=(-1)^k 2^{2k}\cos 2x \end{cases}\quad \text{para } k=1,2,3,\ldots$$

c) $h'(x)=-e^{-x}$

$h''(x)=e^{-x}$

La derivada n-ésima es: $h^{n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$

061 Halla la derivada n-ésima de estas funciones.

a) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ b) $g(x)=\operatorname{sen}^2 x$ c) $h(x)=\ln x$

a) $f'(x)=\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}$

$f''(x)=-\frac{4}{(1-x)^3}$

$f'''(x)=\frac{12}{(1-x)^4}$

$f^{IV)}(x)=-\frac{48}{(1-x)^5}$

La derivada n-ésima es: $f^{n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) $g'(x) = 2sen\,x\cos x = sen\,2x$
$g''(x) = 2\cos 2x$
$g'''(x) = -4sen\,2x$
$g^{IV)}(x) = -8\cos 2x$
$g^{V)}(x) = 16sen\,2x$

Así, la derivada n-ésima puede calcularse según las expresiones:

$$g^{n)} = \begin{cases} g^{2k-1)}(x) = (-1)^{k+1}2^{2k-2}sen\,2x \\ g^{2k)}(x) = (-1)^{k+1}2^{2k-1}\cos 2x \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

c) $h'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$
$h''(x) = -x^{-2}$
$h'''(x) = 2x^{-3}$
$h^{IV)}(x) = -6x^{-4}$

La derivada n-ésima es: $h^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!\,x^{-n}$

062 **¿Puede haber dos funciones distintas que tengan la misma función derivada? Razona la respuesta y si es afirmativa, escribe un ejemplo.**

Sí, puede haber dos funciones distintas con la misma función derivada. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + 3 \\ g(x) = x^2 - 2 \end{array}\right\} \rightarrow f'(x) = g'(x) = 2x$$

063 **Utilizando la propiedad de la derivada de una suma y la del producto de una constante por una función, obtén la derivada de estas funciones.**

a) $y = x^2 + x + 3$
b) $y = -12 + 8x^3 + \dfrac{1}{x}$
c) $y = 3 + 5x^2 + 8\sqrt{x}$
d) $y = 5\,sen\,x - 10\cos x$
e) $y = 4x^6 - 5x^3 + 3$
f) $y = \cos^2 x + \cos x^2$

a) $y' = 2x + 1$
b) $y' = 24x^2 - \dfrac{1}{x^2}$
c) $y' = 10x + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$
d) $y' = 5\cos x + 10sen\,x$
e) $y' = 24x^5 - 15x^2$
f) $y' = -2\cos x\,sen\,x - 2x sen\,x^2$

064 **A partir de la propiedad de la derivada de un producto de funciones, halla la derivada de las siguientes funciones.**

a) $y = 12x^4$
b) $y = 3x^3 \ln x$
c) $y = 5x^2\,sen\,x$
d) $y = \sqrt{x}\,(x^3 + 2x)$

a) $y' = 48x^3$
b) $y' = 9x^2 \ln x + 3x^2$
c) $y' = 10x sen\,x + 5x^2\cos x$
d) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^3 + 2x) + \sqrt{x}\,(3x^2 + 2) = \dfrac{7x^3 + 6x}{2\sqrt{x}}$

065 Utilizando la propiedad de la derivada de un cociente de funciones, calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{1}{x^3}$ b) $y = \dfrac{5x^2 - 1}{x + 2}$ c) $y = \dfrac{2}{x - 2}$ d) $y = \dfrac{tg\ x}{x}$

a) $y' = \dfrac{-3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

b) $y' = \dfrac{10x(x+2) - (5x^2 - 1)}{(x+2)^2} = \dfrac{5x^2 + 20x + 1}{(x+2)^2}$

c) $y' = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

d) $y' = \dfrac{(1 + tg^2\ x)x - tg\ x}{x^2}$

066 Derive las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x - 2}{x + 1}$ b) $g(x) = (2x - 1)^2 \cdot \ln x$

(Aragón. Septiembre 2008. Cuestión B1)

a) $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - (2x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$

b) $g'(x) = 4(2x-1) \cdot \ln x + (2x-1)^2 \cdot \dfrac{1}{x}$

067 ¿Cuál es la derivada de estas funciones?

a) $y = \dfrac{1 + x^2}{x - 1}$ c) $y = \dfrac{7}{x^{400}}$ e) $y = \dfrac{2 - x}{x^3}$

b) $y = \dfrac{12}{x^3}$ d) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{x}$ f) $y = \dfrac{x + 1}{x^2}$

a) $y' = \dfrac{2x(x-1) - (1 + x^2)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

b) $y' = -\dfrac{36}{x^4}$

c) $y' = -\dfrac{2.800}{x^{401}}$

d) $y' = \dfrac{8x^2 - (4x^2 + 1)}{x^2} = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2}$

e) $y' = \dfrac{-x^3 - (2 - x)3x^2}{x^6} = \dfrac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \dfrac{2x - 6}{x^4}$

f) $y' = \dfrac{x^2 - (x+1)2x}{x^4} = \dfrac{-x^2 - 2x}{x^4} = -\dfrac{x + 2}{x^3}$

068 Calcula la derivada de la función:

$$f(x)=\left(\frac{x+2}{x}\right)^2$$

(La Rioja. Septiembre 2004. Parte A. Cuestión 3)

$$f'(x)=2\left(\frac{x+2}{x}\right)\cdot\frac{x-(x+2)}{x^2}=-\frac{4(x+2)}{x^3}$$

069 Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas.

a) $y=4\,arc\ tg\,x$

b) $y=(3x+1)arc\cos x$

c) $y=2\cos x+tg\,x$

d) $y=(1+x^2)arc\ tg\,x$

e) $y=(x^2+8x+1)sen\,x$

f) $y=5(sen\,x)(\cos x)$

a) $y'=\dfrac{4}{1+x^2}$

b) $y'=3arc\cos x-\dfrac{3x+1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $y'=-2sen\,x+1+tg^2\,x$

d) $y'=2x\,arc\ tg\,x+1$

e) $y'=(2x+8)sen\,x+(x^2+8x+1)\cos x$

f) $y'=5\cos^2 x-5sen^2\,x$

070 Halla la derivada de estas funciones logarítmicas.

a) $y=\ln(9x^5+7x+2)$

b) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$

c) $y=\log_2(3x^2-7)$

d) $y=\ln\sqrt{x^3+2x}$

e) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

f) $y=\ln(4x+7)$

a) $y'=\dfrac{45x^4+7}{9x^5+7x+2}$

b) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

c) $y'=\dfrac{6x}{(3x^2-7)\ln 2}$

d) $y'=\dfrac{\frac{1}{2}(x^3+2x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2+2)}{\sqrt{x^3+2x}}=\dfrac{3x^2+2}{2(x^3+2x)}$

e) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

f) $y'=\dfrac{4}{4x+7}$

071 Calcula la derivada de la función: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ (ln representa la función logaritmo neperiano).

(La Rioja. Septiembre 2002. Parte A. Cuestión 3)

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

072 Calcule la derivada de las siguientes funciones.

a) $g(x) = \dfrac{3}{(2x-5)^2} + \ln(1-x)$

b) $h(x) = \dfrac{e^x}{x^3 + 1}$

(Andalucía. Año 2007. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 2)

a) $g'(x) = -\dfrac{12}{(2x-5)^3} - \dfrac{1}{1-x}$

b) $h'(x) = \dfrac{e^x(x^3+1) - e^x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{e^x(x^3 - 3x^2 + 1)}{(x^3+1)^2}$

073 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $y = 4^x$

b) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

c) $y = \dfrac{2x-1}{x-x^2}$

d) $y = 7\sqrt{x} + 8\sqrt[3]{x}$

e) $y = xe^x$

f) $y = \sqrt[3]{5x^2}$

g) $y = \dfrac{x-2}{x-3}$

h) $y = \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1}$

i) $y = x^2 \operatorname{sen} x - 5x$

j) $y = 2^x + \log_2 x$

a) $y' = 4^x \ln 4$

b) $y' = -\dfrac{16x}{(x^2-4)^2}$

c) $y' = \dfrac{2(x-x^2) - (2x-1)(1-2x)}{(x-x^2)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{(x-x^2)^2}$

d) $y' = 7 \cdot \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 8 \cdot \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{7}{2\sqrt{x}} + \dfrac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

f) $y' = \dfrac{1}{3}(5x^2)^{-\frac{2}{3}} 10x = \dfrac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2)^2}} = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{25x}}$

g) $y' = \dfrac{(x-3)-(x-2)}{(x-3)^2} = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$

h) $y' = \dfrac{(2x(1-x) - x^2)(x^2-1) - x^2(1-x)2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2-1)^2}$

i) $y' = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x - 5$

j) $y' = 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{x \ln 2}$

074 Calcula sus derivadas y simplifica el resultado.

a) $y = \dfrac{x^2+1}{e^x}$

b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

c) $y = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$

d) $y = \dfrac{x^2-1}{e^{x^2}}$

a) $y' = \dfrac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-x^2+2x-1}{e^x}$

b) $y' = \dfrac{\ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

c) $y' = \dfrac{2(x+2)(x+1)-(x+2)^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+8}{(x+1)^2}$

d) $y' = \dfrac{2xe^{x^2} - (x^2-1)e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \dfrac{-2x^3+4x}{e^{x^2}}$

075 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = 3^{x^2+4}$

b) $y = (x^5-2)^3$

c) $y = \sqrt[3]{x^3-2x}$

d) $y = 5e^{-x^2}$

e) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^3}$

f) $y = arc\ tg\ \sqrt{x}$

g) $y = \sqrt{2x^2+1}$

h) $y = e^{x^2-7}$

i) $y = sen^2\, x$

j) $y = 2^{sen\, x}$

a) $y' = 3^{x^2+4} \ln 3 \cdot 2x$

b) $y' = 15x^4(x^5-2)^2$

c) $y' = \dfrac{1}{3}(x^3-2x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-2) = \dfrac{3x^2-2}{3\sqrt[3]{(x^3-2x)^2}}$

d) $y' = -10xe^{-x^2}$

e) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}x^3 - \sqrt{x+1} \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{-5x-6}{2x^4\sqrt{x+1}}$

f) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1+x} = \dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

g) $y' = \dfrac{1}{2}(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}4x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

h) $y' = 2xe^{x^2-7}$

i) $y' = 2\, sen\, x\, cos\, x$

j) $y' = 2^{sen\, x} \ln 2 \cdot cos\, x$

076 Halla la derivada de estas funciones.

a) $y = arc\ sen\ \dfrac{1}{x}$ d) $y = 12\sqrt{3x^2 + x}$ g) $y = (4x^2 - 5x + 1) \cdot 3^x$

b) $y = cos\,(x^2 + 5x + 1)$ e) $y = arc\,sen\,(5x + 1)$ h) $y = \sqrt[7]{x^4 + 3x^3}$

c) $y = \dfrac{cotg\ x}{x^2}$ f) $y = \ln\,(sen\,x^2)$

a) $y' = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} = -\dfrac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

b) $y' = -sen(x^2 + 5x + 1)(2x + 5)$

c) $y = \dfrac{1}{tg\ x \cdot x^2}$

$y' = \dfrac{(1+tg^2\ x)x^2 + tg\ x \cdot 2x}{(tg\ x \cdot x^2)^2} = \dfrac{x + x\,tg^2\ x + 2tg\ x}{x^3\,tg^2\ x}$

d) $y' = 12 \cdot \dfrac{1}{2}(3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}(6x + 1) = \dfrac{36x + 6}{\sqrt{3x^2 + x}}$

e) $y' = \dfrac{5}{\sqrt{1-(5x+1)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{-25x^2 - 10x}}$

f) $y' = \dfrac{cos\ x^2 \cdot 2x}{sen\ x^2} = 2x\,cotg\ x^2$

g) $y' = (8x - 5)3^x + (4x^2 - 5x + 1)3^x \ln 3$

h) $y' = \dfrac{1}{7}(x^4 + 3x^3)^{-\frac{6}{7}}(4x^3 + 9x^2) = \dfrac{4x^3 + 9x^2}{7\sqrt[7]{(x^4 + 3x^3)^6}}$

077 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $y = tg^2\,(2x + 3)$ c) $y = \sqrt{\ln\,(3x - 5)}$ e) $y = 2x\,arc\,sen\,x$

b) $y = arc\,tg\,(x^3 + 6)$ d) $y = \sqrt[4]{5x^3 + 1}$ f) $y = \sqrt[3]{(5x - 2)^2}$

a) $y' = 4tg(2x + 3)(1 + tg^2\ (2x + 3))$

b) $y' = \dfrac{3x^2}{1 + (x^3 + 6)^2}$

c) $y' = \dfrac{1}{2}(\ln\ (3x - 5))^{-\frac{1}{2}}\dfrac{3}{3x - 5} = \dfrac{3}{2(3x - 5)\sqrt{\ln(3x - 5)}}$

d) $y' = \dfrac{1}{4}(5x^3 + 1)^{-\frac{3}{4}}15x^2 = \dfrac{15x^2}{4\sqrt[4]{(5x^3 + 1)^3}}$

e) $y' = 2arc\ sen\ x + 2x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

f) $y' = \dfrac{2}{3}(5x - 2)^{-\frac{1}{3}}5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x - 2}}$

078 Determina la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{x\,sen\,x}{e^x}$

b) $y = arc\,tg\,\dfrac{1}{x}$

c) $y = \ln(1 - 2^x)$

d) $y = \sqrt{e^x + x}$

e) $y = \dfrac{5^x + 5^{-x}}{2}$

f) $y = x^2e^{-x}$

a) $y' = \dfrac{(sen\,x + x\cos x)e^x - x\,sen\,x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{sen\,x + x\cos x - x\,sen\,x}{e^x}$

b) $y' = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = -\dfrac{x^2}{x^2(x^2+1)} = -\dfrac{1}{x^2+1}$

c) $y' = \dfrac{-2^x \ln 2}{1 - 2^x}$

d) $y' = \dfrac{1}{2}(e^x + x)^{-\frac{1}{2}}(e^x + 1) = \dfrac{e^x + 1}{2\sqrt{e^x + x}}$

e) $y' = \dfrac{5^x \ln 5 - 5^{-x} \ln 5}{2}$

f) $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$

079 Halla la derivada de estas funciones.

a) $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$

b) $y = sen\,\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}$

c) $y = e^{1-x^2}$

d) $y = \sqrt{sec\,x}$

a) $y' = \dfrac{-sen\,x \cdot x^2 - \cos x \cdot 2x}{x^4} = -\dfrac{x\,sen\,x + 2\cos x}{x^3}$

b) $y' = \cos\dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - sen\,\dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $y' = e^{1-x^2}(-2x)$

d) $y = \sqrt{\dfrac{1}{\cos x}}$

$y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{-\frac{1}{2}} \dfrac{sen\,x}{\cos^2 x} = \dfrac{sen\,x\sqrt{\cos x}}{2\cos^2 x}$

080 Calcula la derivada de las funciones.

a) $y = \ln \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

b) $y = arc\ tg\ \dfrac{x}{x-1}$

c) $y = arc\cos(\ln x)$

d) $y = \sqrt[3]{2^{\cos x}}$

e) $y = \log_2 \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

f) $y = \cos^3 x + sen\, x^2$

a) $$y' = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = -\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{x-1}{x+1} = -\frac{1}{x^2-1}$$

b) $$y' = -\frac{\dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}}{1+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2} = \frac{1}{(x-1)^2+x^2} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$$

c) $$y' = -\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

d) $$y' = \frac{1}{3}(2^{\cos x})^{-\frac{2}{3}} 2^{\cos x}\ln 2\,(-sen\, x) = -\frac{\ln 2\ sen\, x\sqrt[3]{2^{\cos x}}}{3}$$

e) $$y' = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}\ln 2} = -\frac{1}{2x\ln 2}$$

f) $y' = -3\cos^2 x\ sen\, x + 2 sen\, x\cos x$

081 Halla las derivadas de las siguientes funciones, y simplifica el resultado.

a) $y = arc\ sen\ \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt[4]{sen\,(x^3+1)}$

c) $y = 2^{x^2+4} + x^2 + 4$

d) $y = \dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{x}$

e) $y = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

a) $$y' = \frac{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

b) $$y' = \frac{1}{4}(sen\,(x^3+1))^{-\frac{3}{4}}\cos(x^3+1)3x^2 = \frac{3x^2\cos(x^3+1)}{4\sqrt[4]{sen^3(x^3+1)}}$$

c) $y' = 2^{x^2+4}\ln 2\cdot 2x + 2x$

d) $y' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}} \cdot x - \ln\sqrt{x+1}}{x^2} = \dfrac{\dfrac{x}{2(x+1)} - \ln\sqrt{x+1}}{x^2} =$

$= \dfrac{x - 2(x+1)\ln\sqrt{x+1}}{2(x+1)x^2}$

e) $y = x\ln\dfrac{x}{x+1}$

$$y' = \ln\frac{x}{x+1} + x \cdot \frac{\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x}{x+1}} = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$$

082 Para $g(x) = e^{1-x} + \ln(x+2)$, calcule $g'(1)$.

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 2)

$$g'(x) = -e^{1-x} + \frac{1}{x+2} \qquad g'(1) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

083 Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$y_1 = \sqrt{4+2^x} + \ln\frac{1}{1+x}$$
$$y_2 = sen^2\,(2x+1)^3$$

(Navarra. Junio 2000. Ejercicio 2. Opción B)

$$y_1' = \frac{1}{2}(4+2^x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^x \cdot \ln 2 + \frac{-\dfrac{1}{(1+x)^2}}{\dfrac{1}{1+x}} = \frac{2^x \cdot \ln 2}{2\sqrt{4+2^x}} - \frac{1}{1+x}$$

$y_2' = 2\,sen(2x+1)^3 \cdot cos(2x+1)^3 \cdot 3(2x+1)^2 \cdot 2 =$
$= 12(2x+1)^2 \cdot sen(2x+1)^3 \cdot cos(2x+1)^3$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Calcule $g''(2)$ siendo $g(x) = \dfrac{1}{x} - x$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 2)

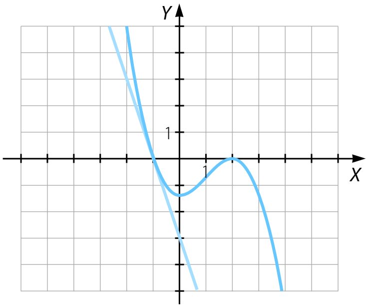
$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 \rightarrow g''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$g''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

2 La curva $y = f(x)$ de la figura tiene como dominio el conjunto de todos los números reales.

a) Determine los puntos donde la función vale 0. Determine los valores de x para los que la función sea positiva.

b) Diga en qué puntos se anula la derivada y en qué puntos $f'(x) < 0$.



(Cataluña. Septiembre 2007. Problema 5)

a) A partir de la curva comprobamos que: $f(x) = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 2$

Por tanto, la función se anula en los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

La función es positiva si $x < -1$, es decir, si $x \in (-\infty, -1)$.

b) La derivada se anula en los puntos que tengan recta tangente horizontal, es decir, en $x = 0$ y en $x = 2$.

La primera derivada es negativa en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, intervalos donde la función es decreciente.

3 Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros) vienen dados por:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15 & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ -(x-3)^2 + 30 & \text{si } 3 < x \le 8 \end{cases}$$

¿Es continua esta función? ¿Es derivable?

(Canarias. Junio 2006. Prueba B. Pregunta 4)

- Si $0 < x < 3$: $f(x) = 5x + 15 \rightarrow$ Función polinómica; por tanto, continua en $(0, 3)$.
- Si $3 < x < 8$: $f(x) = -(x-3)^2 + 30 \rightarrow$ Función polinómica; por tanto, continua en $(3, 8)$.
- Para que la función sea continua en $x = 3$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3) = 30$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} (5x + 15) = 30 \\ f(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-(x-3)^2 + 30) = 30 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow f(3^-) = f(3^+) = f(3) \\ \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 3. \end{array}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -2(x-3) & \text{si } 3 < x < 8 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 5 \\ f'(3^+) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Las derivadas laterales no son iguales} \\ \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 3. \end{array}$$

La función es derivable en $(0, 3) \cup (3, 8)$.

4 Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-k}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

Calcule el valor de k para que la función f sea continua en $x = 0$. Para ese valor de k, ¿es derivable en $x = 0$?

(Andalucía. Año 2007. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 2)

- Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-k}{x+1} = -k \\ f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + 1) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow f(0^+) = f(0^-) = f(0) \rightarrow -k = 1 \rightarrow k = -1$$

- Para que la función sea derivable en $x = 0$, las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 2x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = 0 \\ f'(0^-) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

5 Derive las funciones:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 8 \qquad g(x) = \sqrt{x^3} \qquad h(x) = x^2 - e^x$$

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

$$g'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$h'(x) = 2x - e^x$$

6 Calcula las siguientes derivadas y simplifica en lo posible los resultados.

a) $y = \dfrac{3}{2} \ln \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

b) $y = (5x - 1)e^{3x} + sen^2 5x$

c) $y = \sqrt{(1 - x^2)^3}$

(Navarra. Junio 2003. Ejercicio 2. Opción A)

a) $$y' = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dfrac{2}{(x+1)^2}}{\dfrac{x-1}{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

b) $$y' = 5e^{3x} + (5x - 1)e^{3x} \cdot 3 + 2\, sen\, 5x \cdot cos\, 5x \cdot 5 =$$
$$= (15x + 2)e^{3x} + 10\, sen\, 5x \cdot cos\, 5x$$

c) $$y' = \frac{3}{2}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -3x\sqrt{1 - x^2}$$