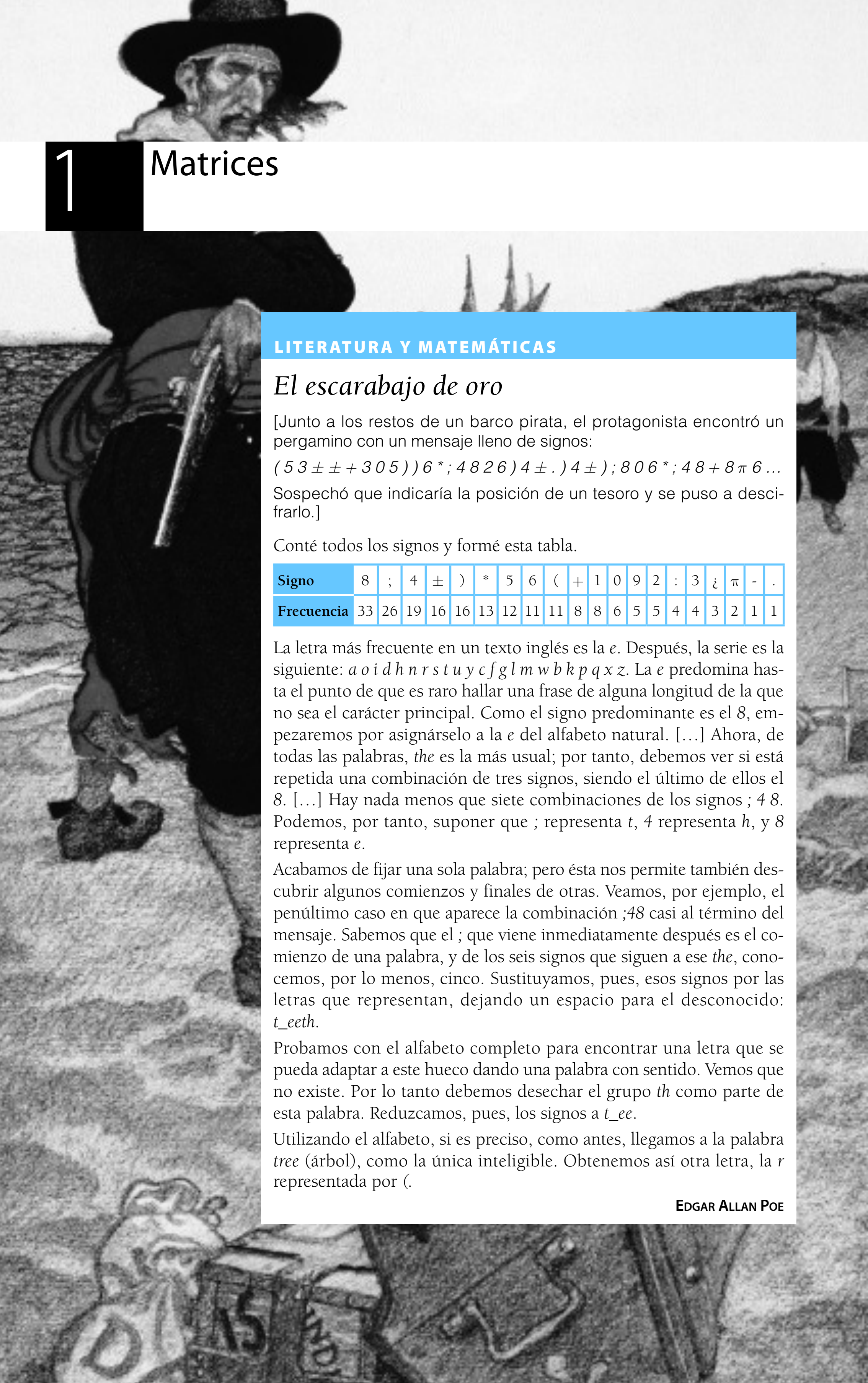


1 Matrices

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El escarabajo de oro

[Junto a los restos de un barco pirata, el protagonista encontró un pergamino con un mensaje lleno de signos:

*(5 3 ± ± + 3 0 5)) 6 * ; 4 8 2 6) 4 ± .) 4 ±) ; 8 0 6 * ; 4 8 + 8 π 6 ...*

Sospechó que indicaría la posición de un tesoro y se puso a descifrarlo.]

Conté todos los signos y formé esta tabla.

Signo	8	;	4	±	)	*	5	6	(	+	1	0	9	2	:	3	¿	π	-	.
Frecuencia	33	26	19	16	16	13	12	11	11	8	8	6	5	5	4	4	3	2	1	1

La letra más frecuente en un texto inglés es la *e*. Después, la serie es la siguiente: *a o i d h n r s t u y c f g l m w b k p q x z*. La *e* predomina hasta el punto de que es raro hallar una frase de alguna longitud de la que no sea el carácter principal. Como el signo predominante es el *8*, empezaremos por asignárselo a la *e* del alfabeto natural. […] Ahora, de todas las palabras, *the* es la más usual; por tanto, debemos ver si está repetida una combinación de tres signos, siendo el último de ellos el *8*. […] Hay nada menos que siete combinaciones de los signos *; 4 8*. Podemos, por tanto, suponer que *;* representa *t*, *4* representa *h*, y *8* representa *e*.

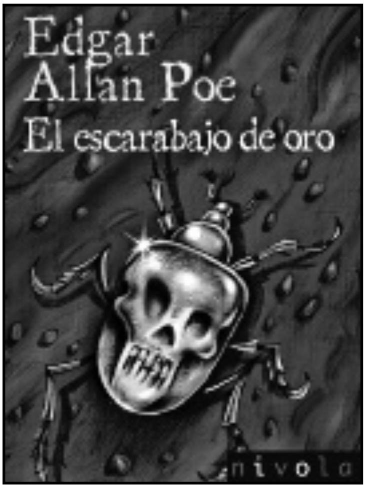
Acabamos de fijar una sola palabra; pero ésta nos permite también descubrir algunos comienzos y finales de otras. Veamos, por ejemplo, el penúltimo caso en que aparece la combinación *;48* casi al término del mensaje. Sabemos que el *;* que viene inmediatamente después es el comienzo de una palabra, y de los seis signos que siguen a ese *the*, conocemos, por lo menos, cinco. Sustituyamos, pues, esos signos por las letras que representan, dejando un espacio para el desconocido: *t_eeth*.

Probamos con el alfabeto completo para encontrar una letra que se pueda adaptar a este hueco dando una palabra con sentido. Vemos que no existe. Por lo tanto debemos desechar el grupo *th* como parte de esta palabra. Reduzcamos, pues, los signos a *t_ee*.

Utilizando el alfabeto, si es preciso, como antes, llegamos a la palabra *tree* (árbol), como la única inteligible. Obtenemos así otra letra, la *r* representada por (.

EDGAR ALLAN POE

El escarabajo de oro
Edgar Allan Poe



A todos nos gustaría encontrar un *tesoro* que resolviera nuestros problemas. A veces no sabemos exactamente cómo debería ser. Otras veces lo sabemos, pero nos falta el plano; o tenemos el plano, aunque las instrucciones están codificadas. Esto último fue lo que le sucedió a Legrand, el protagonista de *El escarabajo de oro*. Ya había encontrado el pergamino junto a los restos de un barco pirata, ya lo había puesto al fuego para que el mensaje escrito con tinta invisible saliera a la luz, pero lo único que apareció fue la retahíla de signos que vemos en el párrafo seleccionado.

Por la firma, enseguida advirtió que este mensaje ocultaba un texto en inglés. Descifrarlo era el precio que debía pagar Legrand por su tesoro. Y lo consiguió. En este párrafo le cuenta a un amigo cómo empezó a desentrañar el mensaje que le llevaría hasta el tesoro escondido por los piratas. Su estrategia inicial consistió en comparar la frecuencia de los signos en el mensaje con la frecuencia de cada letra en la lengua inglesa. El mensaje descifrado en inglés puede encontrarse en cualquier edición del relato y, traducido al castellano, literalmente sería el siguiente:

«Un buen vaso en la hostería del obispo en la silla del diablo cuarenta y un grados y trece minutos Nordeste y desde el Norte principal rama séptimo vástago lado Este solar cuarto del ojo izquierdo de la cabeza de muerto una línea recta desde el árbol a través de la bala cincuenta pies hacia fuera».

Como se ve, el mensaje todavía tiene un aire misterioso e incomprensible, pero ahora el problema consiste en interpretarlo. Con imaginación, tesón y un poco de suerte, Legrand consiguió entender lo que significa este aparente galimatías y logró desenterrar un tesoro fabuloso. Saber cómo lo hizo exige terminar de leer este relato, uno de los más extraordinarios de Edgar Allan Poe.

Una tabla numérica como $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es un ejemplo de matriz. Sirve para *codificar* problemas o situaciones como este: «Una empresa de autobuses tiene tres líneas: *A*, *B* y *C*. El lunes salieron 4 autobuses en la línea *A*, 5 en *B* y 3 en *C*. El martes salieron 1 en *A*, 7 en *B* y 3 en *C*. El miércoles, 4 en *A*, 5 en *B* y 6 en *C*. Representa en forma de matriz el tráfico de esta empresa en los tres días».

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

En la matriz, las filas representan los días de la semana, y las columnas cada una de las líneas de autobús.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x + y + 3z &= 0\\ 2x - 2y - z &= 4\\ x - 3y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} -2y + z &= -1\\ 2x + y - 3z &= 0\\ x - 5y \quad &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x + y + 3z &= 0\\ 2x - 2y - z &= 4\\ x - 3y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=-y-3z} \left.\begin{aligned} 2(-y-3z) - 2y - z &= 4\\ -y - 3z - 3y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$

$\rightarrow - \begin{array}{r} -4y - 7z = 4\\ -4y - z = 4\\ \hline -6z = 0 \end{array}$

$\rightarrow z = 0$

$-4y - z = 4 \xrightarrow{z=0} y = -1$

$x + y + 3z = 0 \xrightarrow{y=-1,\, z=0} x = 1$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$ y $z = 0$.

b) $\left.\begin{aligned} -2y + z &= -1\\ 2x + y - 3z &= 0\\ x - 5y \quad &= 7 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{z=2y-1} \left.\begin{aligned} 2x + y - 3(2y-1) &= 0\\ x - 5y &= 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow - \begin{array}{r} 2x - 5y = -3\\ x - 5y = 7\\ \hline x \quad = -10 \end{array}$

$x - 5y = 7 \xrightarrow{x=-10} y = -\dfrac{17}{5}$

$z = 2y - 1 \xrightarrow{y=-\frac{17}{5}} z = -\dfrac{34}{5} - 1 = -\dfrac{39}{5}$

La solución del sistema es $x = -10$, $y = -\dfrac{17}{5}$ y $z = -\dfrac{39}{5}$.

002 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} -x + 2y &= 0\\ 2x + y &= 5\\ 2x - 3y &= 1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x - y &= 0\\ 2x + y &= 3\\ 3x - 4y &= -1\\ -x - 2y &= -3 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} -x + 2y &= 0\\ 2x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2y\\ 2x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=2y} 4y + y = 5 \rightarrow y = 1$

$y = 1 \xrightarrow{y=2y} x = 2$

$2x - 3y = 1 \xrightarrow{x=2,\, y=1} 4 - 3 = 1$. En este caso, la solución del sistema es válida.

b) $+ \begin{array}{r} x - y = 0\\ 2x + y = 3\\ \hline 3x \quad = 3 \end{array} \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1$

$3x - 4y = -1 \xrightarrow{x=1,\, y=1} 3 - 4 = -1$

$-x - 2y = -3 \xrightarrow{x=1,\, y=1} -1 - 2 = -3$

En este caso, la solución del sistema es válida.

ACTIVIDADES

001 **Escribe una matriz que cumpla las siguientes condiciones.**

- **Su dimensión sea 3×2.**
- **$a_{32} = -a_{21} = a_{11} = 1$**
- **$a_{22} = a_{12} = -a_{31} = -2$**

La matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

002 **Se venden listones con dos calidades y de dos longitudes. Los listones grandes de baja calidad cuestan 0,75 € y 1 € los de alta, mientras que los listones pequeños de baja calidad cuestan 0,45 € y 0,60 € los de alta. Anota estos datos en forma de matriz.**

La matriz será de dimensión 2×2. Las filas indican la calidad; las columnas, el tamaño, y los elementos de la matriz, el precio.

$\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}75 \\ 0{,}60 & 1 \end{pmatrix}$

003 **Halla el valor de cada incógnita para que las dos matrices sean iguales.**

$$\begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix}$$

Para que las matrices sean iguales deben tener la misma dimensión y ser iguales todos sus elementos.

Las dos matrices son de dimensión 2×3.

$x + 1 = 2 \rightarrow x = 1$ $\quad$ $z + 1 = y + 2 \rightarrow z = y + 1 \rightarrow z = 3$

$3 = y + 1 \rightarrow y = 2$ $\quad$ $x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$

$0 = 0$ $\quad$ $z - 1 = y \rightarrow z = 1 + 2 = 3$

La solución es $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$.

004 **Escribe un ejemplo de las siguientes matrices.**

a) Una matriz fila con cuatro columnas.

b) Una matriz columna con cuatro filas.

c) Una matriz cuadrada de orden 4.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $A = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 0)$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

005 Escribe matrices que cumplan las siguientes condiciones.

a) Matriz diagonal de orden 4 que cumple que $a_{ii} = 7$.

b) Matriz identidad con tres filas.

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

006 Calcula $(A \cdot B)^t$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right]^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 15 & -40 \\ 57 & 24 & -27 \end{pmatrix}$$

007 Realiza la siguiente operación con matrices:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

008 Averigua los elementos que faltan si $A + B = C$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4+c & 5+d \\ 5+e & a+3 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f = 5$ $\quad 4 + c = 7 \rightarrow c = 3$ $\quad 5 + d = 6 \rightarrow d = 1$

$5 + e = 1 \rightarrow e = -4$ $\quad a + 3 = -1 \rightarrow a = -4$ $\quad b - 1 = 0 \rightarrow b = 1$

009 Haz la siguiente operación con matrices:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -12 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & 15 & -13 \end{pmatrix}$$

010 Realiza las operaciones indicadas con estas matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $2(A - B) + 3C$

b) $(-2)(A - C) - 3(B + 2C)$

a) $2(A - B) + 3C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 15 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(-2)(A - C) - 3(B + 2C) = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

011 Calcula la siguiente operación con matrices:

$$2 \cdot (3 \quad 1 \quad 4) \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot (3 \quad 1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot (3 \quad 1 \quad 4) \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot (3 \quad 1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (6 \quad 2 \quad 8) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} - (9 \quad 3 \quad 12) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 6 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 8 \cdot 10 - 9 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 12 \cdot 0 = 10 - 80 - 45 + 3 = -112$$

012 Halla el valor de x en esta igualdad de matrices.

$$(1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \quad x \quad 9) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \quad x \quad 9) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x - 1 - (3 - x) = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

013 Realiza los productos que sean posibles entre las matrices A, B y C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -13 & 11 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -8 \\ 8 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 7 & 0 \\ -11 & 2 \end{pmatrix} \qquad C \cdot A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -14 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \cdot C$ no se pueden multiplicar, ya que la dimensión de A es 2×3 y la de C es 2×2.

$C \cdot B$ no se pueden multiplicar, pues la dimensión de C es 2×2 y la de B es 3×2.

014 **Determina la dimensión de la matriz resultante de esta operación y, después, compruébalo efectuando las operaciones.**

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

La dimensión de la matriz resultante es 2×3.

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 6 & 0 & 2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}6 & 9 & -1\\ 12 & 15 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}22 & 25 & -3\\ 42 & 45 & 11\end{pmatrix}$$

015 **Comprueba si se cumple que $A\cdot(B+C)=B\cdot A+C\cdot A$, siendo las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Si no es cierto, aplica correctamente la propiedad.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

La igualdad correcta es: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 12 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ -9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

016 **Realiza la operación $B\cdot A+C\cdot A$, sacando previamente factor común a la matriz A.**

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

¿Qué propiedad has aplicado al sacar factor común?

Para sacar factor común aplicamos la propiedad distributiva por la derecha.

$B\cdot A+C\cdot A=(B+C)\cdot A$

$$(B+C)\cdot A=\left[\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -25\\ 8 & 12\end{pmatrix}$$

017 **Completa los elementos que faltan en la matriz para que sus filas sean linealmente dependientes.**

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & b & 2\\ -9 & a & 0 & c\end{pmatrix}$$

Para que sus dos filas sean dependientes tienen que ser proporcionales, $F_2 = \lambda F_1$.

$$\left.\begin{array}{r}-9 = 3\lambda\\ a = -\lambda\\ 0 = b\lambda\\ c = 2\lambda\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\lambda = -3\\ a = 3\\ 0 = b\\ c = -6\end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & b & 2\\ -9 & a & 0 & c\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2\\ -9 & 3 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

018 **Determina el rango de las siguientes matrices.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 7 & -1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 6\\ 3 & -3 & 9\end{pmatrix}$

a) Ninguna de las tres filas es proporcional a otra.

Comprobamos si alguna fila es combinación lineal de las otras dos:

$$F_1 = \lambda F_2 + \mu F_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r}1 = 2\lambda\\ -1 = \lambda + \mu\\ 3 = -\lambda + \mu\\ 0 = \lambda - \mu\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\lambda = \frac{1}{2}\\ -1 = \frac{1}{2} + \mu\\ 3 = -\frac{1}{2} + \mu\\ 0 = \frac{1}{2} - \mu\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda = \frac{1}{2}\\ \mu = -\frac{3}{2}\\ \mu = \frac{7}{2}\\ \mu = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Como los valores de μ son diferentes, el sistema no tiene solución. Ninguna fila es combinación lineal de las otras dos, entonces las tres filas son linealmente independientes y, por tanto, el rango de la matriz es 3.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 7 & -1\end{pmatrix} = 3$$

b) Como $F_2 = 2F_1$ y $F_3 = 3F_1$, todas las filas son proporcionales. Luego el número de filas linealmente independientes es 1 y, por tanto, el rango de la matriz es 1.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 6\\ 3 & -3 & 9\end{pmatrix} = 1$$

019 **Calcula el rango utilizando el método de Gauss:** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7\\ 0 & -1 & 2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7\\ 0 & -1 & 2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{5}{3}F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{35}{3}\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{19}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & \frac{73}{3}\end{pmatrix}$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7\\ 0 & -1 & 2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix} = 3$$

020 Halla el rango mediante el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - 8F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 7 & -14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - \frac{1}{3}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

021 Calcula, si es posible, la inversa de estas matrices utilizando la definición.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ b + 2d &= 0 \\ 2a + 4c &= 0 \\ 2b + 4d &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ b + 2d &= 0 \\ 2(a + 2c) &= 0 \\ 2(b + 2d) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

El sistema no tiene solución, luego no existe matriz inversa.

b) $$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 3a - 5c &= 1 \\ 3b - 5d &= 0 \\ -a + 2c &= 0 \\ -b + 2d &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3a - 5c &= 1 \\ 3b - 5d &= 0 \\ a &= 2c \\ b &= 2d - 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 6c - 5c &= 1 \\ 6d - 3 - 5d &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 5 \\ c &= 1 \\ d &= 3 \end{aligned}\right.$$

Comprobamos que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

022 Halla, si es posible, la inversa de esta matriz: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a-3d+g=1\\ 2b-3e+h=0\\ 2c-3f+i=0\\ 3a+d+g=0\\ 3b+e+h=1\\ 3c+f+i=0\\ d=0\\ e=0\\ f=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+g=1\\ 2b+h=0\\ 2c+i=3\\ 3a+g=0\\ 3b+h=1\\ 3c+i=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+g=1\\ 3a+g=0\\ 2b+h=0\\ 3b+h=1\\ 2c+i=3\\ 3c+i=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1\\ b=1\\ c=-4\\ g=3\\ h=-2\\ i=11 \end{array}\right.$$

Comprobamos que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

023 Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de estas matrices.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 2\\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 7\\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0\\ 12 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1-2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 5 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=\frac{1}{6}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{2}{6}\\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+\frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1+21F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 15 & 21\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=-\frac{1}{3}F_1\\ F_2=-3F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -7\\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

024 Halla, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-\frac{2}{3}F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1+\frac{9}{4}F_3 \\ F_2=F_2-\frac{15}{4}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{3}F_1 \\ F_2=\frac{1}{3}F_2 \\ F_3=\frac{9}{4}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

025 **Clasifica las matrices y determina su dimensión.**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz fila de dimensión 1×3

$B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz columna de dimensión 3×1

$C=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz cuadrada de orden 3

$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz diagonal de orden 2

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriz unidad de orden 2

$$F=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow \text{Matriz triangular inferior de orden 3}$$

$$G=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&3\end{pmatrix}\rightarrow \text{Matriz rectangular de dimensión } 2\times 3$$

$$H=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-3\\0&0&2\end{pmatrix}\rightarrow \text{Matriz triangular superior de orden 3}$$

$$J=\begin{pmatrix}3&0\\4&-8\end{pmatrix}\rightarrow \text{Matriz triangular inferior de orden 2}$$

026 **Pon dos ejemplos de estas matrices:**

a) Matriz columna

b) Matriz fila

c) Matriz diagonal

d) Matriz cuadrada

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\begin{pmatrix}-8\\1\\0\end{pmatrix}$ b) $(3\quad -2\quad 9)$ c) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&7\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}-4&9\\0&2\end{pmatrix}$

027 **Halla los valores de *a* y *b* para que las matrices sean iguales.**

$$A=\begin{pmatrix}1&b&3\\3&1&0\\9&4&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&5&3\\1-a&1&0\\9&4&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&b&3\\3&1&0\\9&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5&3\\1-a&1&0\\9&4&1\end{pmatrix}\rightarrow b=5,\ a=-2$$

028 **Calcula la matriz traspuesta de cada una de estas matrices:**

$$A=(1\quad 7\quad 2)\qquad B=\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}5&-4&3\\-4&3&1\\2&8&9\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}0&1&7\\-1&9&3\end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}\qquad B^t=(0\quad 1\quad 7)\qquad C^t=\begin{pmatrix}5&-4&2\\-4&3&8\\3&1&9\end{pmatrix}$$

$$D^t=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\qquad E^t=\begin{pmatrix}0&-1\\1&9\\7&3\end{pmatrix}$$

029 Una empresa de autobuses tiene tres líneas: *A*, *B* y *C*.
El lunes salieron 5 autobuses en la línea *A*, 3 en la *B* y 4 en la *C*. El martes salieron 2 autobuses en la línea *A*, 1 en la *B* y 4 en la *C*. El miércoles salió 1 autobús en la línea *A*, 3 en la *B* y 5 en la *C*.
Represéntalo en forma de matriz.

Lo representamos en una matriz de dimensión 3×3.
Las filas representan los días de la semana: lunes, martes y miércoles.
Las columnas corresponden a las líneas *A*, *B* y *C*, respectivamente.
Cada elemento de la matriz es el número de autobuses.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

030 Una fábrica elabora dos tipos de productos, *X* e *Y*, que vende a tres empresas *A*, *B* y *C*. Inicialmente distribuía 1.000 unidades de cada producto a cada una, pero en este mes la empresa *A* recibió 600 unidades de *X* y 300 de *Y*; la empresa *B* recibió 400 unidades de *X* y 800 de *Y*, y la empresa *C* recibió 900 unidades de *X* y 700 de *Y*.
Representa mediante una matriz las disminuciones porcentuales que se han producido en la distribución de los productos a estas empresas.

Las filas corresponden a cada tipo de empresa, *A*, *B* y *C*, y las columnas corresponden al tipo de producto, *X* e *Y*. Cada elemento de la matriz es la disminución porcentual de la producción.

$$100 - 100 \cdot \frac{600}{1.000} = 40 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{300}{1.000} = 70$$

$$100 - 100 \cdot \frac{400}{1.000} = 60 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{800}{1.000} = 20$$

$$100 - 100 \cdot \frac{900}{1.000} = 10 \qquad 100 - 100 \cdot \frac{700}{1.000} = 30$$

$$\begin{pmatrix} 40 & 70 \\ 60 & 20 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

031 Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

Comprueba con esas matrices la propiedad conmutativa de la suma.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

032 Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

¿Qué relación hay entre $A - B$ y $B - A$?

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -8 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A - B$ y $B - A$ son matrices opuestas.

033 Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Calcula.

a) $A + B - C$
b) $A - B + C$
c) $-A - B + C$
d) $-A + B + C$
e) $A - (B - C)$
f) $C - (A + B)$

a) $A + B - C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

c) $-A - B + C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

d) $-A + B + C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

e) $A - (B - C) = A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

f) $C - (A + B) = -A - B + C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

034 Determina una matriz X que verifique: $A + X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A + X = B \rightarrow X = B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

035 Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Realiza, si es posible, los siguientes productos.

a) AB
b) BA
c) AC
d) BC

a) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -20 \end{pmatrix}$

b) No se pueden multiplicar B y A, ya que la dimensión de B es 2×3 y la de A es 2×2.

c) No se pueden multiplicar A y C, pues la dimensión de A es 2×2 y la de C es 3×3.

d) $BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

036 **Comprueba que, en general, el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa multiplicando estas matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 26 & 7 & -20 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -6 \\ 5 & 5 & -19 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

037 **Comprueba que se cumple la propiedad distributiva del producto de matrices con respecto de la suma utilizando estas matrices.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

038 **Sean las matrices:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

De las siguientes operaciones, algunas no se pueden realizar; razone por qué. Efectúe las que se puedan realizar.

$$A + B \qquad A^t + B \qquad AB \qquad AB^t$$

(Andalucía. Año 2005. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

$A + B$ no se puede hacer, porque el número de filas y columnas de A y B no coinciden.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

AB^t no se puede realizar, ya que el número de columnas de A no coincide con el número de filas de B^t.

039 Con las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) $2A-3B$ b) $2A\cdot 3B$ c) $A(B+C)$ d) $A-3B$

a) $2A-3B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & -16\end{pmatrix}$

c) $A(B+C)=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 9 & -10\end{pmatrix}$

b) $2A\cdot 3B=\begin{pmatrix}6 & -24\\ 24 & -48\end{pmatrix}$

d) $A-3B=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 0 & -14\end{pmatrix}$

040 Con las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) ABC b) $2AB$ c) $A(B-C)$ d) $B\cdot 3C$

a) $ABC=(AB)C=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 9 & 14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -17\\ 28 & 75\end{pmatrix}$

b) $2AB=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & -4 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 18 & 28\end{pmatrix}$

c) No se puede realizar esta operación, ya que B y C no se pueden restar por no tener la misma dimensión.

d) $B\cdot 3C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -3\\ 6 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 39\\ 30 & 90\\ 48 & 135\end{pmatrix}$

041 Con las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades.

a) $(A^t)^t=A$

b) $(A+B)^t=A^t+B^t$

c) $(AB)^t=B^tA^t$

a) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}\rightarrow (A^t)^t=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=A$

b) $$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\rightarrow (A+B)^t=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}\\ A^t+B^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}\end{array}\right\}\rightarrow (A+B)^t=A^t+B^t$$

c) $$\left.\begin{array}{l} AB=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 12 & 4\end{pmatrix}\rightarrow (AB)^t=\begin{pmatrix}-3 & 12\\ -3 & 4\end{pmatrix}\\ B^tA^t=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 12\\ -3 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right\}\rightarrow (AB)^t=B^tA^t$$

042 **Realiza los cálculos que se indican, si es posible.**

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&5&3\\-2&3&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&-3\\2&3&0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

a) A^tC
b) CD^t
c) $(B+E)^t$
d) DD^t
e) A^tC^t
f) $(3E)^t$

a) $A^tC=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&5&3\\-2&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&-3\\2&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-4&-7\\1&10&-17\\1&4&-5\end{pmatrix}$

b) No es posible, porque C tiene 3 columnas y D^t tiene 2 filas.

c) $(B+E)^t=\left[\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}$

d) $DD^t=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

e) $A^tC^t=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&5&3\\-2&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&3\\-2&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&7\\-1&-10&17\\-1&-4&5\end{pmatrix}$

f) $(3E)^t=\begin{pmatrix}3&3\\-3&3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}3&-3\\3&3\end{pmatrix}$

043 **Responde a estas preguntas.**

a) ¿El producto de dos matrices diagonales del mismo orden es también una matriz diagonal? ¿Por qué?

b) ¿Existe siempre el producto A^tA, siendo A una matriz cualquiera? ¿Por qué?

a) Sí, es cierto.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\0&a_{22}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&0&\dots&0\\0&b_{22}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&0&\dots&0\\0&a_{22}b_{22}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nn}b_{nn}\end{pmatrix}$$

b) Sí existe, ya que el número de columnas de A^t siempre es igual al número de filas de A.

044 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcule AB.

(Aragón. Junio 2008. Cuestión A1)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

045 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.
Calcular AB y BA.

(Aragón. Junio 2004. Opción A. Cuestión 1)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$$

046 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$:

a) Calcule $A^2 + 2AB + B^2$.

b) Calcule $(A + B)^2$.

(Cataluña. Año 2008. Serie 5. Cuestión 2)

a) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$$

b) $$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

047 Sea la siguiente matriz 2×2: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula A^tA y AA^t.

(La Rioja. Septiembre 2002. Parte A. Cuestión 2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 29 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$$

048 Con las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

comprobar la propiedad asociativa del producto de matrices.

(Aragón. Septiembre 2002. Opción B. Cuestión 1)

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 43 & 34 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 27 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 43 & 34 \end{pmatrix}$$

049 a) Considera la matriz $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; escribe dos matrices de orden tres diferentes y multiplica a cada una de ellas por D.

b) ¿Cómo actúa D al multiplicarla por una matriz cualquiera A?

(Navarra. Junio 2006. Ejercicio 1. Opción A)

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ 25 & -20 & 10 \\ -5 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

b) Actúa igual que si multiplicáramos la matriz por el número 5, ya que $D = 5I$.

050 Indique todos los productos de dos matrices distintas que se pueden hacer con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad E = (a \quad b)$$

(Cataluña. Año 2006. Serie 4. Cuestión 4)

Se puede realizar: AC, AD, BA, BC, BD, CB, DE, EA, EC, ED.

051 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto AMC.

b) Determine la dimensión de N para que C^tN sea una matriz cuadrada.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 1)

a) La matriz M debe tener tantas filas como A columnas y tantas columnas como C filas, por lo que será de dimensión 3×3.

b) C es $3 \times 2 \rightarrow C^t$ es 2×3, y entonces N será 3×2.

052 **Sean A una matriz de dimensión 5×3, B una matriz de dimensión $m \times n$ y C una matriz de dimensión 4×7. Si sabemos que se puede obtener la matriz ABC, ¿cuáles son las dimensiones de B y de ABC?**

Para poder obtener el producto, B ha de tener tantas filas como columnas tenga A y tantas columnas como filas tenga C. Es decir, la dimensión de B es 3×4 y la dimensión del producto ABC es 5×7.

053 **Sean A y B dos matrices de tamaño 2×2. ¿Es cierta la igualdad $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$? Pruébalo si es cierto o busca un contraejemplo si es falso.**

(La Rioja. Septiembre 2006. Parte A. Cuestión 1)

No es cierta, por no ser comutativo el producto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 25 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$$

054 **Con las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula $(A + B)^2$ y $A^2 + 2A \cdot B + B^2$. ¿Por qué no coinciden los resultados? ¿Cuál sería la fórmula correcta para el cuadrado de una suma de matrices?**

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 40 & 10 & -26 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 47 & 32 & -36 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Como el producto de matrices no es conmutativo, el cálculo correcto es:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Lo comprobamos hallando de nuevo el segundo miembro:

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 20 & 5 & -13 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -5 & 4 & -11 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

055 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentra la regla del cálculo de las potencias sucesivas de A, es decir, de A^n para cualquier número natural n.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad A^4 = IA = A$$

Si dividimos n entre 3 tenemos $n = 3p + q$, donde q es el resto al dividir n entre 3, y es un número natural menor que 3.

$$A^n = A^{3p+q} = A^{3p}A^q = IA^q = A^q \quad \text{y} \quad A^q = \begin{cases} A & \text{si } q = 1 \\ A^2 & \text{si } q = 2 \\ I & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

056 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3, A^5 y A^n.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

057 Calcula $A^{2.000}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general:

- Si n es un número par resulta: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Si n es un número impar resulta: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Así, tenemos que: $A^n = 2^{2.000} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

058 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle $A^{2.004}$.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{2.004} = (A^2)^{1.002} = I^{1.002} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

059 Sea la matriz 1×3:

$$A = (1 \quad 2 \quad a)$$

Calcula el valor de a sabiendo que $AA^t = 5$.

(La Rioja. Septiembre 2003. Parte A. Cuestión 3)

$$AA^t = 1^2 + 2^2 + a^2 = a^2 + 5$$
$$AA^t = 5 \rightarrow a^2 + 5 = 5 \rightarrow a = 0$$

060 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.
b) Determine x para que $AB = I_2$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 1)

a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$B^2 = A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \rightarrow x = 1$$

b) $AB = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix}$

$$AB = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

061 Sea la matriz 2×2: $A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Calcula el valor de a sabiendo que AA^t es una matriz diagonal.

(La Rioja. Junio 2002. Parte A. Cuestión 1)

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+9 & 2a-12 \\ 2a-12 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+9 & 2a-12 \\ 2a-12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \rightarrow 2a - 12 = 0 \rightarrow a = 6$$

062 Sea $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^2.

b) Calcula todos los valores de x e y para los que se verifica que $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(Castilla y León. Junio 2004. Bloque B. Pregunta 1)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-1 = x+1 \\ x+y=2 \\ y^2-1=-1 \rightarrow y=0 \end{array} \right.$

$x+y=2 \xrightarrow{y=0} x=2$

063 Determine los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(Andalucía. Año 2001. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{r} x-y=3+2x \\ 3x+2y=3y-2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{r} -x-y=3 \\ 3x-y=-2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{-5}{4} \\ y = \dfrac{-7}{4} \end{array} \right.$$

064 Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$ dos matrices de orden 2×3, en las que x, y y z denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determine, razonadamente, los valores de x, y y $z \in \mathbb{R}$ de manera que $A = B$.

b) ¿Es posible el cálculo de AB? Razónese la respuesta.

(Asturias. Septiembre 2000. Bloque 1)

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{r} 2=x \\ y=3 \\ 3=z \\ x+z=5 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \\ z=3 \end{array} \right.$

b) No es posible, ya que el número de columnas de A no coincide con el número de filas de B.

065 Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$$

a) Consideramos x e y dos variables, y a un parámetro. Obtén el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que resulta de plantear $AB - C = D$.

b) Estudia el sistema para los distintos valores de a.

c) Encuentra una solución para $a = 2$.

(Castilla y León. Junio 2007. Bloque B. Pregunta 1)

a) $AB - C = D \rightarrow \begin{pmatrix} ax+y \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax \\ y(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{cases} ax = 6-ay \\ y(1-a) = 1-a \end{cases}$$

b) Es compatible indeterminado para $a = 1$.
Es incompatible para $a = 0$.
Para el resto de valores de a es compatible determinado.

c) $\left.\begin{array}{l} 2x = 6-2y \\ -y = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

066 En cada una de las matrices, determina mentalmente cuál es el mayor número de filas y de columnas linealmente independientes.

$$A=(1 \quad 2 \quad 3) \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$A=(1 \quad 2 \quad 3) \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow$ 2 columnas (1.ª y 2.ª) y 2 filas

$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ 2 columnas y 2 filas

$E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 fila y 1 columna

$F=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ 1 columna y 1 fila

067 **Calcula el rango de las siguientes matrices.**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, porque la segunda columna es proporcional a la primera.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2=C_2-4C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 7 & 2\\ 2 & -6 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3-\frac{2}{7}C_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 7 & 0\\ 2 & -6 & \frac{12}{7}\end{pmatrix}$$

Como esta matriz es escalonada por columnas, Rango $(B)=3$.

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3+2F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow \text{Rango }(C)=2$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-4F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3+5F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}\rightarrow \text{Rango }(D)=3$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Como esta matriz es escalonada, Rango $(E)=3$.

068 **¿Cuál es el mayor número de columnas linealmente independientes de la matriz** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$**?**

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3=C_3-2C_1-C_2]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Como el rango por columnas es 2, solo hay dos columnas linealmente independientes.

069 **Sabiendo que el rango de la siguiente matriz es 2, determina el valor de *a*.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_3 - C_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -8 \\ -11 & -4 & a+11 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_3 + 4C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -11 & -4 & a-5 \end{pmatrix}$$

Para que el rango sea 2, como esta matriz es escalonada por columnas, el término $a - 5$ debe ser cero, luego $a = 5$.

070 **Halla el valor de *k*, si existe, para que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 5 & k & -10 \\ 1 & 1/3 & -2 \end{pmatrix}$ sea 1.**

La tercera columna es proporcional a la primera, luego el rango es, a lo más, 2.
Para que el rango sea 1, la segunda columna debe ser proporcional a la primera, pero esto es imposible porque: $\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{1/3}{1}$.
Luego no hay ningún valor de k para el cual el rango sea 1.

071 **Una matriz cuadrada de orden 3 tiene rango 2.**

a) ¿Cuál es el rango de la matriz que resulta al quitar una fila?
b) ¿Cuál es el rango de la matriz que resulta al eliminar una columna?
c) ¿Qué sucedería en los casos anteriores si el rango de la matriz inicial fuera 3?

a) El rango de la matriz es 2 si eliminamos una fila que depende linealmente de las otras, y es 1 si las dos filas que quedan son proporcionales.

b) El rango de la matriz es 2 si eliminamos una columna que depende linealmente de las otras, y es 1 si las dos columnas que quedan son proporcionales.

c) En este caso, el rango siempre es 2, porque las dos líneas que quedan son siempre linealmente independientes.

072 **Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1+2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=-F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+5F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=11F_1-2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 5 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=-\frac{1}{11}F_1 \\ F_2=-\frac{1}{11}F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \end{array}\right) \to B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

- $\left(\begin{array}{cc|cc} -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=-\frac{1}{6}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[F_3=4F_3-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=\frac{1}{4}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{8}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2-F_3 \\ F_1=2F_1+F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[F_1=2F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{4}F_1 \\ F_2=\frac{1}{4}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{2}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-3F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=2F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{2}F_1 \\ F_2=\frac{1}{4}F_2 \\ F_3=-F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-3F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=7F_1+F_2 \\ F_3=7F_3-F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=10F_1+3F_3 \\ F_2=10F_2+3F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 70 & 0 & 0 & 49 & 7 & 21 \\ 0 & 70 & 0 & -21 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & -20 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{70}F_1 \\ F_2=\frac{1}{70}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{20}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{7}{20} \end{array}\right) \rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{7}{20} \end{pmatrix}$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=\frac{1}{2}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{2}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- $I^{-1} = I$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1=\frac{1}{3}F_1 \\ F_2=\frac{1}{3}F_2 \\ F_3=\frac{1}{3}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \rightarrow J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

073 a) Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. ¿Tiene inversa?

b) Calcule la inversa de la matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(Cantabria. Septiembre 2006. Bloque 1. Opción B)

a) No tiene inversa, ya que su rango es 1, pues la segunda fila es igual a la primera multiplicada por 2.

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_2 = \frac{F_2}{-2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

074 Sea la siguiente matriz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula A^t y A^{-1}.

(La Rioja. Septiembre 2004. Parte A. Cuestión 2)

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

075 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hallar:

a) $C + AB$ b) $C^{-1} + (AB)^{-1}$ c) $(C + AB)^{-1}$

(Cantabria. Septiembre 2005. Bloque 1. Opción A)

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $C^{-1} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_1 = F_1 + F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = C^{-1} \rightarrow (AB)^{-1} = C$

$C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (C + AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

076 Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule A^2 y $(A^2)^{-1}$.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^{-1} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - \frac{3}{7}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{21}{19}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & \frac{28}{19} & -\frac{21}{19} \\ 0 & \frac{19}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{F_1}{7} \\ F_2 = \frac{7F_2}{19}}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{19} & \frac{7}{19} \end{array}\right) \rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{7}{19} \end{pmatrix}$$

077 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(A^{-1})^{-1}$ y $B^{-1}B$.

¿Por qué se obtiene este resultado?

Por la definición de matriz inversa: $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I$; multiplicando a la derecha por A los dos miembros, se obtiene $(A^{-1})^{-1} = A$.

Por la definición de matriz inversa: $B^{-1}B = I$.

078 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) Calcula $(B^2)^{-1}$, de la manera más rápida posible.

a) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $(B^2)^{-1} = (BB)^{-1} = B^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

079 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A^tA^{-1})^2 A$.

(Andalucía. Junio 2000. Opción A. Ejercicio 4)

$$(A^tA^{-1})^2 A = A^tA^{-1}A^tA^{-1}A = A^tA^{-1}A^t$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=-\frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^tA^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

080 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halle el producto de A por B.
b) Calcule la matriz inversa del producto de A por B.
c) Halle el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre esta matriz y la del apartado anterior? Justifique la respuesta.

(Cantabria. Junio 2006. Bloque 1. Opción B)

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(AB)^{-1} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[F_1=F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=-F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $A^{-1} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[F_1=F_1+2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=-F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1=F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Son matrices iguales, ya que se verifica:

$$B^{-1}A^{-1} \cdot (AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \rightarrow B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

081 Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Calcule $A^{-1}(B - A^t)$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

$$A^{-1} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = \frac{F_1}{2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B - A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(B - A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

082 Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule $((A^tB - 2I_2)^2)^{-1}$ (I_2 es la matriz unidad de orden 2 y A^t la traspuesta de A).

(Andalucía. Año 2003. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 1)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^tB - 2I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^tB - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$((A^tB - 2I_2)^2)^{-1} \rightarrow$ No existe, porque su rango es 1.

083 Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $AA^t - 5A^{-1}$, siendo A^t y A^{-1} las matrices traspuesta e inversa de A, respectivamente.

(C. Valenciana. Junio 2007. Ejercicio A. Problema 1)

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = 5F_1 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{F_1}{5} \\ F_2 = \frac{F_2}{5}}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$AA^t - 5A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

084 Sea la matriz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula el valor de a sabiendo que no existe la matriz inversa de A.

(La Rioja. Junio 2003. Parte A. Cuestión 1)

Si no existe inversa el rango es 1, por lo que las dos filas son proporcionales, y resulta que:

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{4} \rightarrow a = 2$$

085 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Estudia, en función de los valores reales de k, si la matriz BA tiene inversa.

b) Haz lo mismo para la matriz AB.

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 1)

a) $BA = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

No tiene inversa cuando las filas son propocionales.

$$\frac{k}{3} = \frac{1}{k+2} \rightarrow k^2 + 2k = 3 \rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = 1 \end{cases}$$

Para un valor de k distinto de 1 y -3, la matriz tiene inversa.

b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 3k & k & 2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} k & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3k & k & 2+2k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{F_3}{2}]{F_2 = F_2 - (1+k)F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} k - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2k-1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1-k \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 = F_1 - \frac{F_2}{2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{k}{2} \\ 2k-1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1-k \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Como el rango de la matriz es 2, la matriz AB nunca tiene inversa.

086 Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Calcule el valor de b para que $B^2 = I_2$.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+b & b^2 \end{pmatrix} \qquad B^2 = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow b = -1$$

087 Calcular los valores de a para los cuales la inversa de la matriz: $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ coincide con su traspuesta.

(Madrid. Septiembre 2003. Opción A. Ejercicio 1)

$$A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} \qquad A^t = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } A^{-1} = A^t \rightarrow \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix} a^2+16 & 0 \\ 0 & a^2+16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{a^2+16}{25} = 1 \rightarrow a^2 + 16 = 25 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

088 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores de x para los que se verifica $A^2 = 2A$.

b) Para $x = -1$, halle A^{-1}. Compruebe el resultado calculando AA^{-1}.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 1)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & x^2+4x+4 \end{pmatrix} \qquad 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix}$

$$A^2 = 2A \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & x^2+4x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + 4x = 2x \\ x^2 + 4x + 4 = 2x + 4 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = \frac{F_1}{2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

089 ¿Es posible que una matriz de tamaño 3 × 2 coincida con su traspuesta? ¿Y con su inversa?

(La Rioja. Junio 2005. Parte A. Cuestión 4)

No puede coincidir con su traspuesta, ya que no tienen el mismo número de filas y columnas. Y no puede coincidir con su inversa, porque no existe inversa, solo tienen inversa las matrices cuadradas.

090 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.

b) Igualmente para que $B + C = A^{-1}$.

c) Determine x para que $A + B + C = 3I_2$.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 1)

a) $B^2 = \begin{pmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$

$$A = B^2 \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} \to x = 1$$

b) $B + C = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B + C = A^{-1} \to \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to x = 0$$

c) $A + B + C = \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix}$

$$3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A + B + C = 3I_2 \to \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to x = 0$$

091 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B.

b) Si $AB = BA$ y $A + A^t = 3I_2$, calcule x e y.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 6. Opción B. Ejercicio 1)

a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 = -F_1 \\ F_2 = \frac{F_2}{2}}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $AB = \begin{pmatrix} -x+y & 2y \\ x+y & 2x \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} -x-y & -y \\ x-2y & y+2x \end{pmatrix}$

$AB = BA \rightarrow \begin{pmatrix} -x+y & 2y \\ x+y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y & -y \\ x-2y & y+2x \end{pmatrix} \rightarrow y = 0$

$A + A^t = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$

$3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A + A^t = 3I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{3}{2}$

092 Supongamos que A es una matriz 2×3 y B una matriz 3×2. ¿Tiene sentido escribir $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$?

(La Rioja. Septiembre 2005. Parte A. Cuestión 1)

No tiene sentido, ya que aunque AB es una matriz cuadrada 2×2 y sí puede tener inversa, las matrices A y B no son cuadradas y no pueden tener inversa.

093 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula una matriz X tal que cumpla las siguientes igualdades.

a) $A + X = B$
b) $A - X = B$
c) $2A + X = B$
d) $2A - X = B$
e) $A + X = 2B$
f) $A - X = 2B$
g) $A - X = -B$
h) $-A - X = B$

a) $X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $X = A - B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $X = B - 2A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $X = 2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $X = 2B - A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

f) $X = A - 2B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

g) $X = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

h) $X = -A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

094 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve las siguientes ecuaciones matriciales.

a) $-2A - X = B$
b) $A + 2X = B$
c) $A - 2X = B$
d) $2A + 2X = B$
e) $A + 2X = 2B$
f) $A + \frac{1}{2}X = B$
g) $\frac{1}{2}A - X = B$
h) $\frac{1}{2}A + 2X = B$

a) $X = -2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $X = \dfrac{B - A}{2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

c) $X = \dfrac{A - B}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

d) $X = \dfrac{B - 2A}{2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-7}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $X = \dfrac{2B - A}{2} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$

f) $X = 2(B - A) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ -8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

g) $X = \dfrac{A}{2} - B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 0 \end{pmatrix}$

h) $X = \dfrac{B - \frac{A}{2}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{4} & \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$

095 Calcule la matriz X solución de la ecuación: $2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(Aragón. Septiembre 2005. Opción B. Cuestión 1)

$$2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2X + \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 2X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 2X = \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{-11}{2} \\ \frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

096 Sea $6A + 2I = B$ una expresión matricial, donde B denota una matriz cuadrada de orden 2×2, tal que $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e I, la matriz unidad de orden correspondiente.

a) ¿Qué dimensión tiene la matriz A?

b) Determine los elementos que integran la matriz A, esto es, $a_{ij} \in A_{p \times q}$.

c) Calcule $A + 2I$.

(Asturias. Junio 2000. Bloque 1)

a) La matriz A tiene dimensión 2×2.

b) $6A + 2I = B \rightarrow A = \dfrac{B - 2I}{6} = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

c) $A + 2I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

097 Encontrar una matriz X que verifique $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Nota: $A \cdot B$ denota el producto de A por B.

(Cantabria. Septiembre 2007. Ejercicio 1. Opción A)

$$X - B^2 = AB \rightarrow X = AB + B^2 \rightarrow X = (A + B)B$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

098 Resuelve los sistemas matriciales siguientes.

a) $\left.\begin{array}{r} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ 3Y - X = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

a)
$$\begin{array}{rl} & 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ + & X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \\ \hline & 3X \quad = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2 \\ -11/3 & 3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\left.\begin{array}{r} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ + \quad -X + 3Y = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$
$$4Y = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -16 & 4 \end{pmatrix} \to Y = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

099 Calcula dos matrices cuadradas A y B sabiendo que $2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y que $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Castilla y León. Septiembre 2005. Bloque A. Pregunta 1)

$$\left.\begin{array}{r} 2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \to 5A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

100 Determinar las matrices A y B que verifican:

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

(Extremadura. Septiembre 2004. Opción B. Problema 1)

$$\left.\begin{array}{r} 2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \to 5A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}} B = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\to B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

101 Sabiendo que $2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ y que $3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 20 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$:

a) ¿Cuáles son las dimensiones de A y B?

b) Calcula las matrices A y B.

(Navarra. Junio 2004. Ejercicio 1. Opción A)

a) A y B son matrices de dimensión 3×2.

b) $$\left.\begin{array}{l} 2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow 7A = \begin{pmatrix} 21 & 49 & 14 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}} B = 2\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

102 **Despeja la matriz X de la ecuación $AX = B$ y calcúlala siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.**

Se multiplican por la izquierda los dos miembros de la ecuación por la inversa de A, que existe por ser Rango $(A) = 2$.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

103 **Calcula la matriz A que haga que:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Septiembre 2006. Parte A. Cuestión 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

104 **Halle la matriz A que verifica: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$**

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

105 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

averigua si existe una matriz C que verifique $BC = A$, y en su caso, calcúlese.

(Cataluña. Junio 2006. Serie 1. Cuestión 2)

Si tiene solución se verifica que: $BC = A \rightarrow C = B^{-1}A$

Esto no es posible, ya que B tiene rango 1, por lo que no existe su inversa y no hay solución.

106 Obtener de forma razonada la matriz X que verifica $AX = 2B - C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

(C. Valenciana. Septiembre 2002. Ejercicio A. Problema 2)

$$AX = 2B - C \rightarrow X = A^{-1}(2B - C)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$2B - C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2B - C) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

107 Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Despeje X de la ecuación matricial $A^2X = B$.

b) Calcule X.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 2)

a) $A = (A^2)^{-1}B$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & \frac{-1}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$

$$X = (A^2)^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & \frac{-1}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

108 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $A^{-1}(2B + 3I_2)$.

b) Determine la matriz X para que $XA = A + I_2$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 1)

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$2B + 3I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(2B + 3I_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$$

b) $XA = A + I_2 \rightarrow X = (A + I_2)A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + I_2)A^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

109 Encontrar una matriz X que verifique la igualdad: $AX = B$, con $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. ¿Verifica también la matriz X la igualdad $XA = B$?

(Navarra. Junio 2005. Ejercicio 1. Opción A)

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \neq B$$

No verifica la segunda igualdad.

110 Dadas las matrices:

$$A = (2 \quad 1 \quad -1) \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular las matrices $M = AB$ y $N = BA$.

b) Calcular P^{-1}, siendo $P = (N - I)$, donde I representa la matriz identidad.

c) Resolver el sistema $PX = C$.

(Madrid. Junio 2002. Opción A. Ejercicio 1)

a) $M = (2 \quad 1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$

$$N = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad 1 \quad -1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $P = N - I = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$

c) $PX = C \rightarrow X = P^{-1}C \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

111 Calcula la matriz X tal que $AX = A + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Galicia. Septiembre 2001. Bloque 1. Ejercicio 1)

$$AX = A + B \rightarrow X = A^{-1}(A + B)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(A + B) \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

112 Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz X que verifica la ecuación $AX = BC$. Justificar la respuesta.

(Extremadura. Septiembre 2005. Opción B. Problema 1)

$$AX = BC \rightarrow X = A^{-1}BC$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \qquad BC = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 28 \\ 95 & 37 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}BC \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 & 28 \\ 95 & 37 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 35 & 13 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

113 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule la matriz $C = BA - A^tB^t$.

b) Halle la matriz X que verifique $ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 1)

a) $BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^tB^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow X = (AB)^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 6 \end{pmatrix}$$

114 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $A^2 - 2A - 8I$

b) X tal que $AX = I$ (I es la matriz identidad 3×3).

(Navarra. Junio 2002. Ejercicio 1. Opción A)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $8I = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 2A - 8I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $AX = I \rightarrow X = A^{-1}$

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

115 Encuentra una matriz X que verifique $AX + B = I$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e I la matriz identidad.

$$AX + B = I \rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ I - B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

116 Determina la matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(Andalucía. Año 2001. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 1)

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$$

117 Hallar la matriz X que verifica la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

(Navarra. Septiembre 2006. Ejercicio 1. Opción A)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{-11}{5} & -4 \\ \frac{-13}{5} & \frac{-22}{5} & -5 \end{pmatrix}$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 En una clínica dental colocan tres tipos de prótesis, P_1, P_2 y P_3, en dos modelos diferentes, M_1 y M_2. El número de prótesis que tiene ya construidas viene dado en la matriz A. El precio, en euros, de cada prótesis viene dado en la matriz B.

$$A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se pide:

a) Obtener, si es posible, las matrices $C = A \cdot B$ y $D = B \cdot A$.

b) ¿Qué información proporcionan los elementos c_{12} de la matriz C y el elemento d_{22} de D?

c) ¿Qué elemento de C o D proporciona el valor total de todas las prótesis del tipo P_2?

(Castilla-La Mancha. Junio 2002. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.060 & 5.750 & 7.260 \\ 4.920 & 4.840 & 6.480 \\ 4.290 & 4.100 & 5.240 \end{pmatrix}$

$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.370 & 8.430 \\ 7.330 & 9.770 \end{pmatrix}$

b) El elemento c_{12} expresa el precio del total de prótesis de tipo P_1 si se vendieran al precio de las prótesis de tipo P_2.

El elemento d_{22} expresa el precio del total de prótesis del modelo M_2.

c) El valor total de todas la prótesis de tipo P_2 lo expresa el elemento c_{22}.

2 Los precios, en euros, de las entradas a un parque temático para Adultos (AD) y Niños y Jubilados (NJ) en Temporada Alta (TA), Temporada Media (TM) y Temporada Baja (TB) vienen dados por la matriz P. El número de asistentes, en miles, a dicho parque a lo largo de un año viene dado por la matriz N.

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{AD} \\ \text{NJ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{TA} & \text{TM} & \text{TB} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \\ \text{TA} \\ \text{TM} \\ \text{TB} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{AD} & \text{NJ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se pide:

a) Obtener, si es posible, las matrices $R_1 = P \cdot N$ y $R_2 = N \cdot P$.

b) ¿A cuántos euros asciende la recaudación total correspondiente a los Niños y Jubilados? ¿Y la correspondiente a la Temporada Baja?

c) ¿Qué elemento de R_1 o de R_2 nos proporciona información sobre la recaudación total correspondiente a los Adultos?

d) ¿A cuántos euros asciende la recaudación total?

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2001. Bloque 2. Ejercicio A)

a) $R_1 = P \cdot N = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.250 & 22.400 \\ 16.375 & 17.400 \end{pmatrix}$

$R_2 = N \cdot P = \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.500 & 19.000 & 12.400 \\ 14.750 & 11.500 & 7.600 \\ 5.125 & 4.000 & 2.650 \end{pmatrix}$

b) La recaudación total correspondiente a los Niños y Jubilados asciende a 17.400 €.
La recaudación total correspondiente a la Temporada Baja asciende a 2.650 €.

c) Esta información viene dada por el elemento a_{11} de la matriz R_1.

d) La recaudación total asciende a 38 650 €, que se corresponde con la suma de los elementos de la diagonal principal de cualquiera de las dos matrices, R_1 o R_2.

3 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + B^t = B$, donde X es una matriz cuadrada de orden 2.**

(Andalucía. Año 2007. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 1)

$AX + B^t = B \rightarrow AX = B - B^t \rightarrow X = A^{-1}(B - B^t)$

Calculamos la matriz inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = 3F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = 4F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{12}F_1 \\ F_2 = \frac{1}{8}F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(B - B^t) \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

4 **Encontrar una matriz A que verifique: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$**

(Cantabria. Junio 2005. Bloque 1. Opción B)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right]$$

Calculamos la matriz inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 = \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 = \frac{1}{3}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5 Determinar la matriz X en la siguiente ecuación matricial $A^2X = \frac{1}{2}(A + BC)$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(Galicia. Junio 2006. Bloque 1. Ejercicio 1)

$$A^2X = \frac{1}{2}(A + BC) \rightarrow X = (A^2)^{-1}\left(\frac{1}{2}(A + BC)\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - 3F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = \frac{1}{4}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$X = (A^2)^{-1}\left(\frac{1}{2} \cdot (A + BC)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & \frac{11}{2} \\ 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$