RELACION DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1996/97.

1º. - Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$, y calcula, si existe, la inversa de X.

2º. - Estudia el siguiente sistema según los valores del parámetro k e interpreta geométricamente los resultados:

$$\begin{cases} 2x + 2y + (k+2)z = -5 \\ x + y - 2z = 5 \\ 3x + ky - 6z = 5k \end{cases}$$

3º. - De una matriz cuadrada de orden 3 se sabe que su determinante vale 4. (1) Explica cuánto vale el determinante de la matriz 3A. (2) Si B es la matriz inversa de A, explica cuánto vale el determinante de B. (3) Al aplicar el método de eliminación de Gauss a la matriz A, al final del proceso obtenemos, sin que haya habido intercambio de filas ni de columnas, la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

¿Cuánto vale α? Justifica la respuesta.

4º. - (1) Explica brevemente el concepto de independencia lineal de vectores en $\mathbf{R}^3$ y enuncia alguna condición equivalente a que tres vectores de $\mathbf{R}^3$ sean linealmente independientes. (2) Escribe el vector b como combinación lineal de los vectores u, v y w, siendo:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

5º. - Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

(1) Añade una ecuación al sistema anterior de modo que el sistema resultante sea incompatible. (2) Si añadimos al sistema la ecuación mx + y - z = -1,

determina para qué valores del parámetro m el sistema resultante es compatible indeterminado y resuélvelo.

6º. - Una tienda vende una clase de calcetines a 1.200 ptas. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 597.600 ptas. Y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40%?

7º. - Determina según los valores del parámetro m cuándo tiene solución el sistema

$$\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ mx + (1-m)y + (m-1)z = m^2 \\ mx + y + mz = 2m^2 \end{cases}$$

y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1997/98.

8º. - La matriz cuadrada X de orden 3 verifica la relación

$$X^3 + X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determina, si es posible, el rango de X. ¿Verifica alguna de las matrices A y B siguientes la relación del enunciado?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9º. - Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = 1+m \end{cases}$$

Estudia su comportamiento según los valores del parámetro m y resuélvelo para m = 2.

10º. - Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A, B y C que un amigo suyo ha comprado:

Pista 1: Si compro una unidad de A, dos de B y una de C me gasto 900 Ptas.

Pista 2: Si compro m unidades de A, m + 3 unidades de B y 3 de C me gasto 2.950 Ptas.

(1) ¿Hay algún valor de m para el cual estas dos pistas no son compatibles? (2) Si en la Pista 2 se toma m = 4, ¿es posible saber el coste de cada uno de los productos? (3) Pista 3: El amigo le dice finalmente que el producto C vale 5 veces lo que vale el producto A y que en la Pista 2 se tiene m = 4. ¿Cuánto valen A, B y C?.

11º. - Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & 3 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(1) ¿Para qué valores de k no tiene inversa la matriz de los coeficientes? (2) Discuta el sistema según los valores de k.

12º. - De la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & \alpha \end{pmatrix}$$

Se sabe que no tiene inversa. (1) ¿Cuánto vale α? Justifica la respuesta. (2) Resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) ¿Existe alguna solución de dicho sistema con y = -1?

13º. - ¿Puedes construir una matriz cuadrada y de orden 3 que verifique las condiciones (i) y (ii) escritas a continuación?

(i) Su transpuesta y su inversa coinciden.

(ii) Su determinante vale 5.

Razona la respuesta.

14º. - (1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $B = (3 \;\; 1 \;\; -1)$, calcula la matriz X que cumple que:

$$X + (AB)^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(El superíndice t representa la matriz traspuesta) (2) ¿Tiene X matriz inversa? Justifica la respuesta.

15º. - Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

¿Existe algún valor real λ para el cual el sistema AX = λX tiene solución distinta de la trivial? Si la respuesta es afirmativa, indica el valor de λ y resuelve el sistema; si es negativa, di por qué.

16º. - Sea A una matriz no nula dada y considera la ecuación matricial AX=A+X, donde X es la incógnita. (1) Encuentra razonadamente la relación que debe de existir entre las dimensiones de A y de X para que la ecuación tenga sentido. (2) ¿Puede ser la suma de dos soluciones una nueva solución? ¿Y el producto de un número por una solución? Justifica la respuesta. (3) Si A es la matriz $A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y buscamos una solución de la forma $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, discute la ecuación matricial que resulta y resuélvela cuando sea posible.

17º. - Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + m^2 z = m \end{cases}$$

(1) Discute el sistema según los valores del parámetro m. (2) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado. (3) Razona para qué valores de m tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

18º. - Sea C la matriz que depende de un parámetro m, dada por:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C? (2) Calcula la matriz inversa de C para m = 2.

19º. - En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos: El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos y su precio es de 565 ptas. El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos y su precio es de 740 ptas. Con estos datos ¿podrías averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso? Justifica la respuesta.

20º. - Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Determina si A y B son invertibles y, en su caso, calcula la matriz inversa.
(2) Resuelve la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.

21º. - El determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$$

vale cero para a = 3. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques. Determina todos los valores de a para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes. Justifica la respuesta.

22º. - Se dice que dos matrices A y B son semejantes cuando existe una matriz invertible P tal que AP = BP. (1) Prueba que las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son semejantes. (2) Resuelve los sistemas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

23º. - Se dice que una matriz A cuadrada de orden tres es ortogonal si su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t coinciden. Dado un número real x, sea la matriz B

$$B = \begin{pmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) & 0 \\ -\text{sen}(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) ¿Es ortogonal la matriz B? (2) ¿Es B^2 ortogonal?

24º. - Sea A la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

Hallar a, b, c y d sabiendo que: (1) El vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector (1,-1,1). (2) El producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las de la tercera columna de A por el vector (1,0,1) es el vector (-2,3,2). (3) El rango de la matriz A es 2.

25º. - Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b:

$$\begin{cases} x+y+bz=b^2 \\ -x+y+z=-3 \\ bx+y+z=3b \end{cases}$$

y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1998/99.

26º. - Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix},$$

donde a, b y c son no nulos. (a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes. (b) Calcula el rango de A y razona si dicha matriz tiene inversa.

27º. - Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula A^tA y AA^t donde A^t denota la matriz traspuesta de A. (b) Siendo X una matriz columna, discute y, en su caso, resuelve, la ecuación matricial

$$AA^tX = \lambda X$$

según los valores del parámetro real λ.

28º. - Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ,

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + y + z = 1 \\ x + (1+\lambda)y + z = \lambda \\ x + y + (1+\lambda)z = \lambda^2. \end{cases}$$

29º. - (a) Si todos los elementos de una matriz de orden 3x3 se multiplican por (-1), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz? (b) ¿Y si se multiplican por (-2)? (c) Indica una de las propiedades de los determinantes que hayas utilizado en la resolución de los apartados anteriores.

30º. - Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$. (a) Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$. (b) Enuncia una propiedad de los determinantes que hayas usado en el apartado anterior.

31º. - Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro real m:

$$\begin{cases} 5x+4y+\ \ 2z=0 \\ 2x+3y+\ \ \ \ z=0 \\ 4x-\ \ y+m^2z=m-1 \end{cases}$$

32º. - Define el concepto de inversa de una matriz cuadrada. Da algún criterio que permita decidir si una matriz cuadrada es invertible. ¿Es invertible la matriz A siguiente? Justifica la respuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}..$$

33º. - Considera el sistema de ecuaciones que depende de un parámetro real a:

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+3y+z=2 \\ 5x+ay+z=6 \end{cases}$$

(a) Discute el sistema según los valores de a. (b) Resuélvelo para a = 8.

34º. - Considera la matriz B que depende de un parámetro a:

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) ¿Para qué valores de a tiene B inversa? Justifica la respuesta.
(b) Para a = 0 halla la inversa de B.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 1999/00.

35º. - Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $(A^t.A^{-1})^2.A$.

36º. - Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Halla los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa. Tomando $\lambda=1$, resuelve el sistema escrito en forma matricial

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

37º. - Resuelve la ecuación matricial $A^2 . X = 2B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

38º. - Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de λ:

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda x + y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}.$$

39º. - Un mayorista de café dispone de tres tipos base, Moka, Brasil y Colombia, para preparar tres tipos de mezcla, A, B y C, que envasa en sacos de 60 Kg. Con los siguientes contenidos en kilos y precios del kilo en euros:

	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C
Moka	15	30	12
Brasil	30	10	18
Colombia	15	20	30
Precio (cada Kg.)	4	4'5	4'7

Suponiendo que el preparado de las mezclas no supone coste alguno, ¡cuál es el precio de cada una de los tipos base de café?

40º. - Considera el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Discute el sistema según los valores del parámetro b. (b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

41º. - Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$ calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices para calcularlos:

(a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$. (b) $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$.

42º. - Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{cases}.$$

(a) Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones. (b) Resuelve el sistema para los valores de λ en el apartado anterior. (c) Discute el sistema para los restantes valores de λ.

43º. - Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 1 \\ 4x + y - 2z = 3 \\ 2x - 3y + az = b \end{cases}.$$

(a) Determina a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones. (b) Resuelve el sistema resultante.

44º. - Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}.$$

(a) Determina para qué valores del parámetro b existe A^{-1}. (b) Calcula A^{-1} para b=2.

45º. - Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla los valores de x e y tales que AX = U. (b) Halla la matriz A^{-1} y calcula $A^{-1}U$. (c) Encuentra los posibles valores de m para los que los vectores:

$$A.\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes.

46º. - Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+\lambda y+(\lambda-1)z &= 1 \\ \quad\; y+ \quad\; z &= 1 \\ 2x+ y - \quad z &= -3 \end{cases}.$$

(a) Halla todos los posibles valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones distintas. (b) Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior. (c) Discute el sistema para los restantes valores de λ.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 2000/01.

47º. - Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

48º. - Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. (a) Siendo I la matriz identidad de orden 3x3 y O la matriz nula de orden 3x3, prueba que $A^3 + I = O$. (b) Calcula A^{10}.

49º. - Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro "m"

$$\begin{cases} 2x + my = 0 \\ x + mz = m \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

y resuélvelo para m = 6.

50º. - Determina el valor de a, b y c, sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix} \quad \text{verifica :} \quad A.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{rango}(A) = 2.$$

51º. – De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determina cuáles tienen inversa y, en los casos en que exista, calcula el determinante de dichas inversas.

52º. – Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. (a) Determina el rango de A en función del parámetro a. (b) Discute, en función de a, el sistema dado en forma matricial AX = B. (c) Resuelve el sistema AX = B en los casos en que sea compatible determinado.

53º. – Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ verifica que det(A) = 1 y sus columnas son vectores perpendiculares dos a dos. (a) Calcula los valores de a y b. (b) Comprueba que para dichos valores se verifica que $A^{-1} = A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

54º. – Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{l} mx + y - z = 1 \\ x - my + z = 4 \\ x + y + mz = m \end{array}\right\}.$$

(a) Discútelo según los valores de m. (b) ¿Cuál es, según los valores de m, la posición relativa delos planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

55º. – Determina la matriz X tal que AX – 3B = 0, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

56º. – Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (a) Calcula el determinante de las matrices 2A, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$. (b) Halla la matriz A^{-1}.

57º. – Resuelve el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial,

$$AX = -AX + B,$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

58º. – Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$. (a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa. (b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 2001/02.

59º. – Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que:

$$\det(A) = -7 \quad y \quad A.\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

60º. – Determina la matriz X que verifica la ecuación AX = X – B, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

61º. – Considera la matríz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

62º. – Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + z &= 3 \\ 2x + my + z &= m \\ 3x + 5y + mz &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

(a) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga una y sólo una solución.
(b) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga al menos dos soluciones.
(c) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema no tenga solución.

Problemas propuestos para la prueba de acceso del curso 2002/03.

63º. – Considera los vectores $\vec{u} = (1,1,1), \vec{v} = (2,2,a)$ y $\vec{w} = (2,0,0)$. (a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. (b) Determina los valores de a para los que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ son ortogonales.

64º. – Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices: (a) El determinante de A^3. (b) El determinante de A^{-1}. (c) El determinante de 2A. (d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2.

65º. – Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial AX + 2B = 3C?
(b) Resuelve la ecuación matricial dada para m = 1.

66º. – Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz A + λI no tiene inversa. (b) Resuelve el sistema AX = 3X e interpreta geométricamente el conjunto de todas sus soluciones.