Actividades iniciales

1. En las siguientes funciones estudia las características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión:

a) $\boldsymbol{y = 2x^2 - 8x}$ ***b)*** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}}$

a) $f(x) = 2x^2 - 8$

• Dominio: $Dom\, f = R$

• Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P\,(0, 0) \\ Q\,(4, 0) \end{array}$$

Puntos de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P\,(0, 0)$$

• Simetrías:

$f(x) = 2x^2 - 8x$

$f(-x) = 2(-x)^2 - 8\,(-x) = 2x^2 + 8x$

$f(x) \neq f(-x) \Rightarrow$ f no es simétrica respecto al eje OY.

$f(x) \neq -f(-x) \Rightarrow f$ no es simétrica respecto al origen de coordenadas.

• Periodicidad: f no es periódica.

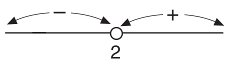
• Asíntotas:

No tiene asíntotas.

• Monotonía:

$f'(x) = 4x - 8$

Estudiamos el signo de $f'(x)$.



$f'(x) < 0$ en $(-\infty, 2)$

$f'(x) > 0$ en $(2, +\infty)$

f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$

f es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$

• Extremos relativos:

$f'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$f''(x) = 4 > 0$

f tiene un mínimo relativo en $(2, -8)$

• Concavidad:

$f''(x) = 4 > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y positivas en todo R.

• No existen puntos de inflexión.

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

• Dominio: $Dom\, f = R - \{+2, -2\}$

• Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P\,(0, 0)$$

Puntos de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P\,(0, 0)$$

• Simetrías:

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}\;;\; g(-x) = \frac{(x-)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Como $-f(x) = +g(-x)$ la función g es simétrica respecto al origen de coordenadas.

• Periodicidad: g no es periódica.

• Asíntotas:

Asíntotas verticales: Las rectas de ecuaciones.

$x = 2$ y $x = -2$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty;\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

No existen las asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

Son de la forma $y = mx + b$.

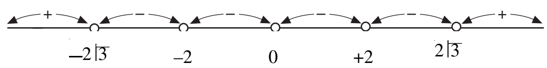
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x\,(x^2 - 4)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x$.

• Monotonía:

$$g'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} \left\{\begin{array}{l} x^4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{array} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{array}\right.$$



$g'(x) > 0$ en $\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right) \Rightarrow g$ es estrictamente creciente en $\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$

$g'(x) < 0$ en $\left(-2\sqrt{3}, -2\right) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup \left(2, 2\sqrt{3}\right. \Rightarrow g$ es estrictamente decreciente en $\left(-2\sqrt{3}, -2\right) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup$ $\cup \left(2, 2\sqrt{3}\right)$

• Extremos relativos:

$$g'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{array}$$

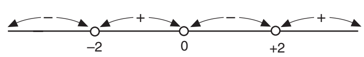
$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^2}$$

$g''\left(2\sqrt{3}\right) > 0 \Rightarrow g$ tiene mínimo relativo en el punto $\left(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$

$g''\left(-2\sqrt{3}\right) < 0 \Rightarrow g$ tiene máximo relativo en el punto $\left(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}\right)$.

• Concavidad

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}$$



$g''(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, +2) \Rightarrow g$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (0, +2)$.
$g''(x) > 0$ en $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \Rightarrow g$ es cóncava hacia las y positivas en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

• Puntos de inflexión:

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}\ ;\ 8x^3 + 96x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g'''(x) = \frac{-24x^4 - 576x^2 - 384}{(x^2 - 4)^4}$$

$g'''(0) \neq 0$

Existe un punto de inflexión en el punto (0, 0).

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

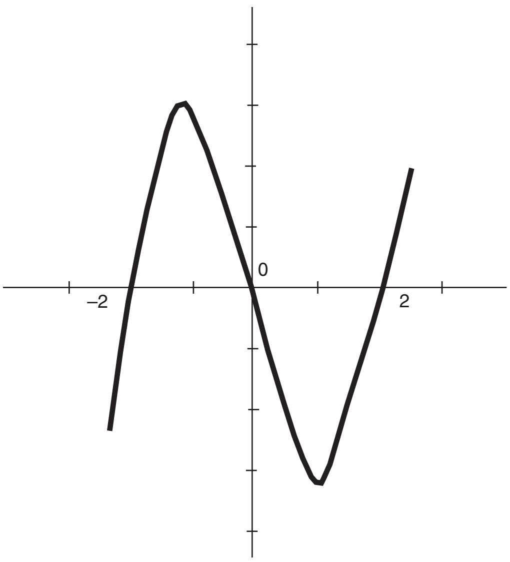
1 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = x\,(x + 2)\,(x - 2)$ ***b)*** $y = x^4 - 2x^2$

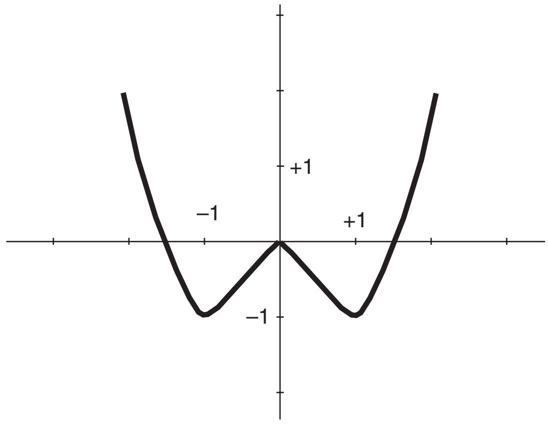
c) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$ ***d)*** $y = |x^2 - 4x + 3|$

e) $y = -\dfrac{x^3}{6} + x$ ***f)*** $y = x^4 - 2x^2 - 8$

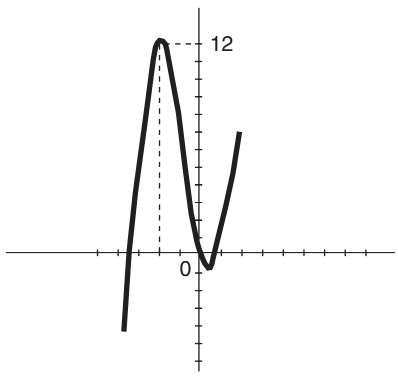
a) $y = x\,(x + 2)\,(x - 2) = f(x)$
• Dominio: $Dom\, f = R$
• Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al Origen y no es periódica.
• Puntos de corte con los ejes:
(0, 0) (–2, 0) (2, 0)
• Asíntotas y ramas infinitas:
No tiene asíntotas.
• Extremos relativos:
Mínimo $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$
Máximo $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$
• Puntos de inflexión:
(0, 0)
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
f es positiva en $(-2, 0) \cup (2, \infty)$



b) $y = x^4 - 2x^2 = f(x)$
• Dominio: $Dom\, f = R$
• Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al eje de ordenadas y no es periódica.
• Puntos de corte con los ejes:
$(0, 0)\,(\sqrt{2}, 0)\,(-\sqrt{2}, 0)$
• Asíntotas y ramas infinitas: No tiene.
• Extremos relativos:
Máximo (0, 0)
Mínimos en (1, 1) y (–1, 1)
• Puntos de inflexión:
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$
f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

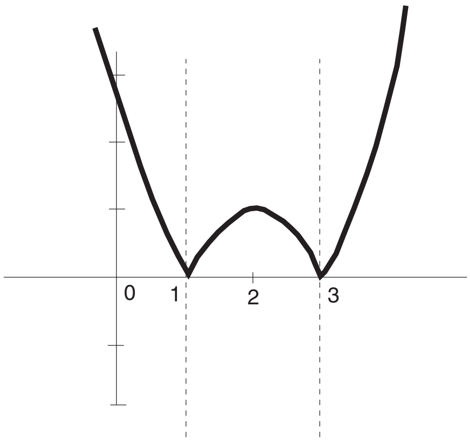


c) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x = f(x)$
• Dominio: $Dom\, f = R$
• Simetrías y periodicidad: Ni es simétrica ni periódica.
• Puntos de corte con los ejes
(0, 0) (0,64; 0) (–3,14; 0)
• Asíntotas y ramas infinitas: No tiene.
• Extremos relativos:
Máximo (–2, 12) Mínimo $\left(\frac{1}{3}, \frac{-19}{27}\right)$
• Puntos de inflexión:
$\left(-\frac{5}{6}\ ;\ 5{,}65\right)$
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\infty; -3{,}14) \cup (0; 0{,}64)$
f es positiva en $(-3{,}14; 0) \cup (0{,}64; +\infty)$



d) $y = \left| x^2 - 4x + 3 \right|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \text{ si } x \le 1 \text{ o } x \ge 3 \\ -x^2 + 4x - 3 \text{ si } 1 < x < 3 \end{cases}$$



e) $y = -\dfrac{x^3}{6}\ f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = R$
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al origen de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes:

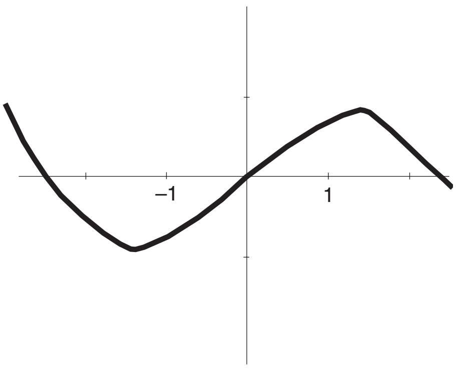
  $(0, 0)\,(\sqrt{6}, 0)\,(-\sqrt{6}, 0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos:

  Máximo $\left(\sqrt{2}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ Mínimo $\left(-\sqrt{2}, \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}\right)$
- Puntos de inflexión:

  (0, 0)
- Intervalos de signo constante:

  f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (0, +\sqrt{6})$

  f es negativa en $(-\sqrt{6}, 0) \cup (+\sqrt{6}, +\infty)$



f) $y = x^4 - 2x^2 - 8 = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = R$
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al eje de ordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes:

  (0, –8) (2, 0) (–2, 0)
- Asíntotas y ramas infinitas: No tiene.
- Extremos relativos:

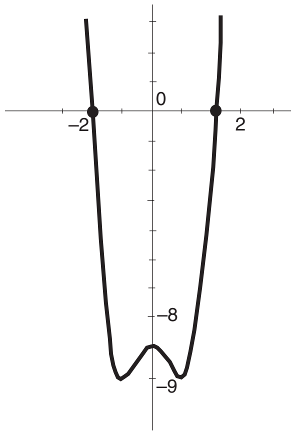
  Máximo (0, –8)

  Mínimos (1, –9) y (–1, –9)
- Puntos de inflexión:

  $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-77}{9}\right)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-77}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante

  f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

  f es negativa en $(-2, 2)$



2 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $= \dfrac{4}{x^2 - 4}$

b) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$

c) $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ **curva de Agnesi**

d) $y = \dfrac{x^2}{x + 2}$

e) $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$

f) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

g) $y = \dfrac{x + 1}{(x + 2)(x + 3)(x + 4)}$

h) $y = \dfrac{x}{1 + |x|}$

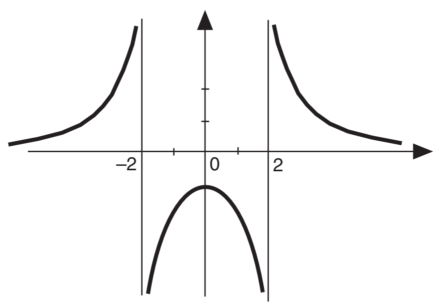
i) $= \dfrac{(x + 1)(x + 2)\ x}{(x - 1)(x + 3)}$

a) $y = \dfrac{4}{x^2 - 4} = \mathrm{f}(x)$

- Dominio: $Dom\, f = R - \{+2, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, –1)
- Asíntotas: $x = +2$; $x = --2$; $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo (0, –1)
- Intervalos de signo constante:

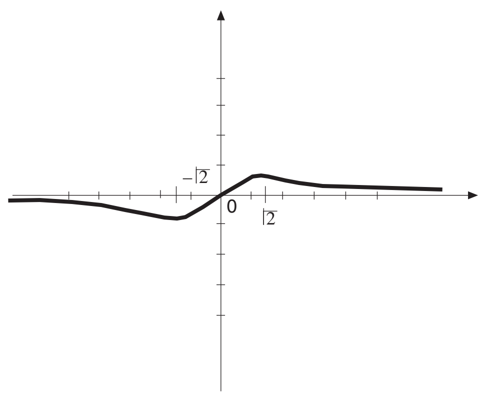
  f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

  f es negativa en $(-2, 2)$



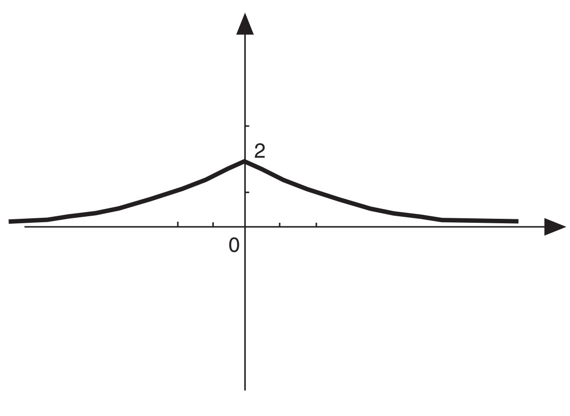
b) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2} = f(x)$

- Dominio: $Dom\,f = R$
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto al origen y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; Mínimo $\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en $(-\infty, 0)$
  f es positiva en $(0, +\infty)$



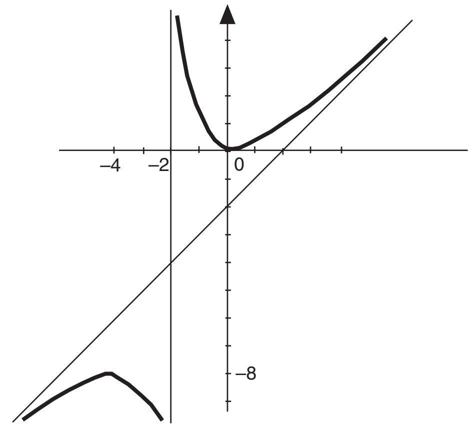
c) $y = \dfrac{8}{x^2 + 4} = f(x)$

- Dominio: $Dom\,f = R$
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto a OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 2)
- Asíntotas: $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo (0, 2).
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en todo su dominio.



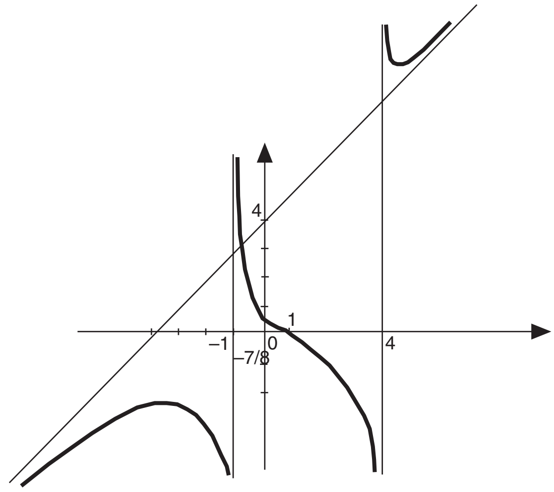
d) $y = \dfrac{x^2}{x + 2} = f(x)$

- Dominio: $Dom\,f = R - \{2\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $x = -2$; $y = x - 2$.
- Extremos relativos: Mínimo (0, 0); Máximo (–4, –8).
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en $(-\infty, -2)$.
  f es positiva en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.



e) $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = f(x)$

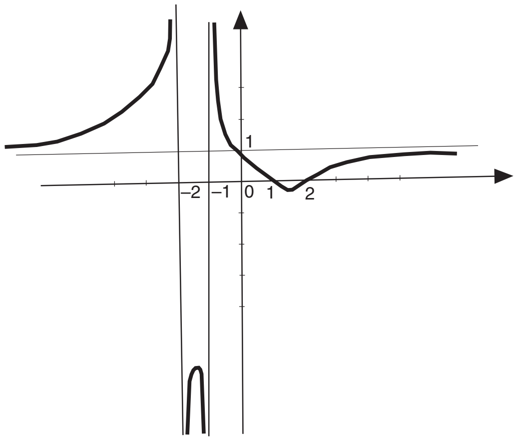
- Dominio: $Dom\,f = R - \{4, -1\}$
- Simetrías y periodicidad: Ni simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ $(1, 0)$
- Asíntotas: $x = -1$; $x = 4$; $y = x + 4$
  La curva corta a la asíntota oblicua $y = x + 4$
  en el punto $\left(-\dfrac{7}{8}, \dfrac{25}{8}\right)$
- Extremos relativos: No se pueden hallar fácilmente.
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-1, 1) \cup (4, +\infty)$
  f es negativa en $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$.



f) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} = f(x)$

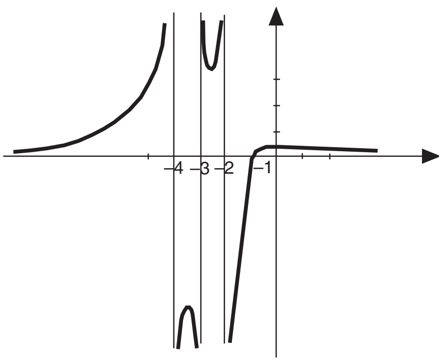
- Dominio: $Dom\,f = R - \{-1, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: No es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 1) (1, 0) (2, 0)
- Asíntotas: $x = -1$; $x = -2$; $y = 1$
- Extremos relativos: Mínimo $\left(\sqrt{2}, -0{,}03\right)$; Máximo $\left(-\sqrt{2}, -34\right)$

• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
f es negativa en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.



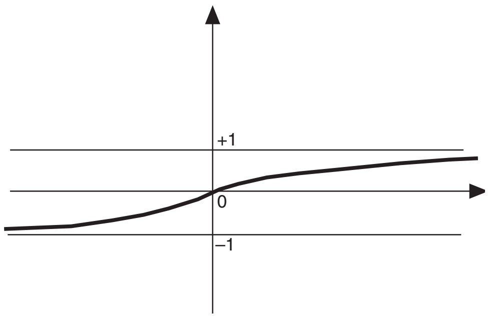
g) $y = \dfrac{x + 1}{(x + 2)\,(x + 3)\,(x + 4)} = f(x)$

• Dominio: *Dom f* = $R - \{-2, -3, -4\}$
• Simetrías y periodicidad: No es simétrica, ni periódica.
• Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \dfrac{1}{24}\right)$ $(-1, 0)$
• Asíntotas: $x = -2$; $x = -3$; $x = -4$; $y = 0$.
• Extremos relativos: La curva presenta dos máximos relativos y un mínimo, como observamos en la gráfica.
• Intervalos de signo constante:
f es positiva en $(-\infty, -4) \cup (-3, -2) \cup (-1, +\infty)$
f es negativa en $(-4, -3) \cup (-2, -1)$



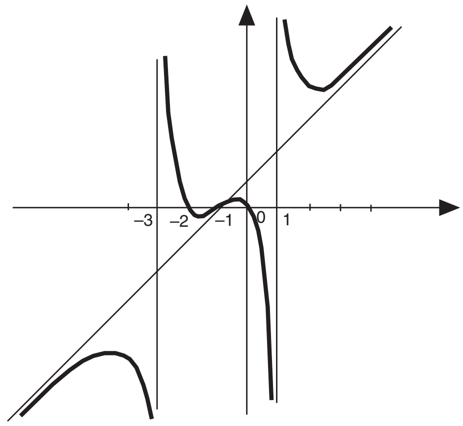
h) $y = \dfrac{x}{1 + |x|} = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



f) $y = \dfrac{(x + 1)\,(x + 2)\,x}{(x - 1)\,(x + 3)} = f(x)$

• Dominio: *Dom f* = $R - \{1, -3\}$
• Simetrías y periodicidad: No es simétrica, ni periódica.
• Cortes con los ejes: $(0, 0)$ $(-1, 0)$ $(-2, 0)$
• Asíntotas: $x = 1$; $x = -3$; $y = x + 1$
La curva corte a la asíntota oblicua en $(-1, 0)$
• Extremos relativos: Pueden verse en la gráfica.
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (0, 1)$
f es positiva en $(-3, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$



$\boxed{3}$ **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $= \sqrt{x^2 - 1}$

b) $y = [\sqrt{x}]^2$

c) $= -\sqrt{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$

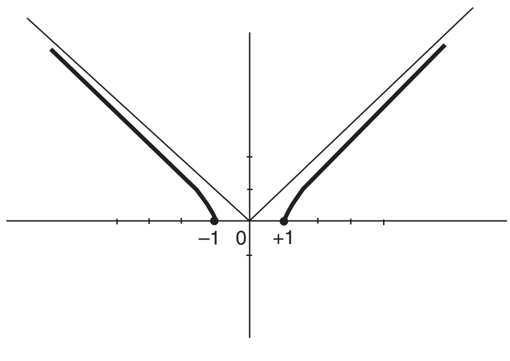
d) $y = \pm\sqrt{\dfrac{x - 1}{4x - 1}}$

e) $= \pm\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 - 4}}$

f) $y^2 = \dfrac{x^2}{3x}$

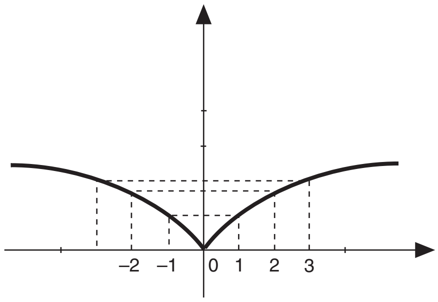
a) $y = +\sqrt{x^2 - 1} = f(x)$

• Dominio: *Dom f* = $(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$
• Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al eje *OY* y no es periódica.
• Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$ $(-1, 0)$
• Asíntotas: $y = x$; $y = -x$.
• Extremos relativos: no tiene.
• Intervalos de signo constante: *f* es positiva en todo su dominio.



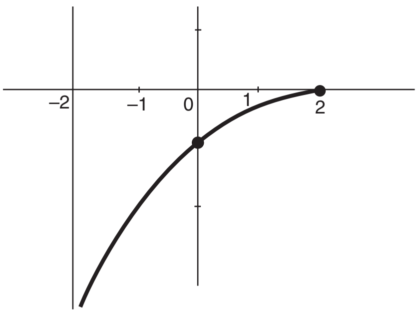
b) $y = \left[\sqrt[3]{x}\right]^2 = f(x)$.

- Dominio: $Dom\, f = R$
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: no tiene.
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



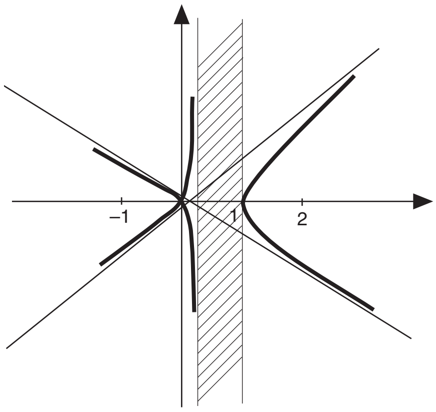
c) $y = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}\ f(x)$.

- Dominio: $Dom\, f = (-2, +2]$
- Simétricas y periodicidad: no es simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, –1) (2, 0).
- Asíntotas: $x = -2$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante: *f* es negativa en todo su dominio.



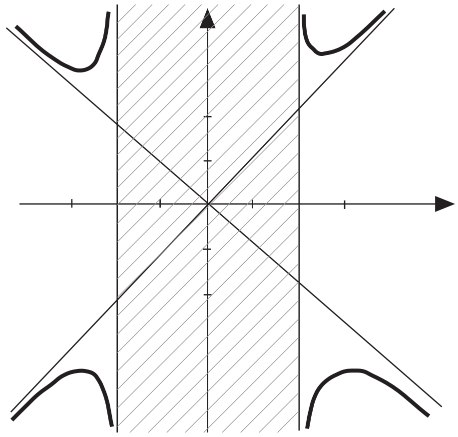
d) $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x-1}{4x-1}} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right) \cup [1, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: No existen.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0) (1, 0)
- Asíntotas: $x = \dfrac{1}{4}$; $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{16}$; $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{16}$
- Extremos relativos: no tiene.



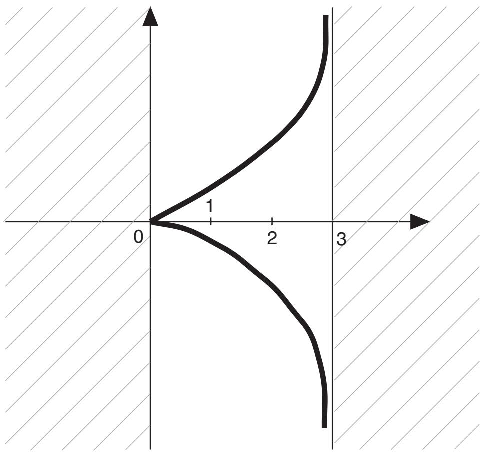
e) $y = \pm \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto a OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0) no existe.
- Asíntotas: $x = +2$; $x = -2$; $y = x$; $y = -x$
- Extremos relativos:
  Mínimos $\left(\sqrt{8}, 4\right)\left(-\sqrt{8}, 4\right)$
  Máximos $\left(\sqrt{8}, -4\right)\left(-\sqrt{8}, -4\right)$



f) $y^2 = \dfrac{x}{3-x} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{x}{3-x}} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = [0, 3)$
- Simetrías y periodicidad: No tiene
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $x = 3$
- Extremos relativos: no tiene.



4 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \ln(x-2)$ ***b)*** $y = e^{\frac{1}{x}}$

c) $y = x \cdot e^x$ ***d)*** $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$

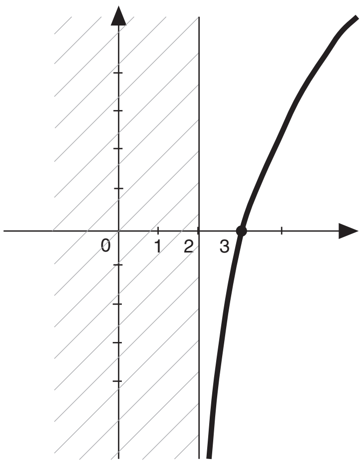
e) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ ***f)*** $y = \ln|x+1|$

g) $y = \ln\sqrt{x^2+4}$ ***h)*** $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

i) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

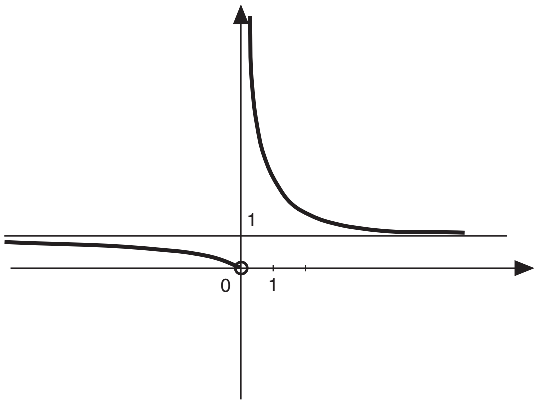
a) $y = ln\ (x - 2) = f(x)$

- Dominio : $Dom\, f = (2, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (3, 0)
- Asíntotas: $x = 2$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(3, +\infty)$
  f es negativa en (2, 3)



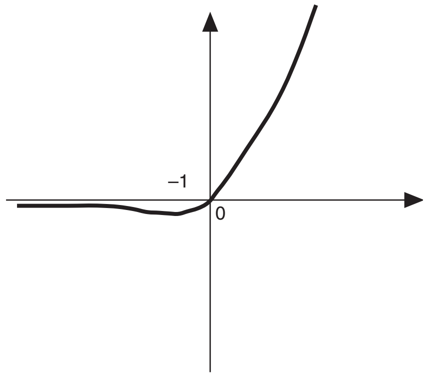
b) $y = e^{\frac{1}{x}} = f(x)$

- Dominio : $Dom\, f = R - \{0\}$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas:
  $x = 0$ pues $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.
  $y = 1$ pues $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = +1$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



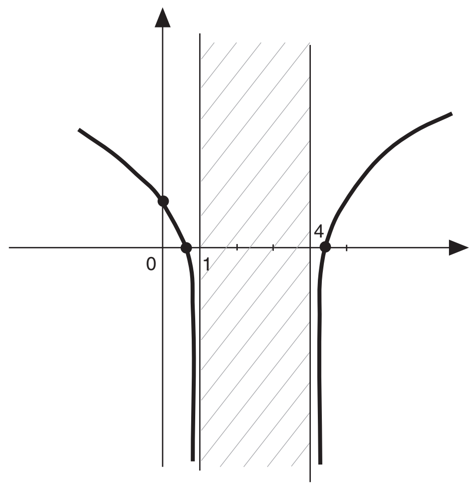
c) $y = x \cdot e^x = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = R$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $y = 0$, pues $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0$.
- Extremos relativos: Mínimo $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en $(-\infty, 0)$
  f es positiva en $(0, +\infty)$



d) $y = ln\ (x^2 - 5x + 4) = f(x)$

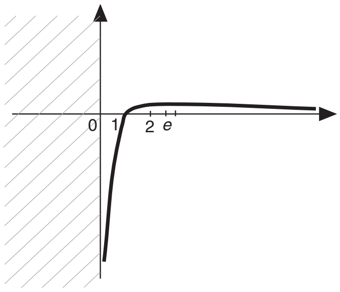
- Dominio: $Dom\, f = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes:
  $(0, ln\ 4)$ $(4{,}2;\ 0)$ $(0{,}8;\ 0)$
- Asíntotas:
  $x = 1$, pues $\lim\limits_{x \to 1^-} ln\ (x^2 - 5x + 4) = -\infty$
  $x = 4$ pues $\lim\limits_{x \to 4} ln\ (x^2 - 5x + 4) = -\infty$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en
  $(-\infty;\ 0{,}8) \cup (4{,}2;\ +\infty)$
  f es negativa en
  $(0{,}8;\ 1) \cup (4;\ 4{,}2)$



e) $y = \dfrac{ln\ x}{x} = f(x)$.

- Dominio: $Dom\, f = (0, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: (1, 0)
- Asíntotas: $x = 0$, pues $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ln\ x}{x} = -\infty$
  $y = o$, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\ x}{x} = 0$
- Extremos relativos: Máximo $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

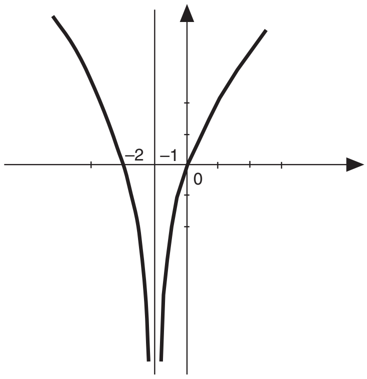
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en (0, 1)
  f es positiva en (1, +∞)



f) $y = ln\,|x + 1| = f(x)$

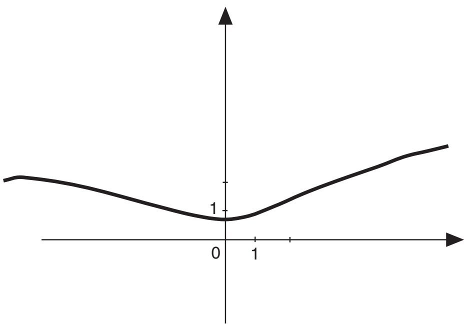
$$f(x) = \begin{cases} ln\,(x + 1) \text{ si } x > -1 \\ ln\,(-x - 1) \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

- Dominio: *Dom f* = *R* – {–1}
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0) (–2, 0)
- Asíntotas: $x = -1$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en (-∞, -2) ∪ (0, +∞)
  f es negativa en (–-2, –1) ∪ (–1, 0)



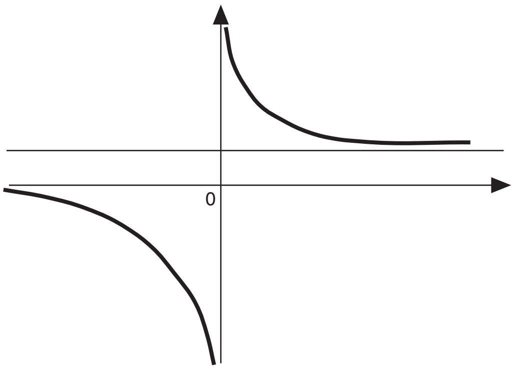
g) $y = ln\,\sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + 4) = f(x)$

- Dominio: *Dom f* = *R*
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al eje de ordenadas *(OY)* y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes:
  (0, *ln*2)
- Asíntotas: no tiene.
- Extremos relativos: Mínimo (0, *ln*2).
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en todo su dominio.



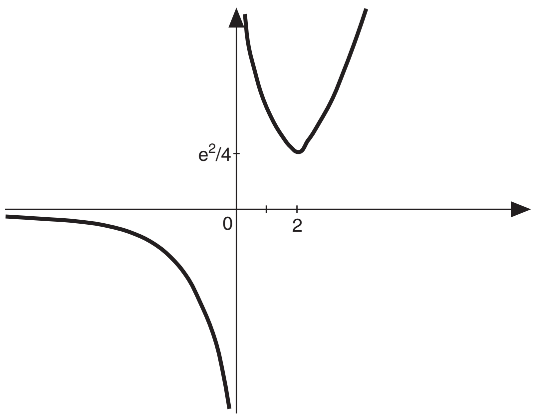
h) $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1} = f(x)$

- Dominio: *Dom f* = *R* – {0}
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas: $x = 0$
  $y = 1$, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = 1$
  $y = 0$, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = 1$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en (–∞, 0)
  f es positiva en (0, +∞)



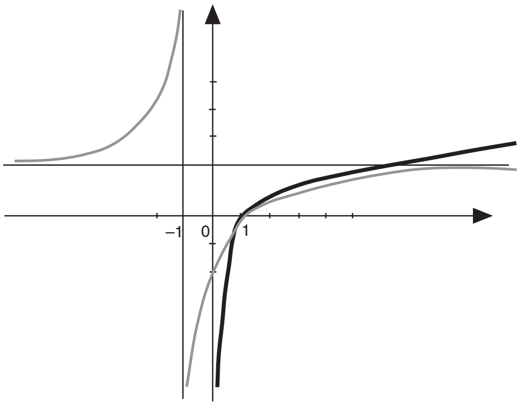
i) $y = \dfrac{e^x}{x^2} = f(x)$.

- Dominio: *Dom f* = *R* – {0}
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas: $x = 0$
  $y = 0$ pues $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0$
- Extremos relativos: Mínimo $\left(2, \dfrac{e^2}{4}\right)$
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en (–∞, 0)
  f es positiva en (0, +∞)



5 **A partir de las gráficas de las respectivas funciones, demuestra que:**

$$\boldsymbol{ln\,x > \frac{2\,(x - 1)}{x + 1};\ \forall x > 1}$$



En la gráfica está representada en trazo continúa la función $y = ln\ x$ y en discontinmuo la función $y = \dfrac{2\,(x-1)}{x+1}$.

Claramente se observa que a partir de $x > 1$ se verifica la desigualdad.

6 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

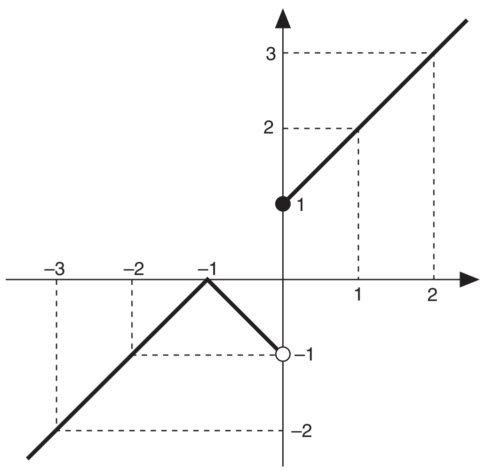
$$f(x) = \begin{cases} x\left|1+\dfrac{1}{x}\right| \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\left[\dfrac{1}{x}\right] \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x\left|1+\dfrac{1}{x}\right| \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

- Dominio: $Dom\,f = R - \{0\}$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 1) (–1, 0)
- Asíntotas: no tiene.

Con los datos obtenidos y haciendo una tabla de valores encontramos la gráfica de la función dada:

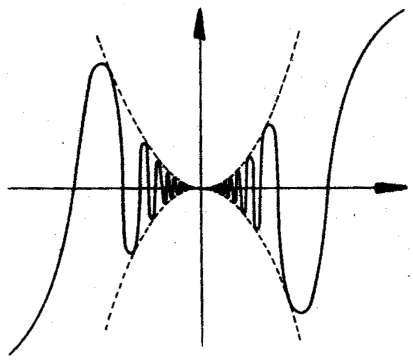


$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\left[\dfrac{1}{x}\right] \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

- Dominio: $Dom\ g = R$
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al origen de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes:

$$(0,\,0)\left(\frac{1}{2\,K\Pi},\,0\right)\left(\frac{1}{\Pi+2\,K\Pi}\right),\ 0 \text{ con } K \in Z$$

Con los datos obtenidos y dando valores, representamos gráficamente la función dada:



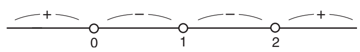
Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

7 **Consideramos la función** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$
Se pide:
a) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.**
b) **Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.**
c) **Asíntotas.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$



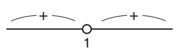
f es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
f es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad x = 2$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ f tiene un máximo en (0, 0)
$f''(2) < 0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo en (2, 4)

b) Estudiemos el signo de $f''(x)$.



f es cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$ y f es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$
f no tiene puntos de inflexión.

c) Asíntotas verticales: $x = 1$
Asíntotas horizontales: no tiene, pues:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = 1$$

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = x + 1$.

8 **Halla el dominio de definición, los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, los ceros, las asíntotas, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función**

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$$

Dibuja luego un esquema sencillo de su gráfica.

- Dominio: $Dom\, f = R$
- $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \frac{1}{8} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \frac{1}{8}$
- Puntos de corte con los ejes o ceros: (0, 0) (1, 0)
- Asíntotas:
  Verticales: no tiene.
  Horizontales: $y = \frac{1}{8}$
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x) = \frac{8x^2 + 2x - 1}{(8x^2 + 1)^2}$$

  Estudiamos el signo de $f'(x)$

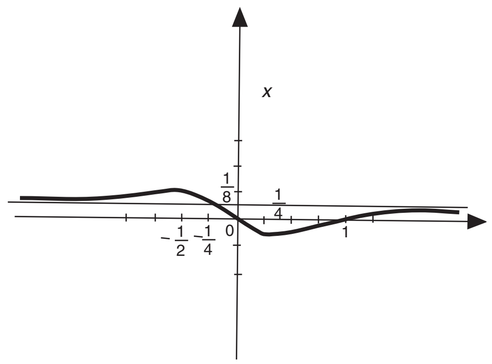
  $$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & \end{array}$$

  f es creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

  f es decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
- Extremos relativos:
  f tiene un máximo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

  y un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$.

  Su gráfica es:



9 **Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x - 1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números enteros consecutivos está cada una de las soluciones?**

Nota: Utiliza las gráficas de las funciones:

$$f(x) = e^x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{-x^4}{4(x-1)}$$

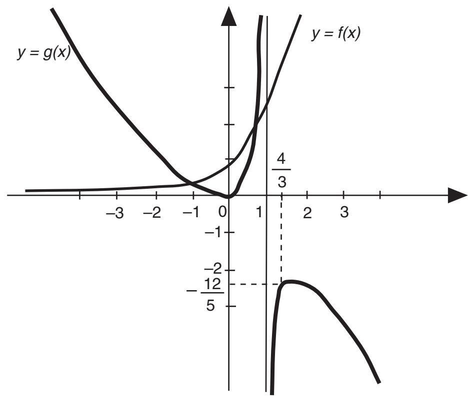
La ecuación dada $x^4 + 4e^x \cdot (x - 1) = 0$ se puede transformar en:

$$e^x = \frac{-x^4}{4(x-1)}$$

Por tanto, las soluciones de esta ecuación serán los valores de las abscisas de los puntos de intersección de las curvas:

$$f(x) = y = e^x \;;\; g(x) = y = \frac{-x^4}{4(x-1)}$$

Las representamos gráficamente:

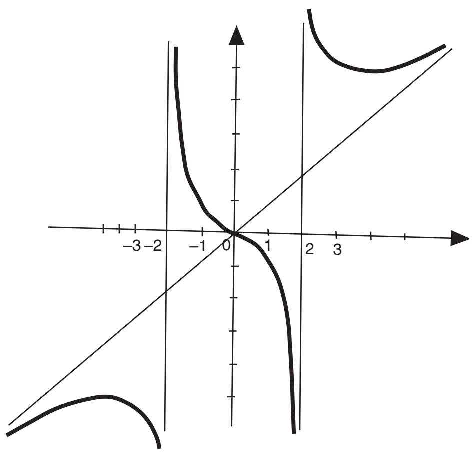


A partir de la representación gráfica observamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en dos puntos; uno de ellos entre (–2, –1) y otro (0, 1).

10 **Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$**

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = f(x)$$

- Dominio = $Dom\, f = R - \{+2, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al origen de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $x = +2$; $x = -2$; $y = x$
- Extremos relativos:
  Mínimo relativo $\left(2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}\right)$; Máximo relativo $\left(-2\sqrt{3},\ -3\sqrt{3}\right)$
- Punto de inflexión: (0, 0)
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
  f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$



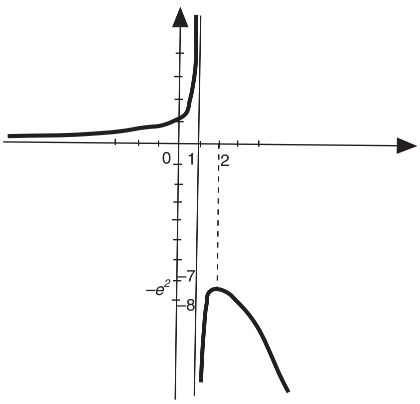
11 **Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - x}$ calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.**

$$y = \frac{e^x}{1 - x} = f(x)$$

- Dominio: *Dom f* = $R - \{1\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 1)
- Asíntotas: $x = 1$

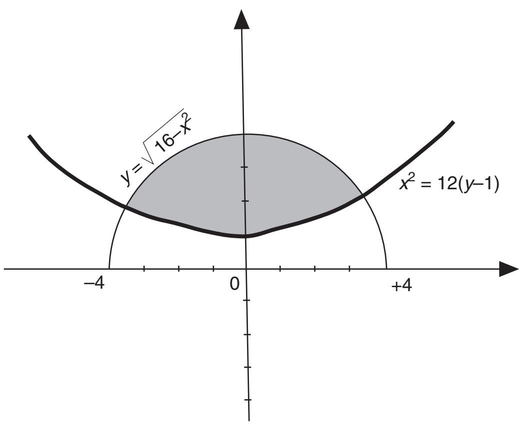
$y = $ o, pues $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{1 - x} = 0$.

- Extremos relativos: Máximo relativo $(2, -e^2)$
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
  Creciente $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$
  Decreciente $(2, +\infty)$
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-\infty, 1)$
  f es negativa en $(1, +\infty)$



12 **Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:**

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$
$$x^2 = 12\,(y - 1)$$



La zona rayada es la región de plano comprendida entre las curvas.

13 **Estudia y representa gráficamente la función $f: R \to R$ definida así:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\log_e x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) $y = \dfrac{(x + 1)^2}{x}$ $(x < 0)$

- Dominio: *R*
- Simetrías: No simétrica.
- Periodicidad: no periódica.
- Cortes con los ejes: (–1, 0)
- Asíntotas: $x = 0$; $y = x + 2$
- Extremos relativos: Máximo (–1, 0)

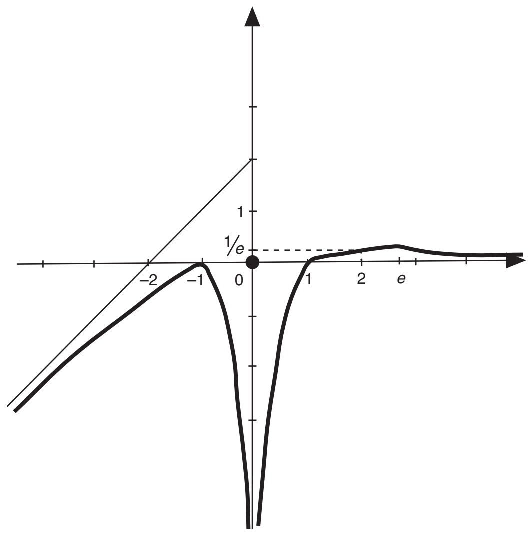
b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$

- Dominio: *R*
- Simetrías: no tiene.
- Periodicidad: no periódica.
- Cortes con los ejes: (1, 0)
- Asíntotas: $x = 0$; $y = 0$

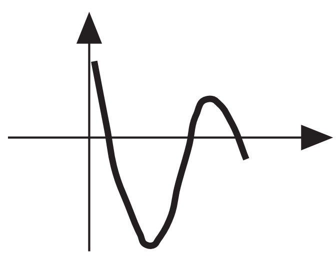
  $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

- Extremos relativos: Máximo $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

A partir del estudio anterior, obtenemos la gráfica de la función dada:



14 **Éste es el esquema que representa el gráfico de la función $y = f(x)$**

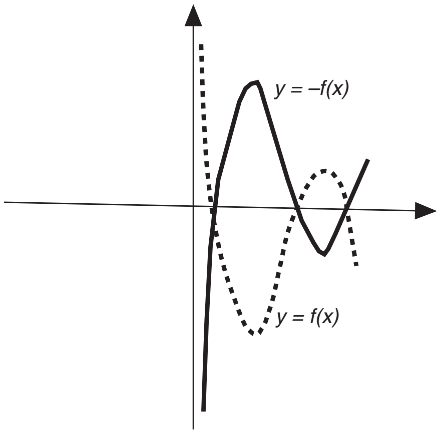


a) **Haz otro esquema que represente el gráfico de la función *y = –f(x)*.**

b) **Haz otro esquema que represente conjuntamente las gráficas de *y = f(x)* e *y* = 2 *f(x)*.**

Explica el fundamento para la construcción de estos esquemas.

a) El gráfico de la función *y = –f(x)* se obtiene al aplicar al gráfico de la función *y = f(x)* una simetría de eje el eje de abscisas.



b) El gráfico de la función *y = 2 · f(x)* se obtiene duplicando las ordenadas correspondientes a cada valor de la abscisa en la gráfica de la función *y = f(x)*.